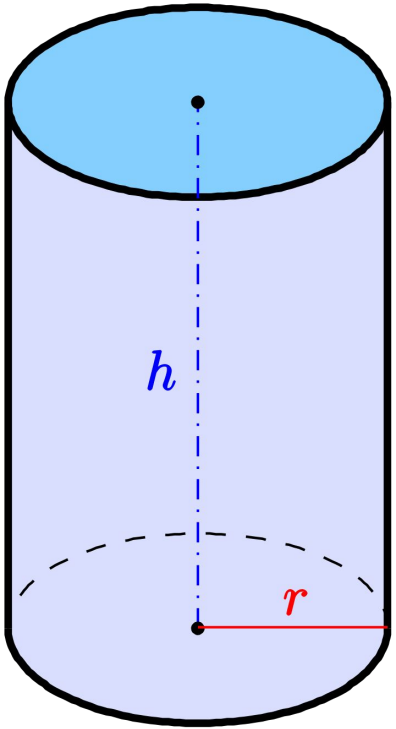
Campo Eléctrico y Potencial

Leandro E Fernández

¡La Barra!

¿Cómo hacemos?



Cálculos de Flujo

$$\Phi_e = \oiint_S \overline{E}.\overline{ds} = \frac{Q}{\epsilon}$$

Este es nuestro *flujo de campo eléctrico*.

Lo que vamos a hacer es calcular la integral sobre una superficie S (que va a ser un cilindro de radio r, no confundir con el radio del cilindro real que esta cargado cuyo radio es R) y luego calcular la Q encerrada por esa superficie (esta integral es en volumen y el volumen encerrado por S lo llamamos V(S)).

Hasta ahora todo es general, bien podría ser un hilo cargado, un plano, una esfera. El único lugar donde utilizamos que tenemos un cilindro macizo cargado es al proponer una superficie cilíndrica.

Cálculos de Flujo

$$\overline{ds} = ds\widehat{r}$$

Al tomar una superficie S, la normal exterior va a ser el versor r de cilíndricas.

$$\overline{r} = r\widehat{r} + z\widehat{z} \rightarrow \overline{r} = r\widehat{r}$$

$$\overline{E}(\overline{r}) = E(r)\widehat{r}$$

Por la simetría (cilindro infinito) que tiene en Z, no puede existir campo en esa dirección. Además, tampoco puede depender de esa variable. Entiéndase que dar vuelta el cilindro o mirarlo más arriba/abajo no cambia en nada a mi problema original.
En cambio, alejarme en r si cambia, pues lo veo mas lejos.

Cálculos de Flujo

$$\oiint_S \overline{E}.\overline{ds} = \oiint_S E(r)\widehat{r}ds\widehat{r} = E(r)\oiint_S ds$$

Integramos en una superficie cilíndrica, por ende, nuestra integral de superficie es a r=cte. Como E solo depende de r, para la integral es como una cte y la puedo sacar de la misma.

$$\oiint_S ds = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r d\theta dz = 2\pi r h$$

Luego nos queda pasar ds a coordenadas cilíndricas y calcular. Nos dará la superficie lateral del cilindro (una sección, el cilindro es infinito pero solo integramos en un pedazo h.

Cálculos de Flujo

Para la carga encerrada, integramos la densidad volumétrica, ¿en qué volumen? en el delimitado por la superficie S.

$$Q = \int_{V(S)} \rho dV = \rho \int_{V(S)} dV$$

Como la densidad es constante, sale de la integral y solo integramos el volumen.
Acá tendremos dos casos, si r<R o si r>R.

Cálculos de Flujo

Si estamos en r<R, la cuenta es una integral en volumen, sin mucho misterio

$$\rho \int_{V(S)} dV = \rho \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dr d\theta dz$$

Pero si nos salimos del cilindro de radio R, separamos la integral. Primero de 0 a R con densidad ρ y de R en adelante, con otra densidad ρ0

$$\rho \int_{V(S)} dV = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dr d\theta dz + \rho_0 \int_R^{R'} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} r dr d\theta dz$$

El truco es que ρ0=0, entonces se anula el segundo término de nuestra ecuación.

E(r):

Las cargas quedan finalmente:

$$Q = \pi r^2 h \rho \qquad 0 < r < R$$

$$Q = \pi R^2 h \rho \qquad R < r$$

Y los campos:

$$\overline{E}(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon}\widehat{r} \qquad 0 < r < R$$

$$\overline{E}(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon r}\widehat{r} \qquad R < r$$

¿Como hago con el Potencial?

$$\boxed{\overline{E} = -\overline{\nabla} V}$$

$$V(r) = -\int_0^r E(r)\widehat{r}.\overline{dl}$$

Al integrar por un camino (dl es diferencial de camino) nos sobrevive la componente en r. En otras palabras, solo cambia mi potencial si me alejo o acerco del eje del cilindro (que llamo r=0).

Primero integramos desde 0 hasta un radio r<R. Uso el campo E que sacamos para r<R.

$$V(\overline{r}) = -\int_0^r \frac{\rho r}{2\varepsilon} dr \longrightarrow V(\overline{r}) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon}$$

¿Y fuera?

$$V(r) = -(\int_0^R E(r)dr + \int_R^r E(r)dr)$$

Acá r debe ser mayor que R. Separamos la integral para poder evaluar el campo dentro y fuera del cilindro cargado.

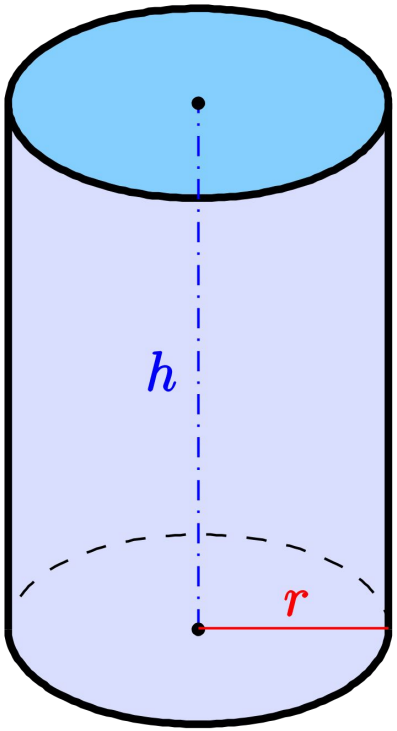
$$V(r) = -(\int_0^R \frac{\rho r}{2\varepsilon}dr + \int_R^r \frac{\rho R^2}{2r\varepsilon}dr)$$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon}ln(R) - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon}ln(r)$$

Finalmente

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{4\varepsilon} \qquad 0 < r < R$$

$$V(r) = -\frac{\rho R^2}{4\varepsilon} + \frac{\rho R^2}{2\varepsilon} ln(R) - \frac{\rho R^2}{2\varepsilon} ln(r) \qquad R < r$$



Dos comentarios finales:

a) El potencial no tiene saltos, en V(r=R) vale lo mismo ambas expresiones.

b) Las superficies equipotenciales son a r=cte. Por ende, deben ser cilindros.