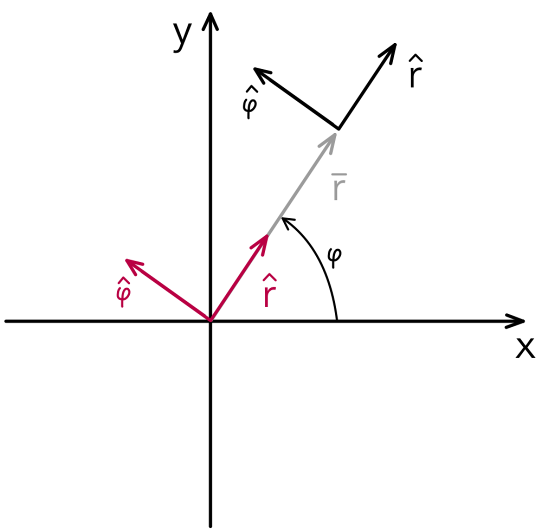
1 Coordenadas polares

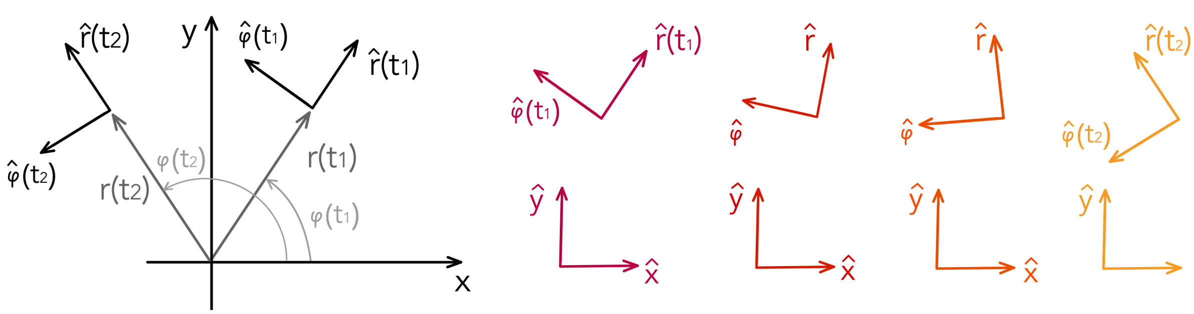
Queremos describir un movimiento bidimensional, pero no queremos hacerlo usando un sistema de *coordenadas cartesianas* sino uno de *coordenadas polares*.



En este sistema de coordenadas, se definen dos direcciones dadas por los versores radial $\hat{r}$ y azimutal $\hat{\varphi}$. El versor $\hat{r}$ de define en la dirección del vector $\mathbf{r}$, mientras que el versor $\hat{\varphi}$, perpendicular a $\mathbf{r}$, se define con sentido en la dirección del ángulo φ creciente.
Moviendo los versores al centro de coordenadas puede encontrarse la relación entre versores polares y versores cartesianos

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \quad \cos(\varphi)\,\hat{x} + \sin(\varphi)\,\hat{y} \\ \hat{\varphi} &= -\sin(\varphi)\,\hat{x} + \cos(\varphi)\,\hat{y} \end{aligned} \tag{1}$$

Esta relación es fundamental para poder encontrar el vector velocidad $\mathbf{v}(t) = d\mathbf{r}(t)/dt$ a partir del vector $\mathbf{r}(t)$ en coordenadas polares. La razón por la cuál la relación dada por las ecuaciones (1) es tan importante está en la variación de los versores $\hat{r}$ y $\hat{\varphi}$, es decir, conforme $\mathbf{r}(t)$ cambia los versores $\hat{x}$ y $\hat{y}$ permanecen constantes, de forma que toda la variación de $\mathbf{r}(t) = r_x(t)\hat{x} + r_y(t)\hat{y}$ se encuentra en las funciones $r_x(t)$ y $r_y(t)$. Sin embargo, los versores $\hat{r}$ y $\hat{\varphi}$ cambian conforme varía el ángulo $\varphi(t)$ y por lo tanto hay que tener presente esta dependencia temporal cuando derivemos $\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{r}\,(\varphi(t))$ si está expresada en coordenadas polares.



Presentados los sistemas de coordenadas, podemos escribir el vector posición $\mathbf{r}$ en coordenadas polares como

$$\mathbf{r} = r\hat{r} \tag{2}$$

con $r = |\mathbf{r}|$. Para encontrar ahora el vector velocidad, debemos derivar $\mathbf{r}$ con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{r} &= \frac{d}{dt}(r\hat{r}) \\ &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}, \end{aligned} \tag{3}$$

donde el punto sobre una cantidad x, $\dot{x}$ indica derivada con respecto al tiempo. Ahora es cuando se vuelven fundamentales las relaciones entre versores cartesianos y polares de la ecuación (1), porque debemos escribir la derivada del versor radial.

> Auxiliar: Cálculo de la derivada de $\hat{r}$. Recordamos que el ángulo φ varía en el tiempo y por lo tanto depende de t, es decir, $\varphi = \varphi(t)$ aunque omitimos escribir explícitamente esta dependencia.
>
> $$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{r} &= \frac{d}{dt}\left(\cos(\varphi)\,\hat{x} + \sin(\varphi)\,\hat{y}\right) \\ &= \frac{d\cos(\varphi)}{dt}\,\hat{x} + \frac{d\sin(\varphi)}{dt}\,\hat{y} \\ &= -\sin(\varphi)\dot{\varphi}\,\hat{x} + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\,\hat{y} \\ &= \left(-\sin(\varphi)\,\hat{x} + \cos(\varphi)\,\hat{y}\right)\dot{\varphi} \\ &= \dot{\varphi}\hat{\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

De forma que, completando en la fórmula (3) que habíamos alcanzado para la velocidad, terminamos de encontrar una expresión para ésta completamente en términos de las coordenadas $\{r, \varphi\}$ y los versores $\{\hat{r}, \hat{\varphi}\}$ polares

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} \tag{5}$$

Para hallar la aceleración, se recurre al mismo método, es decir

- Empezamos planteando lo que ya sabemos: que la aceleración es la derivada temporal de la velocidad. Pero, expresamos la velocidad usando coordenadas y versores polares, porque nos interesa trabajar en este sistema.

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t) &= \frac{d}{dt}\mathbf{v}(t) \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\hat{r} + r\,\dot{\varphi}\,\hat{\varphi}) \\ &= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\,\frac{d\hat{r}}{dt} + (\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\hat{\varphi} + r\,\dot{\varphi}\,\frac{d\hat{\varphi}}{dt} \end{aligned} \tag{6}$$

- Para poder llevar adelante el cálculo explícito de las derivadas de $\hat{r}$ y $\hat{\varphi}$, usamos sus descomposiciones en versores cartesianos (1). Encontramos que

$$\begin{aligned} \dot{\hat{r}} &= \quad\dot{\varphi}\,\hat{\varphi} \\ \dot{\hat{\varphi}} &= -\dot{\varphi}\,\hat{r} \end{aligned}$$

- Una vez realizado el cálculo de la derivada, usamos nuevamente (1) para recuperar expresiones donde sólo aparezcan versores polares.

$$\mathbf{a}(t) = (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\hat{r} + (r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}\dot{r})\hat{\varphi} \tag{7}$$

2 Caso particular: Movimiento circular

El *movimiento circular*, en el cuál un objeto se traslada manteniéndose siempre a distancia constante de un dado punto P, es un caso en el cuál es particularmente conveniente utilizar coordenadas y versores polares. Ubicando el origen de coordenadas en el centro de la trayectoria, la coordenada r satisface $r = R = cte$, con R el radio de la trayectoria. En este caso, entonces, todas las derivadas de r se anulan, simplificando las expresiones.

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t) &= r\hat{r} \\
\mathbf{v}(t) &= r\,\dot{\varphi}\hat{\varphi} \\
\mathbf{a}(t) &= -r\,\dot{\varphi}^2\hat{r} + r\,\ddot{\varphi}\hat{\varphi}
\end{aligned}$$