### Ley de Gauss



• Supongamos una distribución de carga  $\rho$  como la de la figura.



- Supongamos una distribución de carga  $\rho$  como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en  $r = r_0$ .



- Supongamos una distribución de carga  $\rho$  como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en  $r = r_0$ .
- Calculemos el campo en todo el espacio aprovechando la Ley de Gauss y la simetría del sistema.



• El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r.



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r.

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$



 Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de *E* vale siempre lo mismo.



- Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de *E* vale siempre lo mismo.
- Si  $E_1$  es el módulo del campo sobre la esfera  $S_1$ de radio  $r_1$ , el flujo será:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{ds} = E_1 \int_{S_1} \hat{r} \cdot \hat{r} \, ds = 4\pi r_1^2 E_1$$



Por la Ley de Gauss  

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga \ encerrada \ por S_1}{\epsilon_0}$$



Por la Ley de Gauss  

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{carga \ encerrada \ por \ S_1}{\epsilon_0}$$

• Por lo tanto

$$E_1 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$





Es como si toda la carga dentro de S<sub>1</sub> estuviese concentrada en el origen



• Análogamente, si  $E_2$  es el módulo del campo sobre la esfera  $S_2$  de radio  $r_2$ 

 $E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$ 



• Análogamente, si  $E_2$  es el módulo del campo sobre la esfera  $S_2$  de radio  $r_2$ 

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

• Depende de cuánta carga encierre  $S_2$ 

 $Carga \ encerrada \ por \ S_2 = \int \rho \ dV$ Volumen
encerrado
Por \ S\_2



• Análogamente, si  $E_2$  es el módulo del campo sobre la esfera  $S_2$  de radio  $r_2$ 

$$E_2 = \frac{carga\ encerrada\ por\ S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

• Depende de cuánta carga encierre  $S_2$ 

 $Carga \ encerrada \ por \ S_2 = \int \rho \ dV$ Volumen
encerrado
Por \ S\_2

• No depende de la carga fuera de S<sub>2</sub> !

Diferencia de Potencial y función potencial en electrostática

### Integral de línea del campo



• Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

### Integral de línea del campo



 Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

• Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo  $\vec{E}$  entre dos puntos P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$
$$C$$

### Diferencia de potencial entre dos puntos

• La diferencia de potencial entre P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub> se define como:

$$\varphi_{21} = -\int_{C} \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

 En campos electrostáticos, esta integral de línea no depende del camino y sólo de las posiciones de P<sub>1</sub> y P<sub>2</sub>:

$$-\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \varphi(\vec{r}_{P2}) - \varphi(\vec{r}_{P1})$$

### Ejemplo: carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$
- Por el Camino A (camino radial desde  $r_1 a r_2 + un arco a r_2$ ) la integral entre  $P_1 y P_2 da$ :

• 
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int \vec{E} \cdot \vec{ds} + \int \vec{E} \cdot \vec{ds}$$
  
Camino A radial

### Ejemplo: carga puntual



• Por el Camino A (camino radial desde  $r_1 a r_2 + un arco a \underline{r_2}$ ) la integral entre  $P_1 y P_2 da ds = dr \hat{r}$ :

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Camino A

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Camino A

### Ejemplo: carga puntual

• Entonces la diferencia de potencial entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$  es para este caso:

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right]$$

• Se puede definir una **función potencial**  $\phi(r)$  si coloco un potencial de referencia común para todo el sistema. Podemos hacerlo en  $r_1 = \infty$  (muy lejos de la distribución) con lo cual:

$$\varphi(r) = -\int_{\infty}^{r} \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

### Superficies equipotenciales

 Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial.

 ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso que acabamos de ver?

#### (a) A single positive charge





### Gradiente del potencial

- Dada una función f(x, y, z) derivable, el vector gradiente  $\vec{\nabla} f$  nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en el punto (x, y, z).
- En cartesianas

$$\vec{\nabla}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

### Gradiente del potencial y campo eléctrico

• La variación de la función potencial en un punto (x, y, z) viene dada por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

• Por otro lado, sabemos que:

$$d\varphi = -\vec{E}\cdot\vec{ds}$$

donde  $\overrightarrow{ds}$  es el diferencial de camino

$$\overrightarrow{ds} = dx\,\hat{x} + dy\,\hat{y} + dz\,\hat{z}$$

• Entonces esto implica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

En electrostática, el campo eléctrico es conservativo y se define como menos el gradiente del potencial

# Potencial de una distribución (acotada) de cargas

### Diferencia de potencial para N cargas

 De manera análoga, para un sistema de N cargas q<sub>1</sub>...q<sub>N</sub> y por <u>el</u> principio de superposición.

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds} = -\int_{P_1}^{P_2} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N) \cdot \vec{ds}$$
$$= -\int_{P_1}^{P_2^{-1}} \vec{E}_1 \cdot \vec{ds} - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_2 \cdot \vec{ds} - \dots - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_N \cdot \vec{ds}$$

• Centrándonos en cada carga:

$$\varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \left[ \frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r_{1i}} \right]$$

 $r_{1i}$ : distancia de  $q_i$  a P<sub>1</sub>  $r_{2i}$ : distancia de  $q_i$  a P<sub>2</sub>

### Función potencial para N cargas

• Si la distribución es acotada en el espacio puedo poner como punto de potencial cero el infinito y entonces

$$\phi(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}$$

r<sub>i</sub>: distancia desde cada q<sub>i</sub> al punto de evaluación del potencial



Electric field lines — Cross sections of equipotential surfaces

## Potencial de una distribución contínua y acotada de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.
- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos (r=∞) y con valor cero.
- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

## Potencial de una distribución contínua y acotada de carga



• La contribución de un pedacito de carga p(x', y', z')dx'dy'dz' al potencial en x, y, z es: dq(x', y', z')

$$d\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

## Potencial de una distribución contínua y acotada de carga



 $(y')^{2+(z-\overline{z'})^{2}}$  • La contribución de un pedacito de carga  $\rho(x',y',z')dx'dy'dz'$  al potencial en x, y, z es:

$$d\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(x', y', z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$

• Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$



- Distribución acotada 🗸
  - Radio a
  - Grosor despreciable

• 
$$\sigma = constante \left(\frac{c}{m^2}\right)$$



- Distribución acotada 🗸
  - Radio a
  - Grosor despreciable

• 
$$\sigma = constante \left(\frac{c}{m^2}\right)$$

 Calculemos el potencial en el punto P<sub>1</sub> sobre el eje de simetría y.

 $dq = \sigma \, dA$  $dA = 2\pi s \, ds$ 

(*dA* área de un anillo de radio *s* y ancho *ds*).



- La distancia del anillo al  $P_1$  (0, y, 0) es:  $\sqrt{y^2 + s^2}$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\phi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$



- La distancia del anillo al  $P_1$  (0, y, 0) es:  $\sqrt{y^2 + s^2}$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{\sigma \,2\pi s \,ds}{\sqrt{y^2+s^2}}$$



La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2s \, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} =$$
$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

El problema es simétrico respecto a y = 0

### El potencial lejos de una distribución

 Volvamos al caso de un disco uniformemente cargado. El potencial a lo largo del eje de simetría daba:

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[ \sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

Nos interesa saber a qué se parece el potencial a distancias grandes.
 Para |y| >> a podemos aproximar por serie de Taylor el término:

$$\sqrt{y^2 + a^2} - y = y \left[ \sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1 \right]$$
$$= y \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{y^2} \right) \cdots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y}$$

### El potencial lejos de una distribución

• Reemplazando la aproximación, tenemos

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\varepsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 y} \text{ para } y \gg a$$

$$( ) \qquad ( )$$

 Un átomo o molecula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10<sup>-24</sup> cm.

 ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?



• Supongamos una distribución de cargas acotada  $\rho(x', y', z')$  y un punto  $\vec{r}$  exterior a  $\rho$ .

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')dV'}{R}$$

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra



- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

• Supongamos una distribución de cargas acotada  $\rho(x', y', z')$  y un punto  $\vec{r}$  exterior a  $\rho$ .

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x', y', z')dV'}{R}$$

 Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}$$





La idea es ver qué pasa cuando r >> r'.
 Veamos un poco el factor 1/R:

$$[r^{2} + r'^{2} - 2rr'\cos\theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^{2}}{r^{2}} - \frac{2r'}{r}\cos\theta\right)\right]^{-1/2}$$

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra



La idea es ver qué pasa cuando r >> r'.
 Veamos un poco el factor 1/R:

$$[r^{2} + r'^{2} - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[ 1 + \left( \frac{r'^{2}}{r^{2}} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

 Podemos hacer el desarrollo en Taylor de 1/R para r'/r << 1. Tomando el desarrollo</li>

$$(1+\delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \dots$$
 para  $\delta \ll 1$ 

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra



Tomando esta expansión el factor 1/R queda:

 $= \frac{1}{r} \left[ 1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \left( \frac{\text{términos de}}{\text{grado superior}} \right) \right]$ 

más grande >>>>>> más chico

• Entonces, reemplazando en  $arphi(ec{r})$ 

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho \, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 (3\cos^2 \theta - 1)\rho \, dv'}_{K_2} + \cdots$$

- En negro, lo que no se integra
- En rojo, lo que sí se integra

• Entonces  $\varphi(\vec{r})$  lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de 1/r)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho \, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 (3\cos^2 \theta - 1)\rho \, dv'}_{K_2} + \cdots$$

 La clave es calcular los coeficientes K<sub>0</sub>, K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub>, etc. Cada término se denomina momento.



 La clave es calcular los coeficientes K<sub>0</sub>, K<sub>1</sub>, K<sub>2</sub>, etc. Cada término se denomina momento.

- ¿Hace falta calcular todos los K<sub>i</sub>?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el <u>primer término no nulo</u> de la serie:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots \right]$$

### Los coeficientes K<sub>0</sub> y K<sub>1</sub>

- $K_0 = \int \rho \, dv'$  es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros)
- ¿Cuánto vale K<sub>0</sub> para en cada una de estas distribuciones ?





#### FIGURE 10.4

Some charge distributions with  $K_0 = 0$ ,  $K_0 \neq 0$ . That is, each has net charge zero, but nonzero dipole moment.



### Los coeficientes K<sub>0</sub> y K<sub>1</sub>

- Si  $K_0 = 0$ , calcularemos  $K_1 = \int r' \cos \theta \rho \, d\nu'$
- Para simplificar esta expresión consideremos el vector

$$\vec{p} = \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv'$$
 Momento dipolar

- Usando  $\vec{p}$ , tenemos:  $\hat{r} \cdot \vec{p} = \hat{r} \cdot \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int \hat{r} \cdot \vec{r'} \rho(x', y', z') dv' = \int r' \cos \theta \rho(x', y', z') dv' = K_1$
- Por lo tanto:  $K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p}$

#### Los coeficientes K<sub>0</sub> y K<sub>1</sub>

• Resumiendo, para un punto A en dirección  $\hat{r}$  y a una distancia r de una distribución acotada  $\rho(x', y', z')$ , el potencial viene dado por:

$$\varphi_A = \frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \cdots.$$

• Donde  $Q = K_0 = \int \rho \, dv'$  y  $\vec{p} = \int \vec{r'} \rho(x', y', z') dv'$ 

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



### Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo





- Calculemos el campo  $\vec{E}$  $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$
- Tanto el potencial como el campo son simétricos alrededor del eje  $\hat{z}$ .
- Podemos calcular el potencial en cartesianas en algún plano que contenga al eje z. Por ejemplo el plano xz



• En el plano xz, tenemos  $\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}$ 

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

• Entonces, en el plano xz el potencial en cartesianas se escribe:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$



• Calculemos el campo en el plano xz

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}\right]$$

- Sabiendo además que sin  $\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$
- En el plano xz,  $E_y = 0$  y entonces:

$$E_{x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{3pxz}{(x^{2} + z^{2})^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{3p \, \mathrm{sen} \, \theta \, \mathrm{cos} \, \theta}{r^{3}}$$

$$E_{z} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} p \left[ \frac{3z^{2}}{(x^{2} + z^{2})^{5/2}} - \frac{1}{(x^{2} + z^{2})^{3/2}} \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_{0}} \frac{p(3 \, \mathrm{cos}^{2} \, \theta - 1)}{r^{3}}$$

### Dipolos moleculares / atómicos

• Permanentes (moleculares): elementos de distintas electronegatividades.



 Inducidos: Deformaciones del átomo o molécula debido a un campo externo

