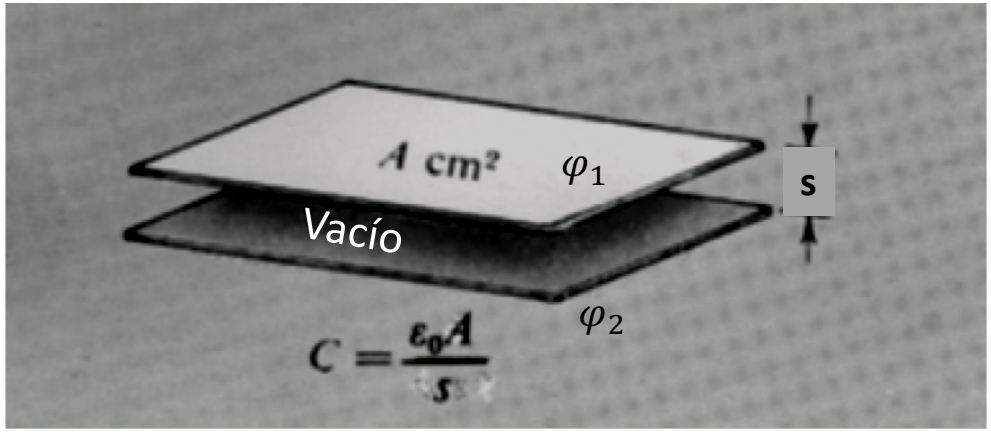
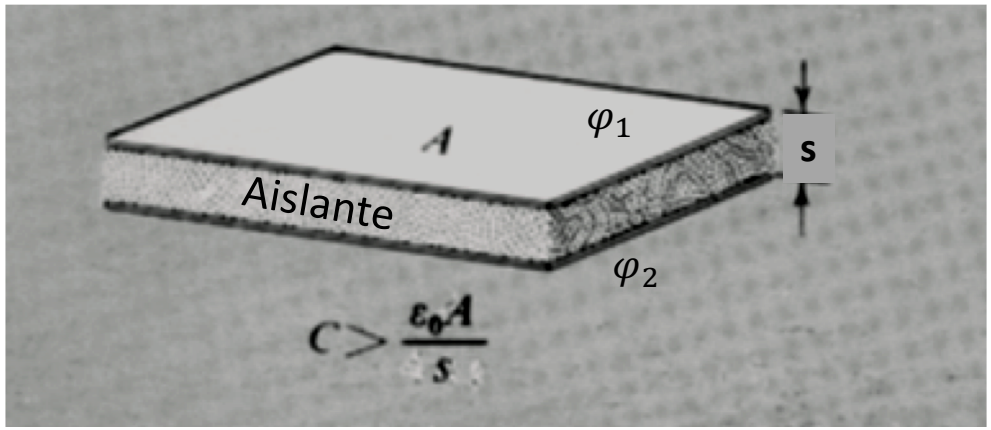
Experiencia con condensadores en vacío y con dieléctricos



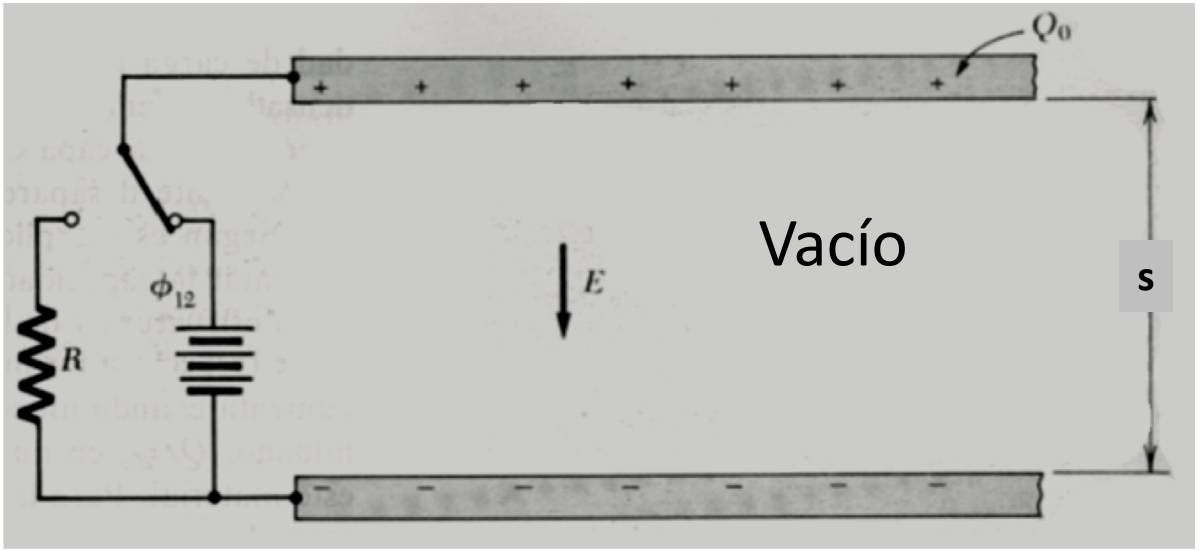


- En el vacío: dos conductores aislados uno del otro. Para uno plano:

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 A}{s}$$

- Cuando metemos un material aislante entre las placas, **manteniendo la diferencia de potencial**, tenemos una capacidad mayor.

- **Esto se debe a una mayor cantidad de carga en las placas.**



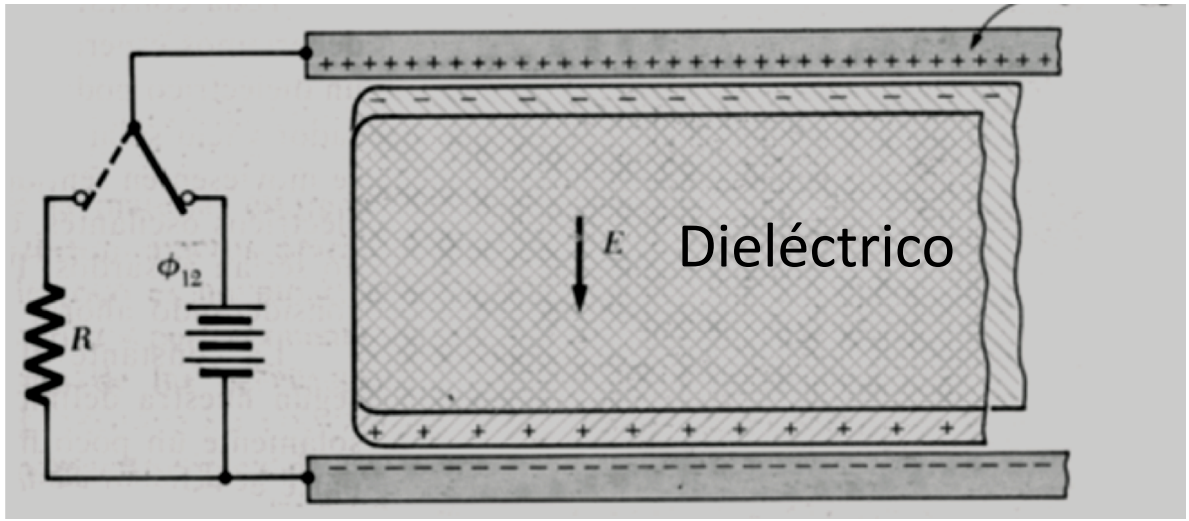
La batería mantiene la diferencia de potencial φ_{12}. Con una carga Q_0, tenemos:

$$Q_0 = C_0\varphi_{12}$$

El campo eléctrico desplaza en el aislante las cargas positivas hacia abajo y las negativas hacia arriba. Capas no compensadas se ubican junto a las placas. En las placas hay ahora una carga mayor

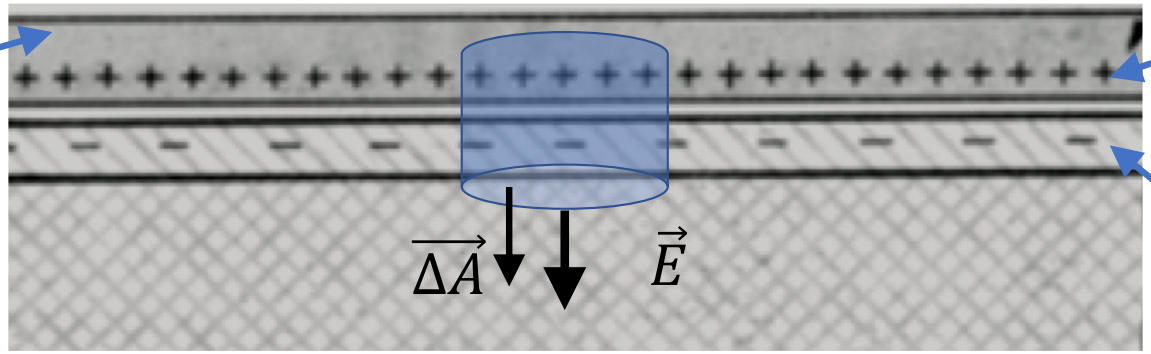
$$Q = \kappa Q_0 \quad \kappa > 1$$

$Q = \kappa Q_0$



Cargas libres y de polarización

- En el vacío, el campo es $E = \frac{\varphi_{12}}{s}$
- Cuando metemos el dieléctrico, en todo el espacio, la diferencia de potencial es la misma (por acción de la batería) y la distancia es la misma con lo cual E no cambia.
- Esto quiere decir que la carga en el conductor Q, más la carga en el borde contiguo del dieléctrico tiene que ser igual a Q_0.



Cargas libres y de polarización

- Entonces definiendo $\kappa > 1$ tal que $Q = \kappa Q_0$, la carga en el borde contíguo del dieléctrico es

$$Q' = -(\kappa Q_0 - Q_0) = (1 - \kappa) Q_0$$

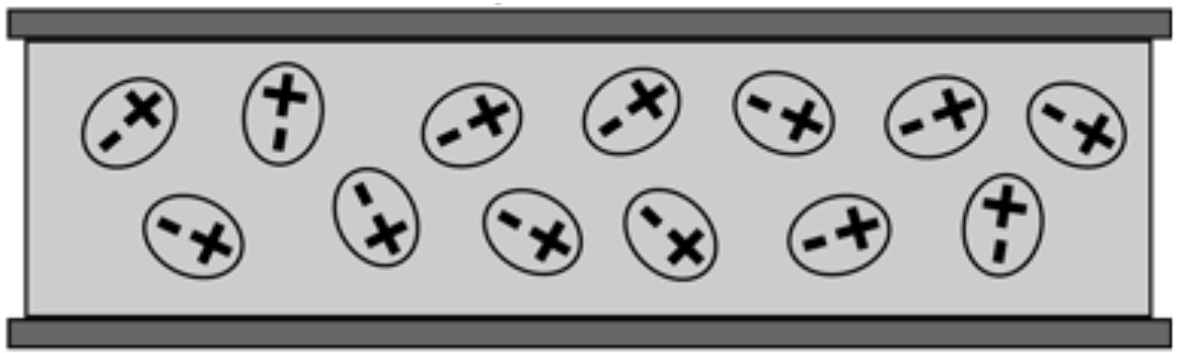
- κ es la **constante dieléctrica**

Tabla 10.1 Constantes dieléctricas de varias substancias κ

Substancia	*Condiciones*	*Constante dieléctrica*
Aire	Gas, 0° C, 1 atm	1,00059
Metano	Gas, 0° C, 1 atm	1,00088
Ácido clorhídrico, HCl	Gas, 0° C, 1 atm	1,0046
Agua H_2O	Gas, 110° C, 1 atm	1,0126
	Líquido, 20° C	80
Benceno, C_6H_6	Líquido, 20° C	2,28
Metanol CH_3OH	Líquido, 20° C	33,6
Amoníaco, NH_3	Líquido, — 34° C	22
Aceite de transformador	Líquido, 20° C	2,24
Cloruro sódico, NaCl	Cristal, 20° C	6,12
Azufre, S	Sólido, 20° C	4,0
Silicio, Si	Sólido, 20° C	11.7
Polietileno	Sólido, 20° C	2,25-2,3
Porcelana	Sólido, 20° C	6,0-8,0
Cera de parafina	Sólido, 20° C	2,1-2,5
Vidrio pyrex 7070	Sólido, 20° C	4,00

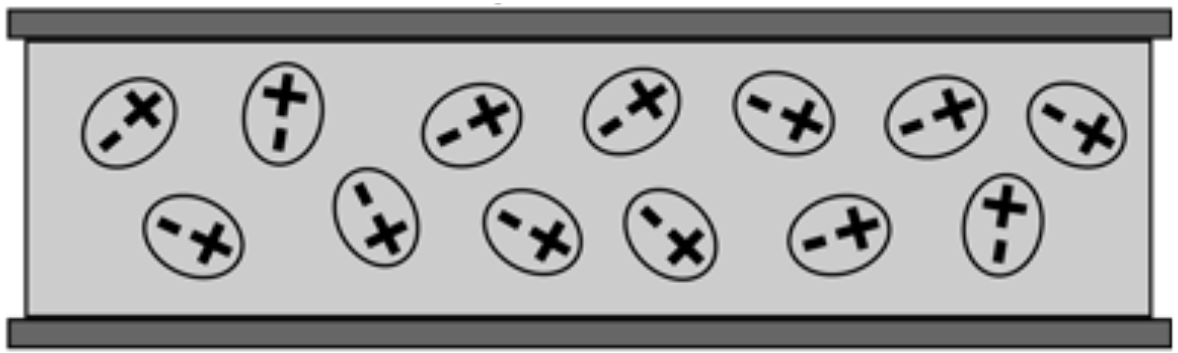
Origen de la respuesta dieléctrica

Moléculas
dipolares permanentes o
inducidas orientadas
desordenadamente

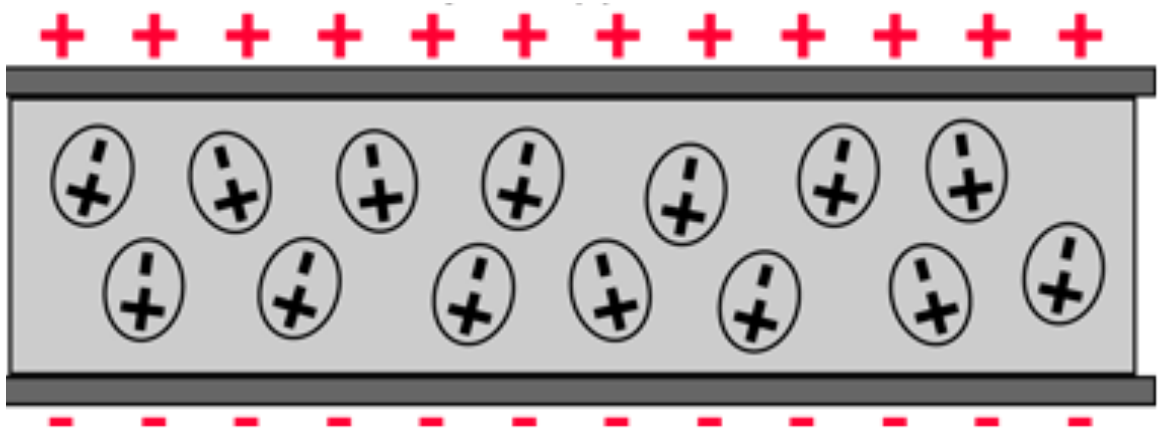


Origen de la respuesta dieléctrica

Moléculas
dipolares permanentes o
inducidas orientadas
desordenadamente

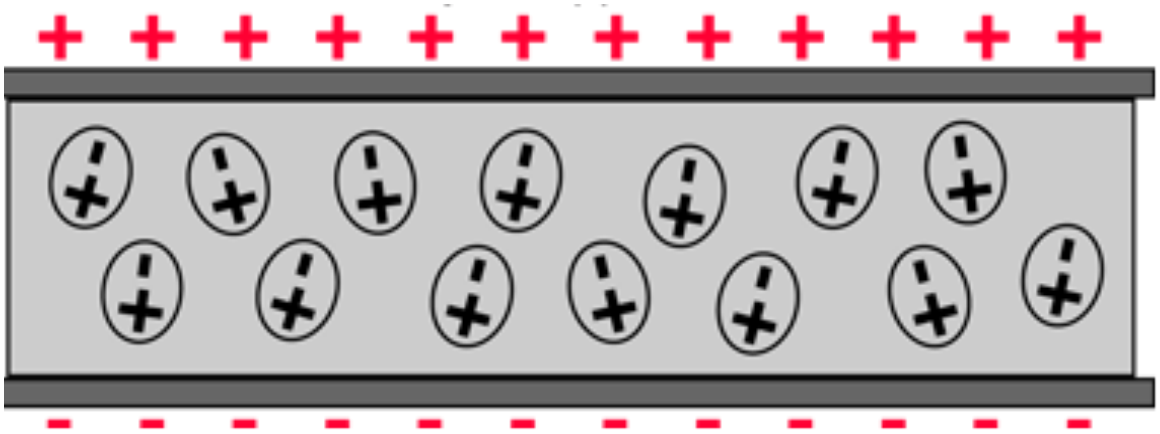


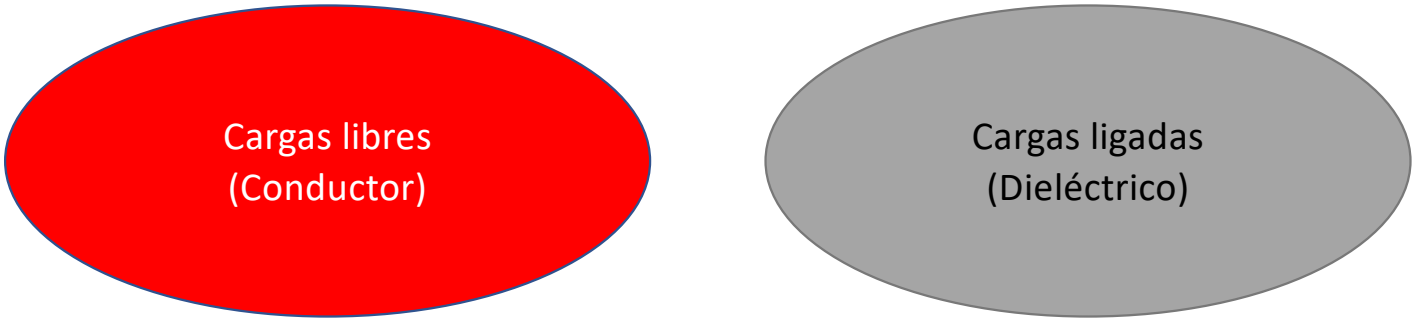
La presencia de un
campo externo
orienta los dipolos



Origen de la respuesta dieléctrica

Cuando el dieléctrico está polarizado, en frente a las cargas libres del conductor se acomodan ‘cargas ligadas’ del dielectrico opuestas en signo





Ley de Gauss para Dieléctricos

- Para dieléctricos lineales vamos a definir el campo $\vec{D}$ tal que

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \kappa \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

- Donde $\varepsilon = \varepsilon_0 \kappa \geq \varepsilon_0$

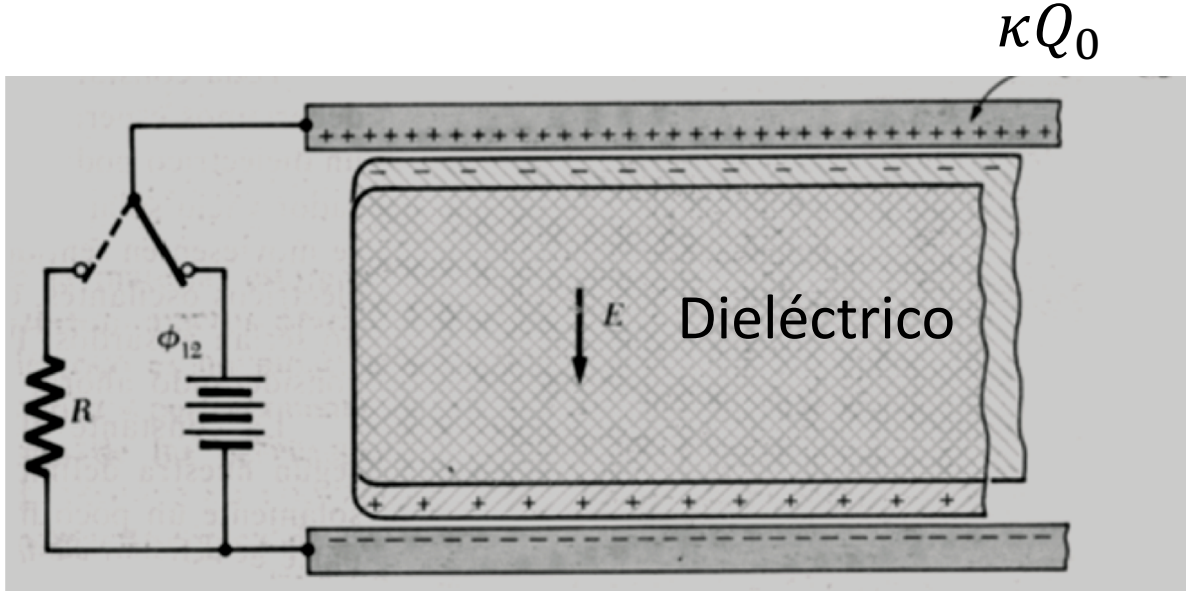
- Entonces la **Ley de Gauss para dieléctricos lineales** dada una superficie cerrada S que encierra un volumen V:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = \iiint_V \rho_{libre}\, dV$$

¡Solo cuenta la carga libre!

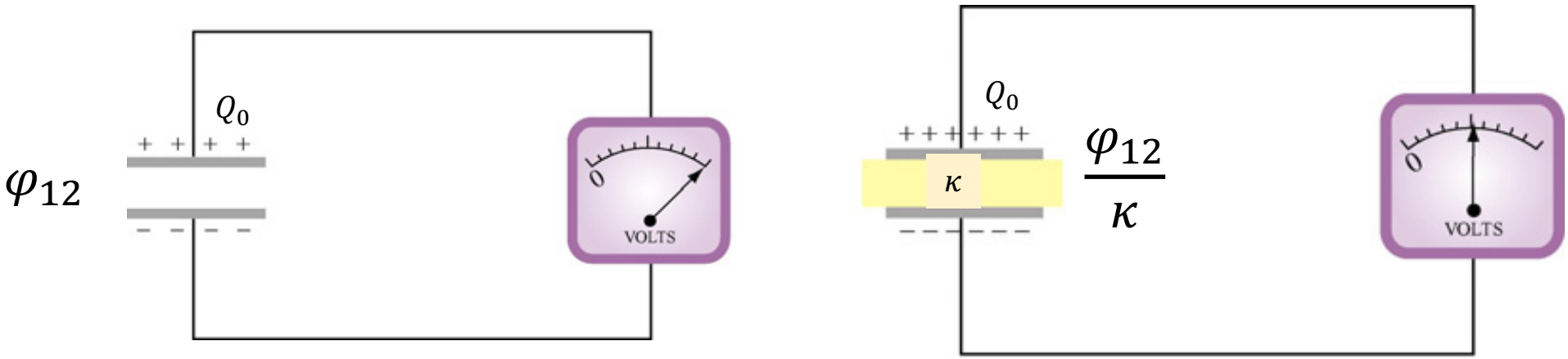
Dieléctrico en capacitor a potencial constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ llenando el espacio entre placas a potencial constante φ_{12}
- La carga en el conductor aumenta un factor κ.
- Al mantenerse el potencial en φ_{12}, la capacidad aumenta a κC.
- El campo total $E = \varphi_{12}/s$ en el dieléctrico no cambia



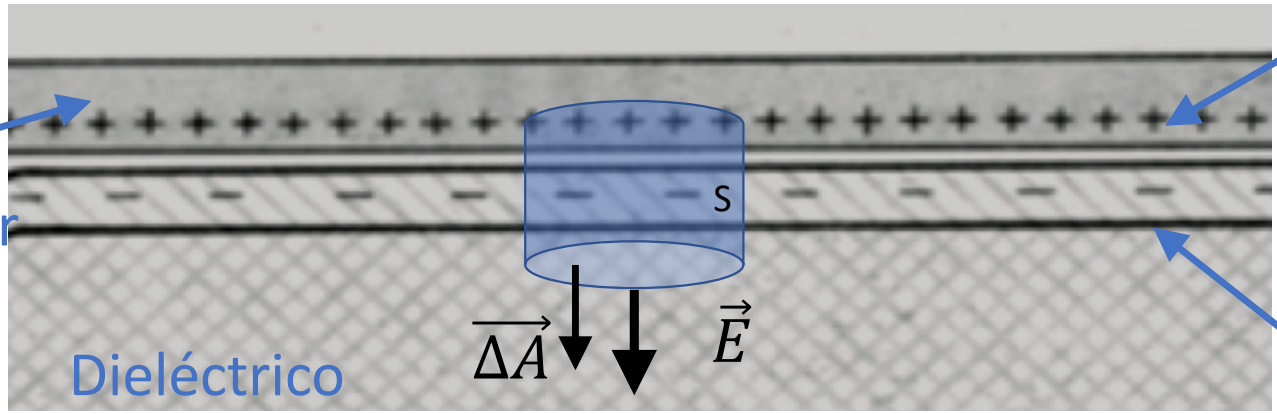
Dieléctricos en capacitor a carga constante

- Colocamos un dieléctrico de constante κ manteniendo la carga Q_0.
- Experimentalmente se ve que el potencial cae a $\frac{\varphi_{12}}{\kappa}$, con lo cual, el campo cae a $\frac{\varphi_{12}}{s\kappa}$.
- La capacidad aumenta a κC.



Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)

$\vec{E} = 0$
en el conductor



$\frac{Q_0}{A} = \sigma_0$
en el borde del conductor

$-\frac{Q_P}{A} = -\sigma_P$
en el borde del dieléctrico

Aplicamos Gauss para Dieléctricos

$$\oiint_S \varepsilon \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \varepsilon \vec{E} \cdot \overrightarrow{\Delta A} = \varepsilon E \Delta A = \iiint \rho_{libre} dV = Q_0 \frac{1}{A} \Delta A$$

Dieléctricos en capacitor a carga constante (sin batería)

- Simplificando, tenemos $E = \frac{Q_0}{\varepsilon A} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \kappa A}$
- Para el caso sin dieléctrico el campo vale $E\kappa = \frac{Q_0}{\epsilon_0 A}$
- Entonces, juntando esta última expresión para E con $E = \frac{Q_0 - Q_P}{\varepsilon_0 A}$ tenemos:

$$\frac{Q_0}{\kappa \varepsilon_0 A} = \frac{Q_0 - Q_P}{\varepsilon_0 A} \Longrightarrow \frac{Q_0}{\kappa} = Q_0 - Q_P$$

- con lo cual la carga de polarización es

$$Q_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] Q_0, \text{ ó } \sigma_P = \left[1 - \frac{1}{\kappa}\right] \sigma_0$$

Energía en capacitores con dieléctricos

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico

- La energía almacenada en un capacitor venía dada por:

$$U = \frac{1}{2} C \varphi_{12}^2 = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

- Al colocar un dieléctrico, se espera que esta cantidad cambie:
  - A potencial constante
  - A carga constante

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (con batería)

- Supongamos un capacitor de capacidad inicial C_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante κ>1, manteniendo el potencial constante.
- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta V_i^2$$

- A un valor final

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta V_i^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \Delta V_i^2 > U_i$$

Pregunta

- ¿De donde sale la energía que ingresa al sistema al colocar el dieléctrico a voltaje constante?

Energía almacenada en un capacitor con dielectrico (sin batería)

- Sea un capacitor de capacidad inicial C_i y diferencia de potencial ΔV_i que llenamos completamente con un dieléctrico de constante κ>1, manteniendo la carga constante.
- La energía pasa de un valor inicial

$$U_i = \frac{1}{2} C_i \Delta V_i^2$$

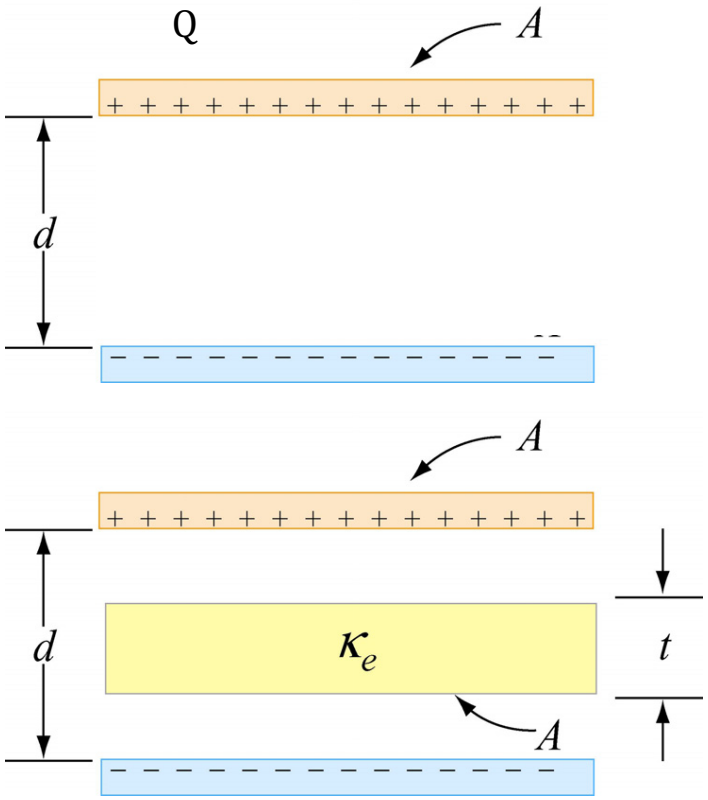
- A un valor final donde $C_f = \kappa C_i$ y $\Delta V_f = \frac{\Delta V_i}{\kappa}$

$$U_f = \frac{1}{2} C_f \Delta V_f^2 = \frac{1}{2} \kappa C_i \left[\frac{\Delta V_i}{\kappa}\right]^2 = \frac{U_i}{\kappa} < U_i$$

Pregunta

- ¿A dónde va la energía que ya no está en el estado final?

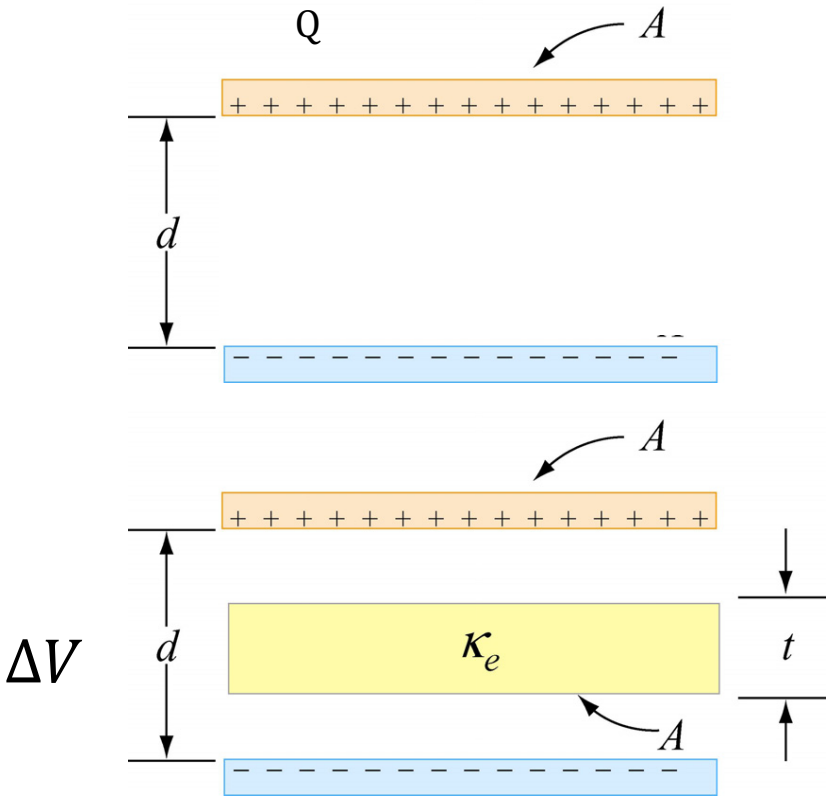
Capacitores con dieléctricos (1)



- Dado un capacitor plano de área *A* y espesor *d*, metemos un dieléctrico de constante κ_e y espesor $t < d$.
- La carga Q en el conductor permanece constante.
- Queremos ver cómo cambia la capacidad.
- Inicialmente, la capacidad es:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



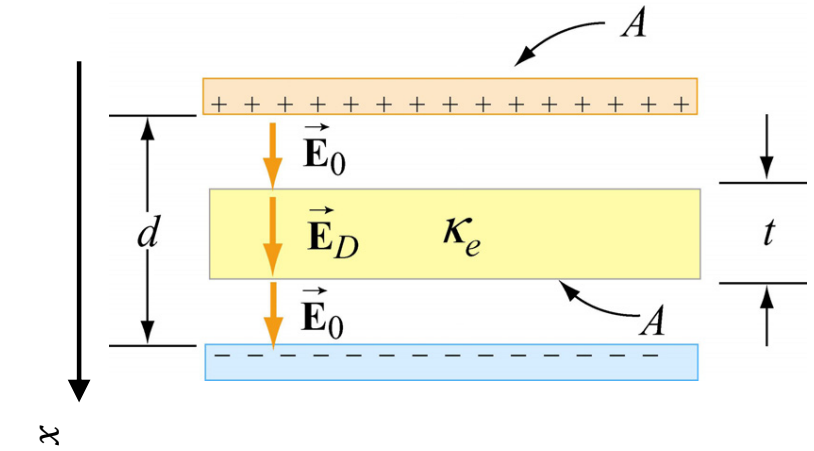
- La capacidad del capacitor con el dieléctrico vendrá dada por

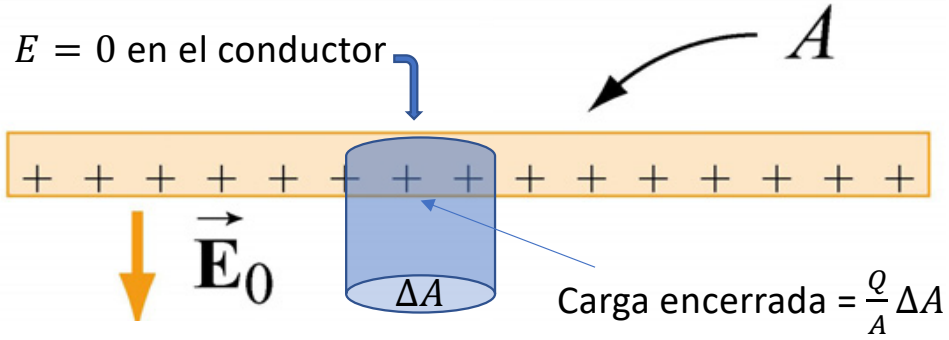
$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

donde ΔV es la diferencia de potencial entre las placas una vez que metimos el dieléctrico.

- Como Q no varía, sólo tenemos que calcular ΔV.

Capacitores con dieléctricos (1)



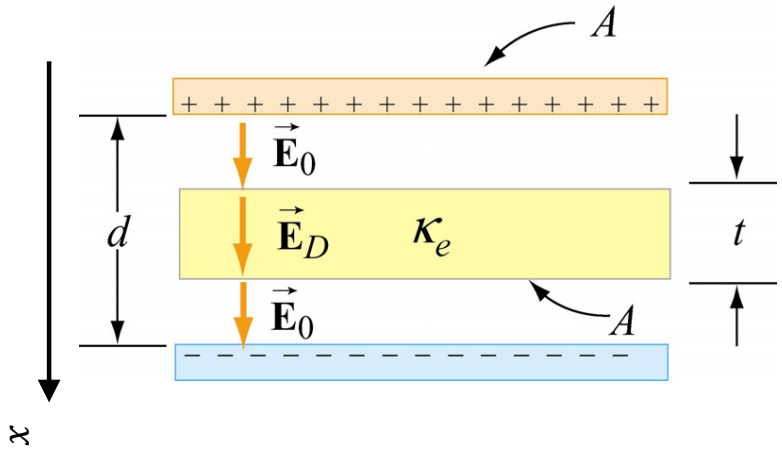


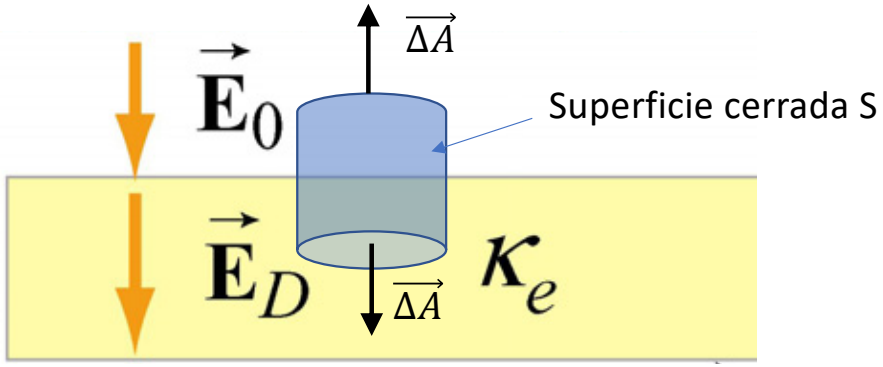
- Calculemos entonces el campo en el espacio entre las placas.
- Por ley de Gauss, En la capa de vacío de arriba el campo es simplemente

$$E_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0} \text{ o } \vec{E}_0 = \frac{Q}{A\epsilon_0}\hat{x}$$

- En la capa de vacío de abajo, el valor del campo es el mismo.

Capacitores con dieléctricos (1)





- Para el campo $\vec{E}_D$ en el dieléctrico usemos la ley de Gauss para dieléctricos:

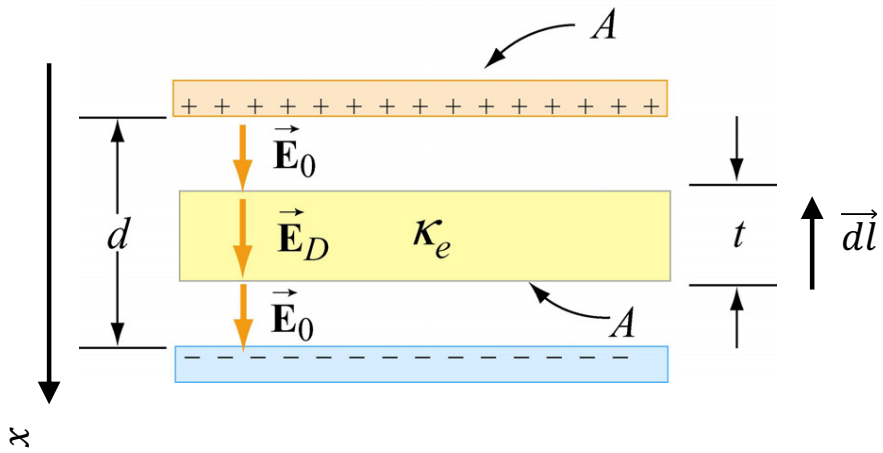
$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$ (no hay cargas libres)

$$\epsilon E_D \Delta A - \epsilon_0 E_0 \Delta A = 0$$

entonces como $\epsilon = \kappa_e \, \epsilon_0$

$$\vec{E}_D = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_e}$$

Capacitores con dieléctricos (1)



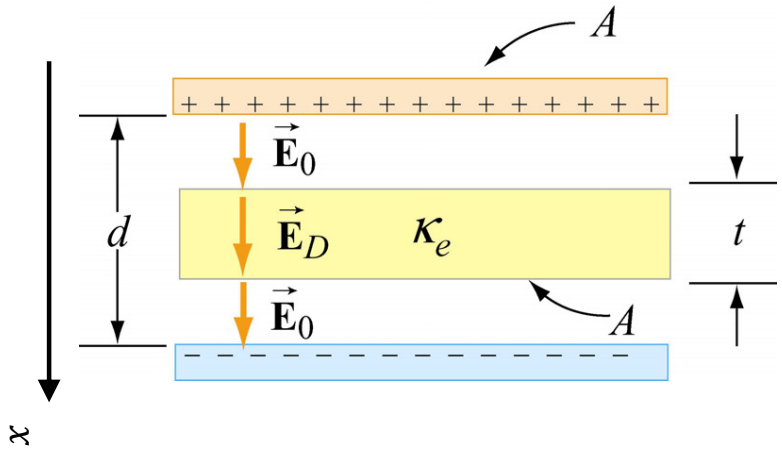
- La diferencia de potencial entre las placas es

$$\Delta V = -\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot \vec{dl}$$

- la integral de camino da:

$$\Delta V = E_0(d-t) + E_D\, t$$
$$= \frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}\, t$$

Capacitores con dieléctricos (1)



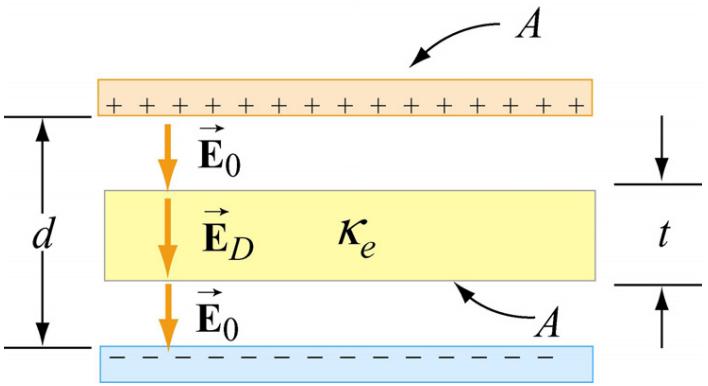
- Calculemos ahora la capacidad del capacitor con el dieléctrico:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{A\epsilon_0}(d-t) + \frac{Q}{A\kappa_e\epsilon_0}t}$$

- simplificamos y reacomodamos el denominador

$$C = \frac{1}{\frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}}$$

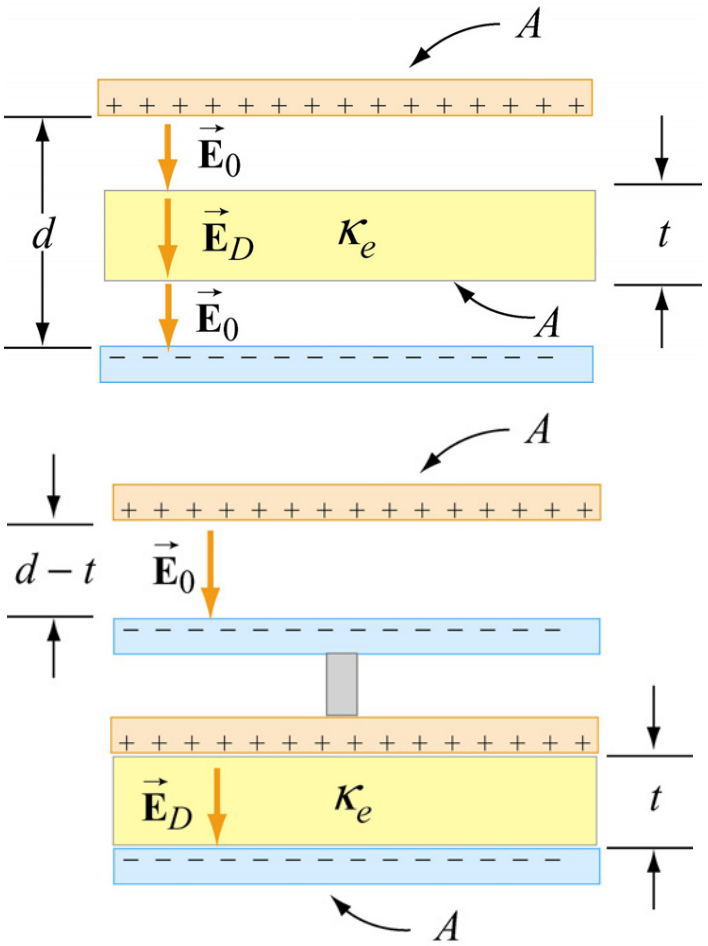
Capacitores con dieléctricos (1)



- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (1)

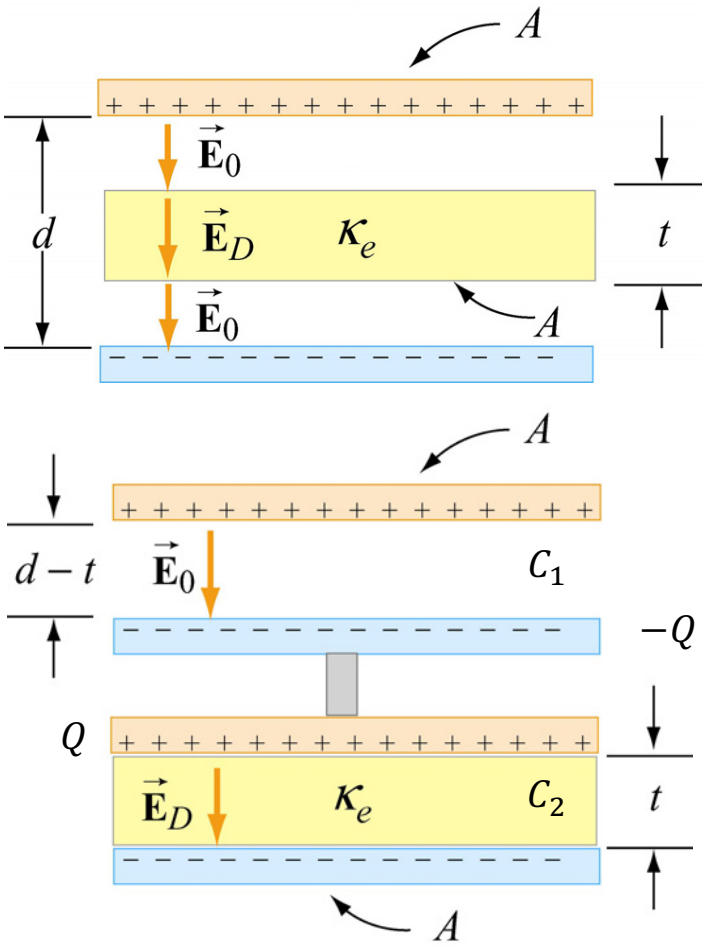


- Invirtiendo C tenemos:

$$\frac{1}{C} = \frac{d-t}{A\epsilon_0} + \frac{t}{A\kappa_e\epsilon_0}$$

- Esto es la suma de las inversas de las capacidades de un capacitor en el vacío de espesor $d - t$ y de otro con dieléctrico de espesor t, ambos con carga Q.

Capacitores con dieléctricos (1)



- En otras palabras:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Los capacitores tienen un conductor en común que es un equipotencial, de un lado tiene carga Q del otro $-Q$.

- Esta configuración se denomina *'en serie'*

Capacitores en serie

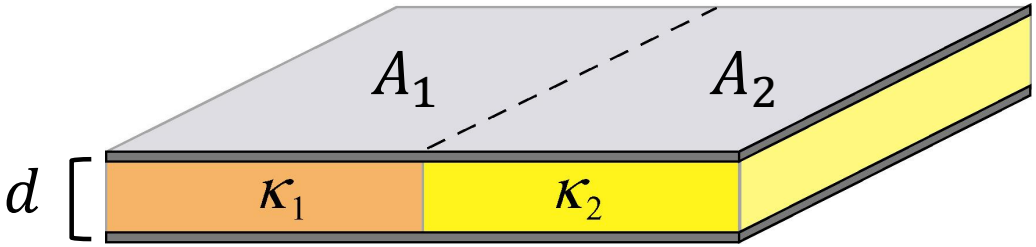
- El resultado anterior:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

- Puede extenderse a los capacitores en el vacío trivialmente ($\kappa_e = 1$) y a un número arbitrario de capacitores en serie.

$$\frac{1}{C_{Tot}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_{N-1}} + \frac{1}{C_N}$$

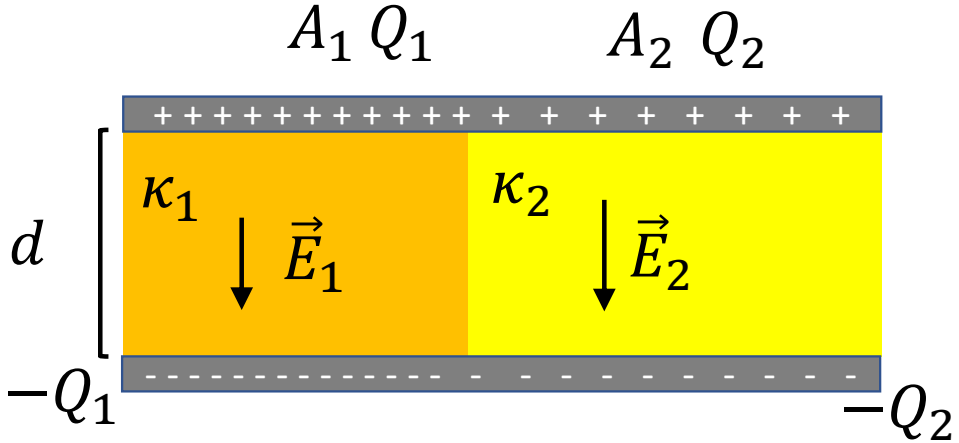
Capacitores con dieléctricos (2)



- Supongamos ahora un capacitor de área A y espesor d pequeño con carga Q, y diferencia de potencial ΔV.

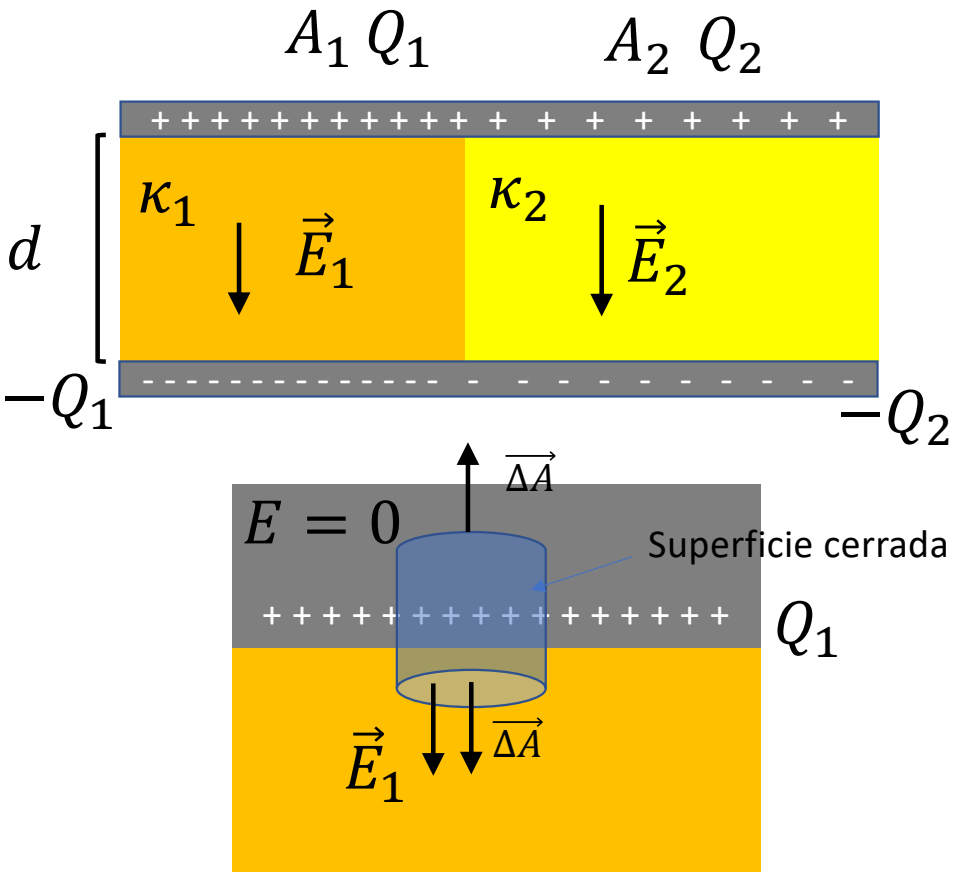
- Se llena todo el espacio entre placas con dos dieléctricos de constantes κ_1 y κ_2 de áreas $A_1 + A_2 = A$.

Capacitores con dieléctricos (2)



- La superficie de cada conductor es una equipotencial.
- Por lo tanto la diferencia de potencial para cada dieléctrico es la misma
- Vamos a permitir que la carga total en cada placa se redistribuya sobre cada dieléctrico $Q = Q_1 + Q_2$.

Capacitores con dieléctricos (2)



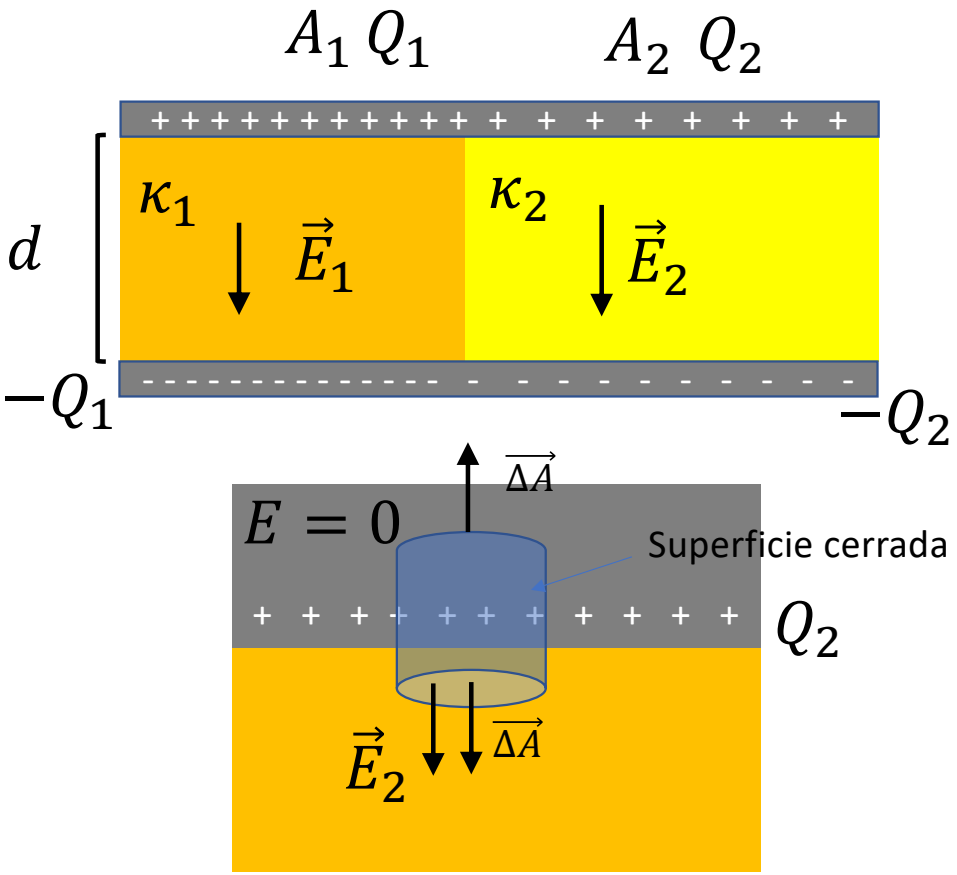
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = carga\ libre\ encerrada$$

$$\kappa_1 \epsilon_0 E_1 \Delta A = \frac{Q_1}{A_1} \Delta A$$

$$E_1 = \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



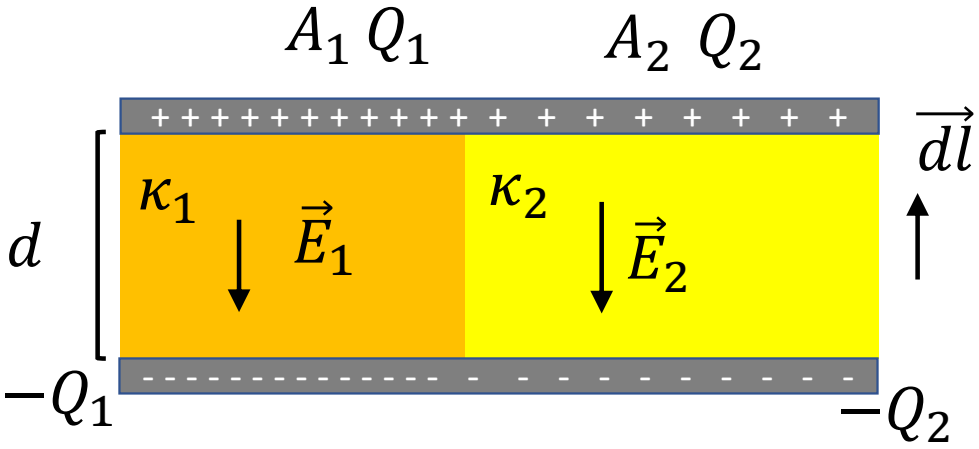
- Por Ley de Gauss para dieléctricos

$$\int_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{da} = carga\ libre\ encerrada$$

$$\kappa_2 \epsilon_0 E_2 \Delta A = \frac{Q_2}{A_2} \Delta A$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)



- Como la diferencia de potencial es la misma para ambos dieléctricos

$$-\int_{-}^{+} \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{-}^{+} \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$\Delta V = E_1 d = E_2 d$$

$$\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0} = \frac{Q_2 d}{A_2 \kappa_2 \epsilon_0}$$

Capacitores con dieléctricos (2)

- De la cuenta anterior:

$$Q_2 = A_2 \kappa_2 \frac{Q_1}{A_1 \kappa_1}$$

- Entonces, la capacidad total es

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + Q_2}{\frac{Q_1 d}{A_1 \kappa_1 \epsilon_0}}$$

- Reemplazando Q_2 tenemos

Capacitores con dieléctricos (2)

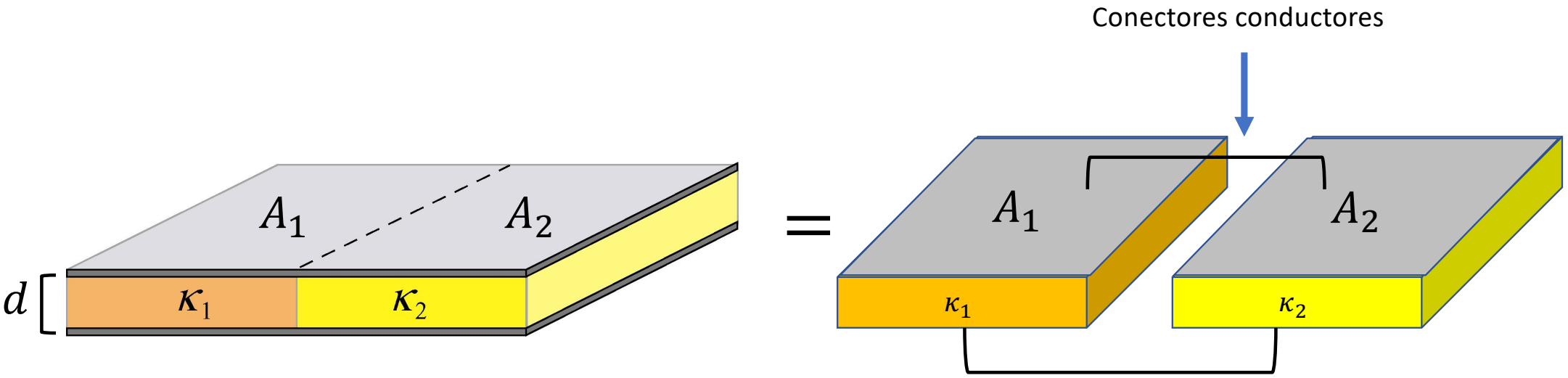
- Reemplazando Q_2 tenemos

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q_1 + A_2\kappa_2\frac{Q_1}{A_1\kappa_1}}{\frac{Q_1 d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}}$$

- Entonces

$$C = \frac{1 + A_2\kappa_2\frac{1}{A_1\kappa_1}}{\frac{d}{A_1\kappa_1\epsilon_0}} = \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0 + A_2\kappa_2\frac{A_1\kappa_1\epsilon_0}{A_1\kappa_1}}{d} = \frac{A_1\kappa_1\epsilon_0}{d} + \frac{A_2\kappa_2\epsilon_0}{d}$$

Capacitores en paralelo



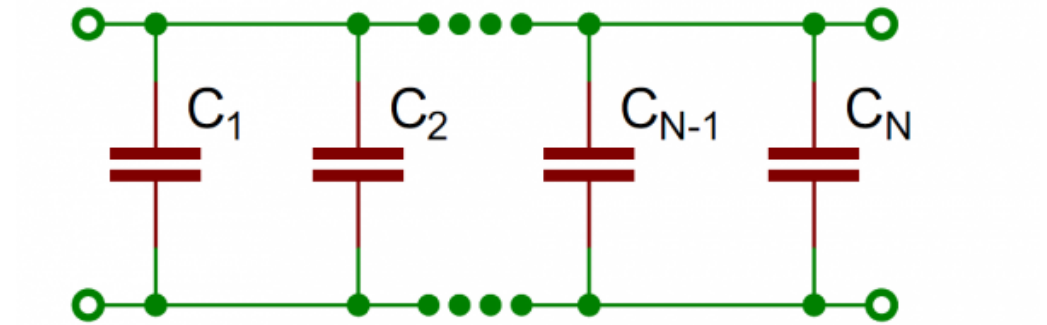
$$C = C_1 + C_2$$

Capacitores en paralelo

- Entonces, en general, la capacidad equivalente C de dos capacitores 'en paralelo' (C_1 y C_2) tenemos:

$$C = C_1 + C_2$$

- Extendido a N capacitores

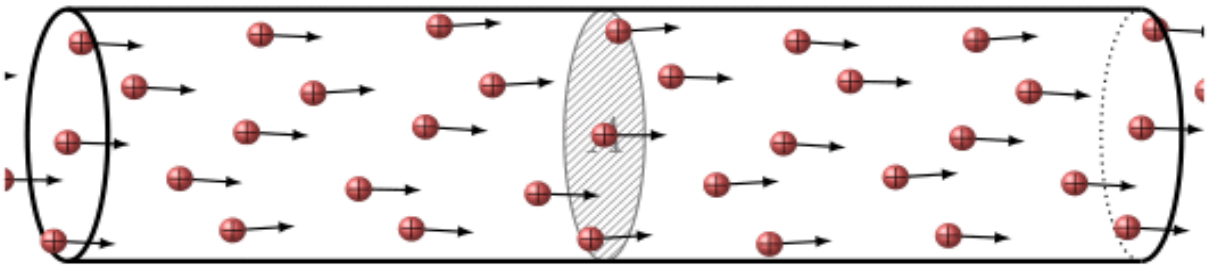


$$C_{Tot} = C_1 + C_2 + \ldots + C_{N-1} + C_N$$

Corrientes estacionarias en conductores – Ley de Ohm

Corriente eléctrica

- Carga en movimiento

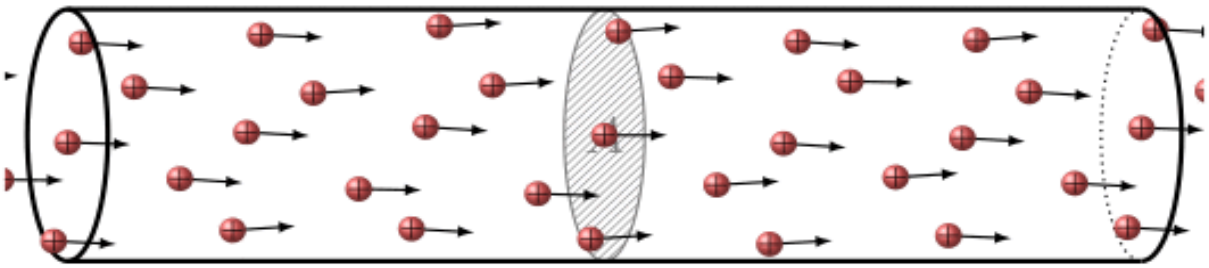


- La corriente I por un conductor es la cantidad de carga que atraviesa la sección transversal en un punto fijo por unidad de tiempo.

- Se expresa en Ampères: A = C/s

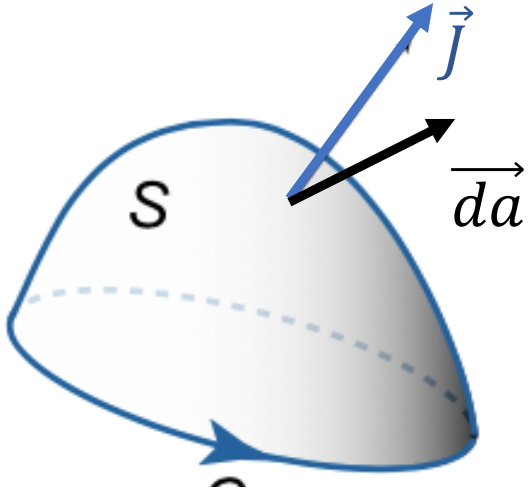
Corriente eléctrica y densidad de corriente

- Carga en movimiento



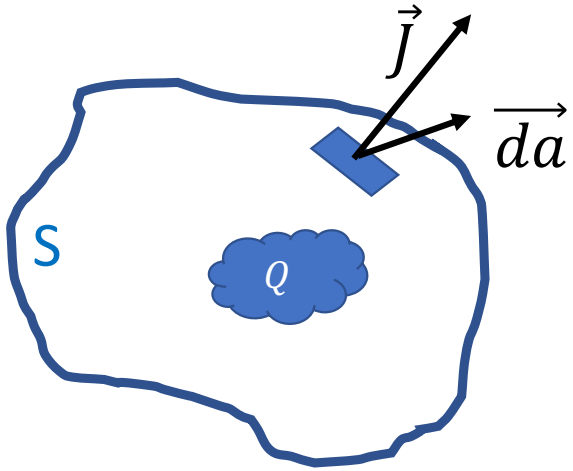
- J es la densidad superficial de corriente $J = \frac{I}{A}$ y se expresa en A/m^2
- A través de una superficie *S* cualquiera, la corriente es el flujo del vector densidad de corriente

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da}$$



Densidad de corriente y conservación de la carga

- Ahora supongamos una superficie cerrada S la cual encierra una carga encerrada Q.



- Entonces la conservación de la carga se expresa como:

$$\oiint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{da} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$$

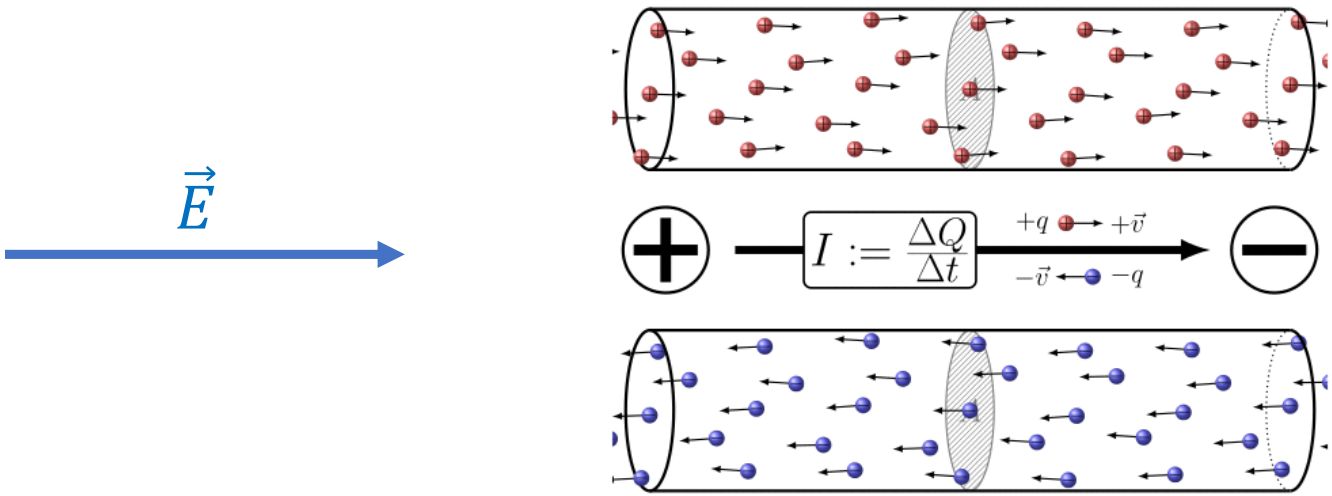
Corriente estacionaria y conservación de la carga

- Una corriente estacionaria es aquella cuyo campo $\vec{J}$ no depende del tiempo en cada punto del espacio donde ocurre.
- En esta parte del curso además pediremos que la cantidad de carga por unidad de volumen no varíe en el tiempo, con lo cual la corriente que llegue a un punto debe seguir su camino hacia otro lado (no se acumula ni hay puntos donde falte carga).
- En términos de conservación de la carga:

$$\oiint \vec{J} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

Transporte de carga

- El agente más común para producir y mantener el transporte de carga es el campo eléctrico.
- El campo eléctrico mueve a los portadores de signos distintos en distintos sentidos



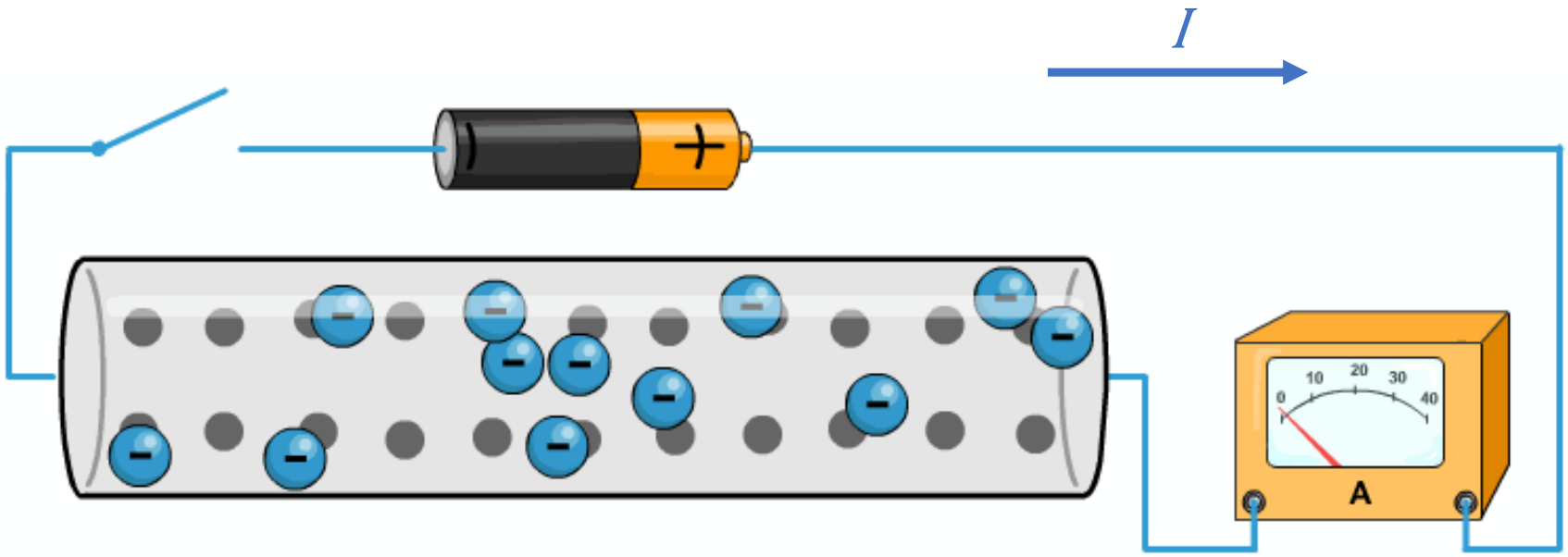
Ley de Ohm

- **Es una relación lineal empírica** entre el $\vec{E}$ y $\vec{J}$ que se cumple para muchos materiales en un rango muy amplio de intensidades de campo.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

- σ es la conductividad del material
  - Constante en un rango determinado de condiciones
  - Es un escalar cuando el medio es isotrópico (no tiene en su estructura ninguna dirección privilegiada)

Corriente en un conductor



Los electrones libres en la banda de conducción circulan en respuesta a la diferencia de potencial entre los extremos del circuito mantenida por la batería, mientras que los núcleos del material conductor se mantienen quietos. Fijarse en el sentido de I !!

Ley de Ohm

- Vamos a usar otra versión de la misma Ley de Ohm que relaciona a *I* y la diferencia de potencial V

$$V = IR$$

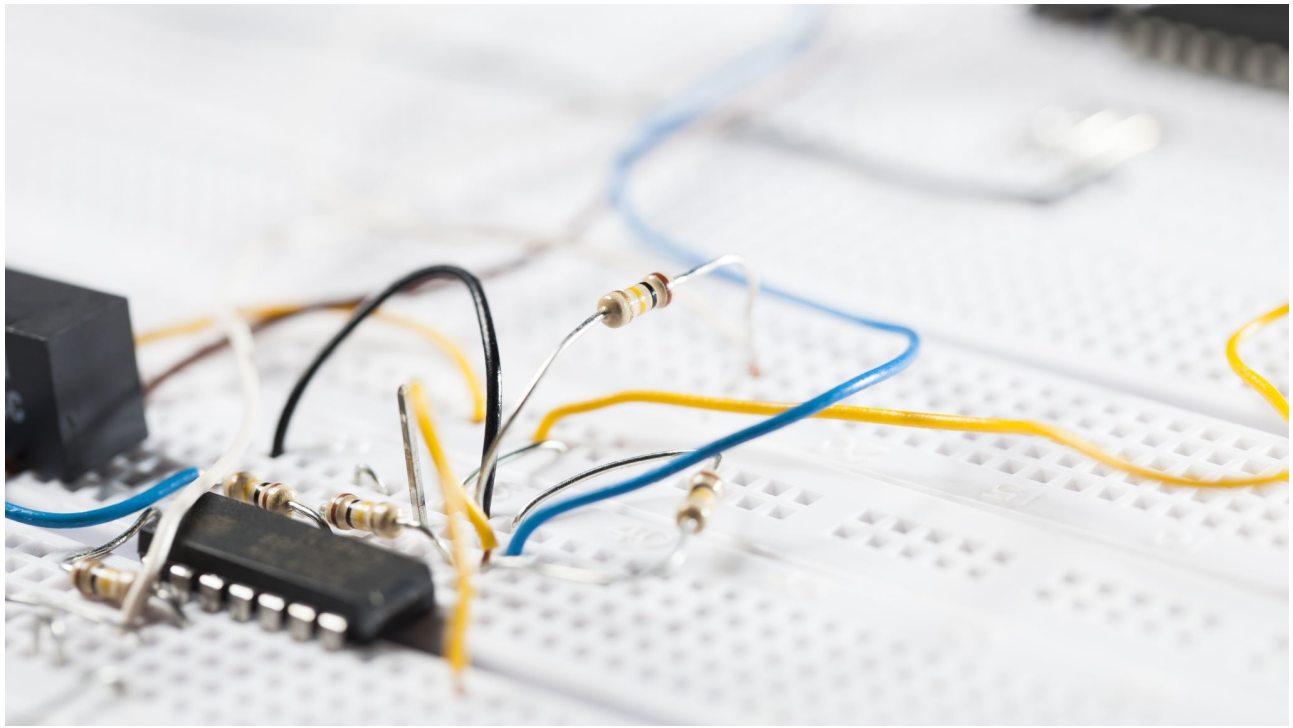
- R es la resistencia del conductor entre los dos terminales que están a una diferencia de potencial V.

- La unidad SI de R es el Ohm ($\Omega = \frac{V}{A}$)

Circuitos

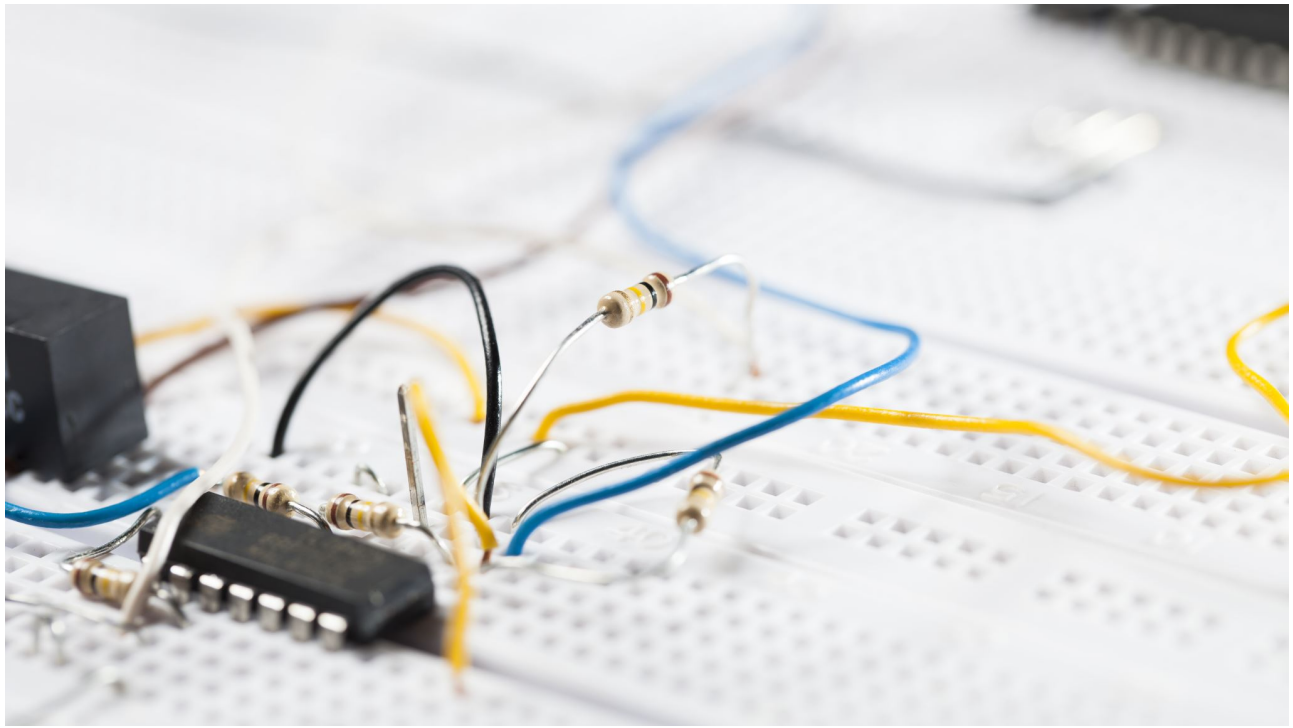
- Un circuito o red eléctrica es una agrupación de elementos unidos unos a otros por conductores de resistencia despreciable (cables).

- La corriente circula por el movida por una fuerza electromotriz.



Elementos de un Circuito

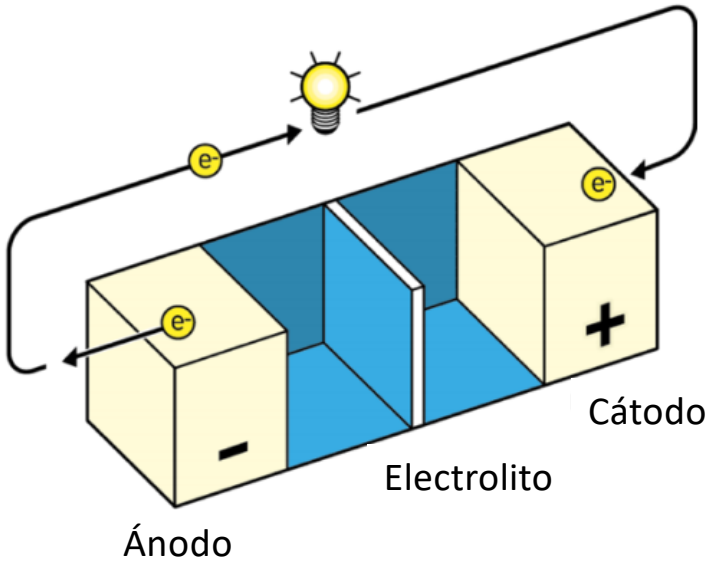
- Cables: Conductores perfectos, conducen corrientes sin resistencia.
- Fuerza electromotriz (FEM): diferencia de potencial que obliga a la corriente circular por el circuito.
- Elementos: Resistores, capacitores, diodos, LED, bobinas



Fuerza electromotriz (FEM) y baterías

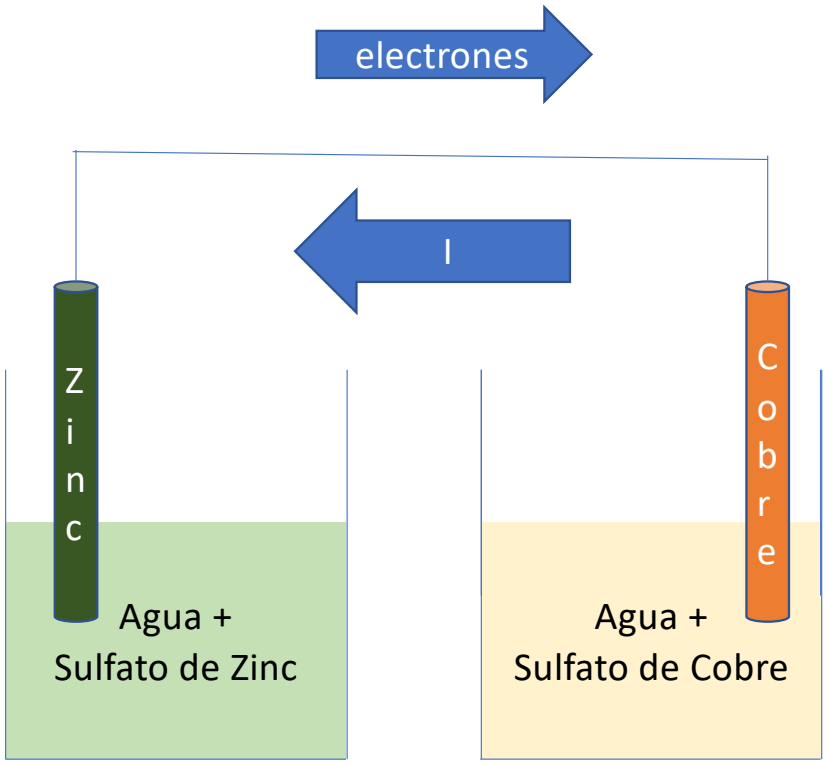
- La FEM es la diferencia de potencial generada por una fuente no eléctrica (o inducción)
- Las baterías producen FEM a partir de procesos químicos que ocurren en unidades llamadas celdas.

Principio de funcionamiento de una batería



La pila Voltaica

- Basado en oxidación/reducción
- Los iones Cu^{++} en el recipiente 2 van a ser más fuertes en 'reclamar' electrones que los iones Zn^{++}.
- Electrones provenientes de la barra de Zn neutro (oxidación) van a viajar hacia la barra de cobre, creando una corriente I desde el cobre al zinc.
- Los electrones van a neutralizar los iones Cu^{++} que pasan a engrosar la barra del recipiente 2 (reducción).



Ánodo Cátodo

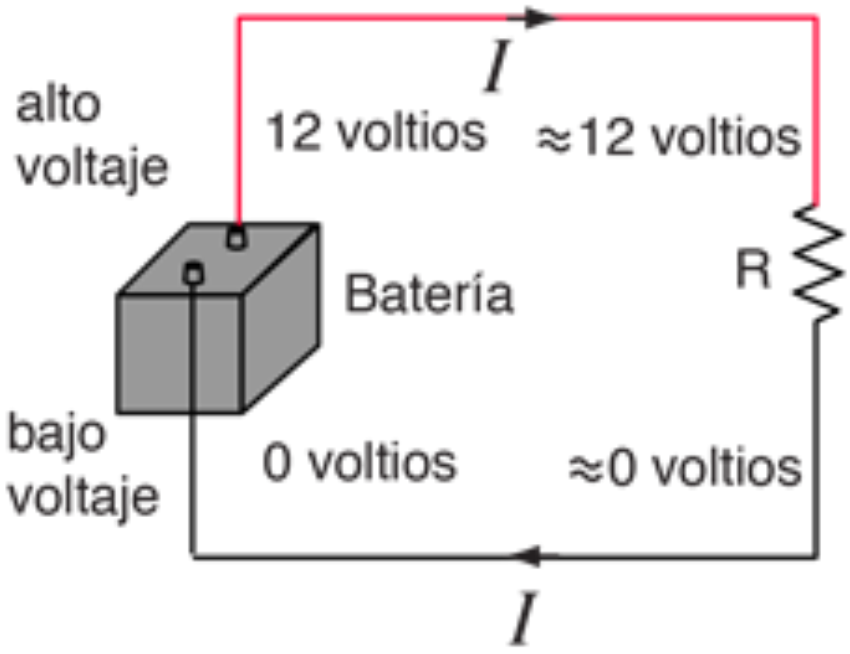
EMF máxima = 1.1V por celda

Leyes de Kirchhoff para circuitos estacionarios

Conservación de la carga

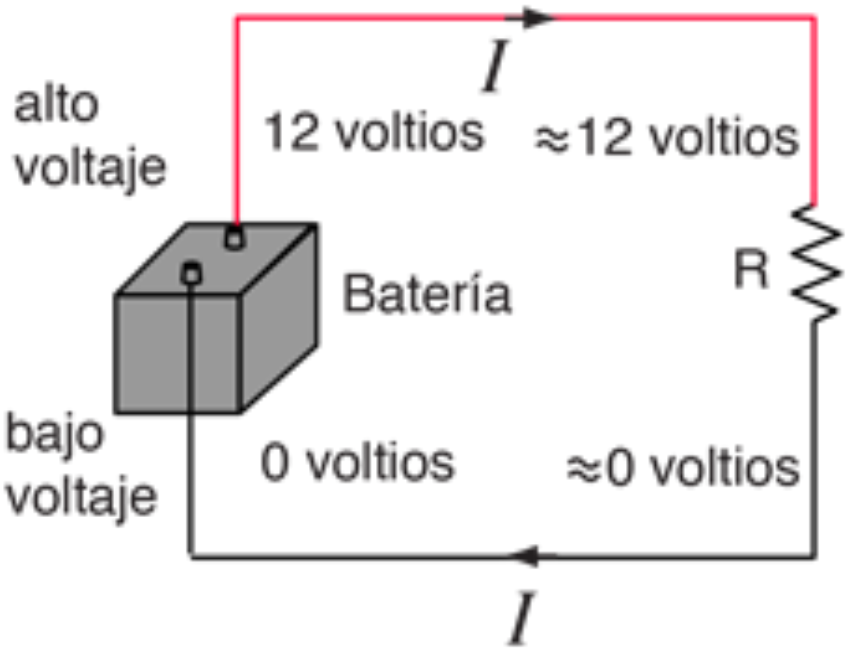
Conservación de la energía

Ley de Kirchhoff de los voltajes



- El cambio neto de diferencia de potencial alrededor de cualquier bucle cerrado debe ser cero.
- Cualquier aumento de voltaje producido por la bateria debe ser seguido por una caida de voltaje para traerlo de vuelta al voltaje original

Ley de Kirchhoff de los voltajes

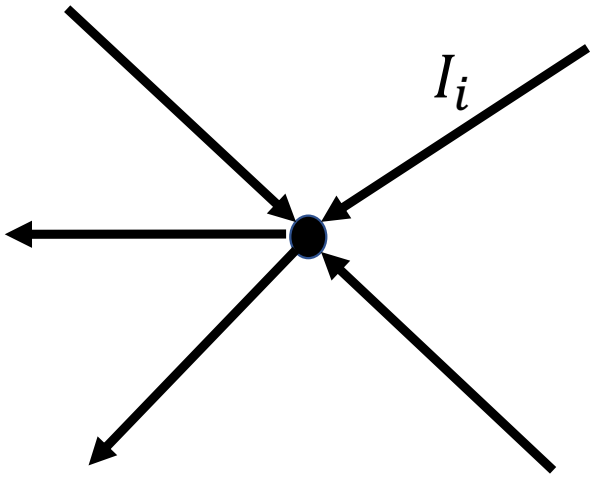


- La suma de variaciones de potencial en un lazo cerrado de un circuito es cero.

$$\sum_i V_i = 0$$

- Reglas y signos
  - Batería:
    - V > 0 al pasar del borne negativo al positivo.
    - V < 0 al pasar del borne positivo al negativo.
  - Resistencia
    - V > 0 al ir en contra de la corriente.
    - V < 0 al ir a favor de la corriente.

Ley de Kirchhoff de las corrientes



- En el circuito no se crea ni destruye carga

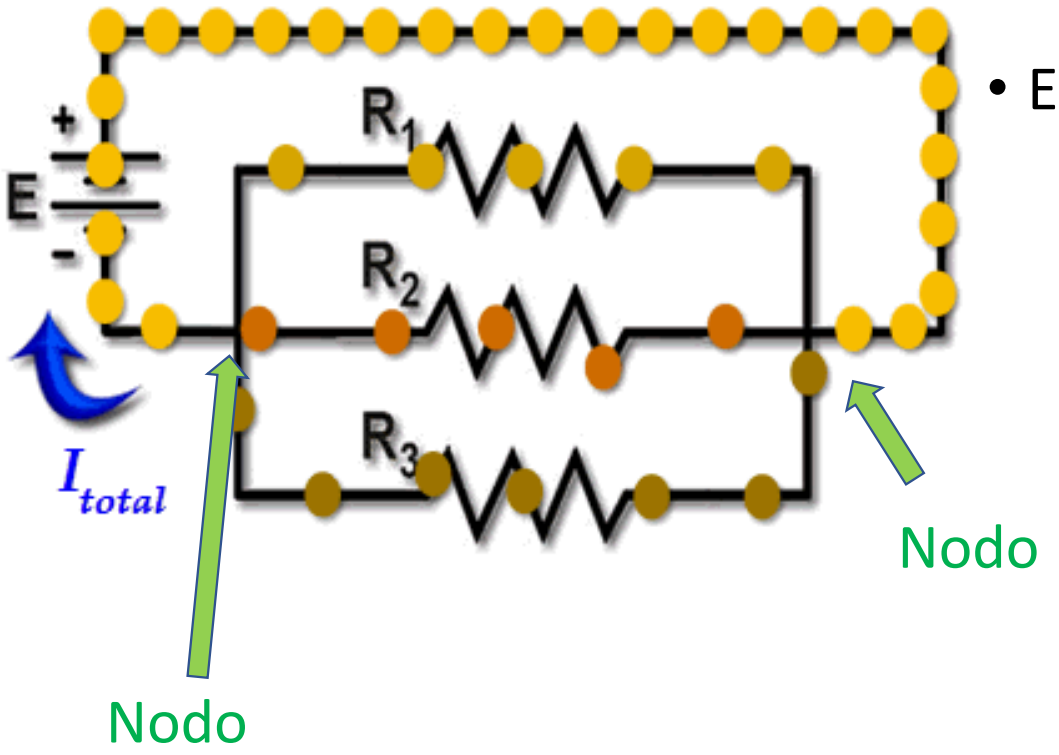
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

- En un nodo, la suma de todas las corrientes que llegan o salen de él debe ser igual a cero

$$\sum_i I_i = 0$$

- Equivalentemente, toda la corriente que llega, debe ser igual a la que sale

Ley de Kirchhoff de las corrientes



- En el ejemplo hay dos nodos
- En cada nodo se puede escribir:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + I_3$$

o equivalentemente

$$I_{total} - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

Resistencias en serie

- Entre los bornes hay una diferencia de potencial

$$V = V_1 + V_2$$

- Donde

$$V_1 = IR_1$$
$$V_2 = IR_2$$

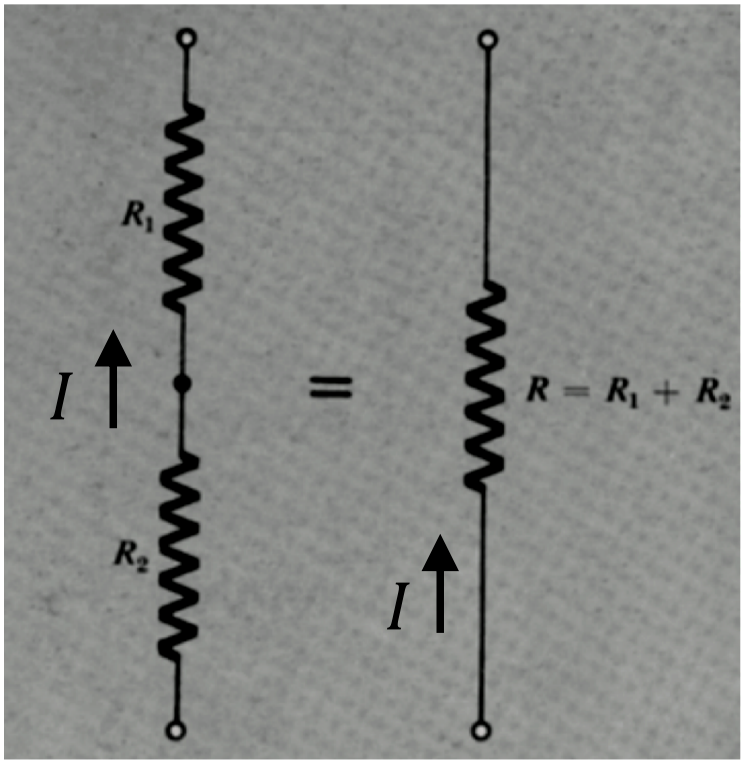
- Entonces

$$V = V_1 + V_2 = I(R_1 + R_2)$$

La caída de potencial equivale a la que ocurre a través de una resistencia

$$R = R_1 + R_2$$

Original Equivalente



$$R = R_1 + R_2$$

Resistencias en serie y paralelo

- Entre los bornes hay una diferencia de potencial V.
- Para cada rama tenemos

$$V = I_1 R_1 \qquad V = I_2 R_2$$

- Por conservación de la carga

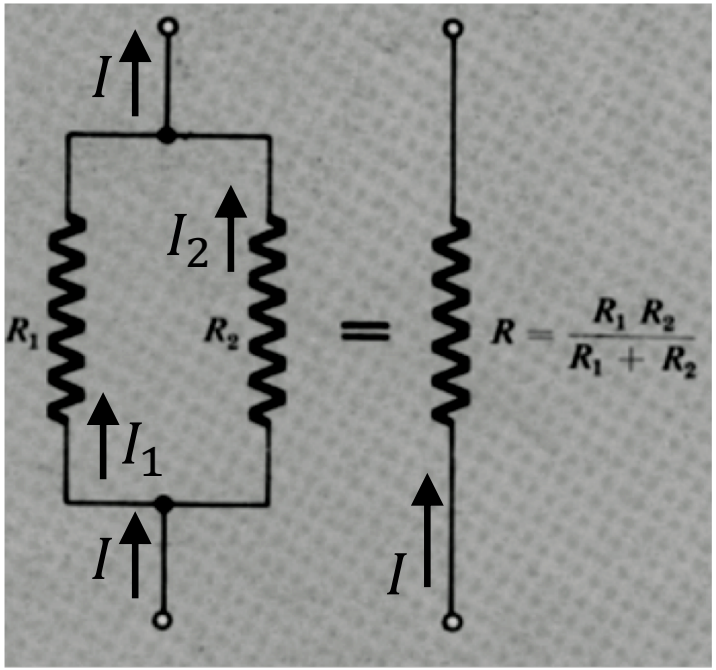
$$I = I_1 + I_2$$

- Entonces

$$\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] = I$$

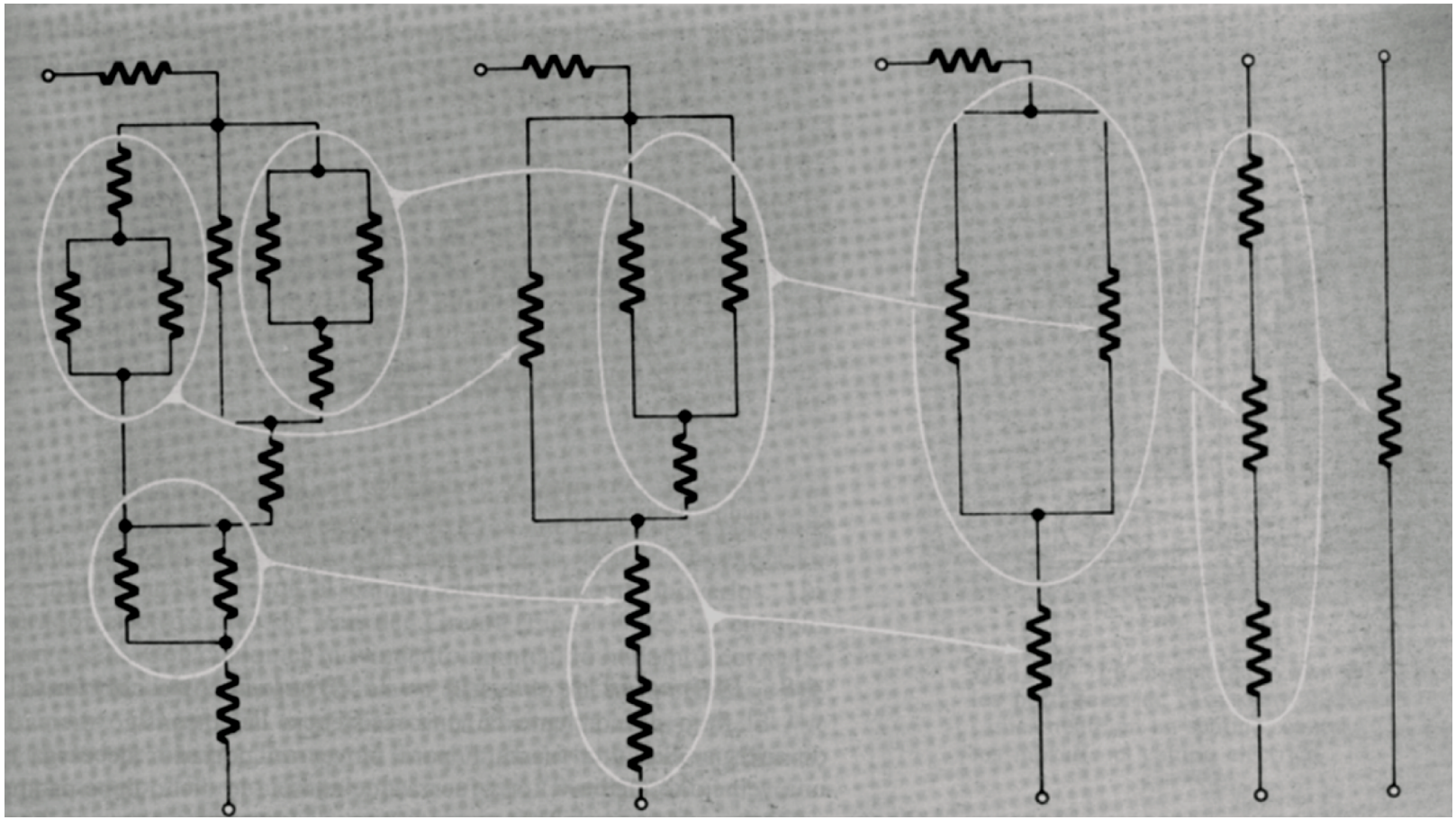
$$\frac{V}{R} = I$$

Original Equivalente



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Reducción de una red de resistencias



Disipación de la energía en una resistencia

- Sea $\vec{F}$ una fuerza para mover un portador de carga q en un campo $\vec{E}$

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

- El trabajo de $\vec{F}$ por unidad de tiempo es (suponiéndola estacionaria)

$$\frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{\overrightarrow{dl}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

- La energía potencial es transformada de este modo en calor y $P = \frac{dW}{dt}$ es la potencia disipada.

Disipación de la energía en una resistencia

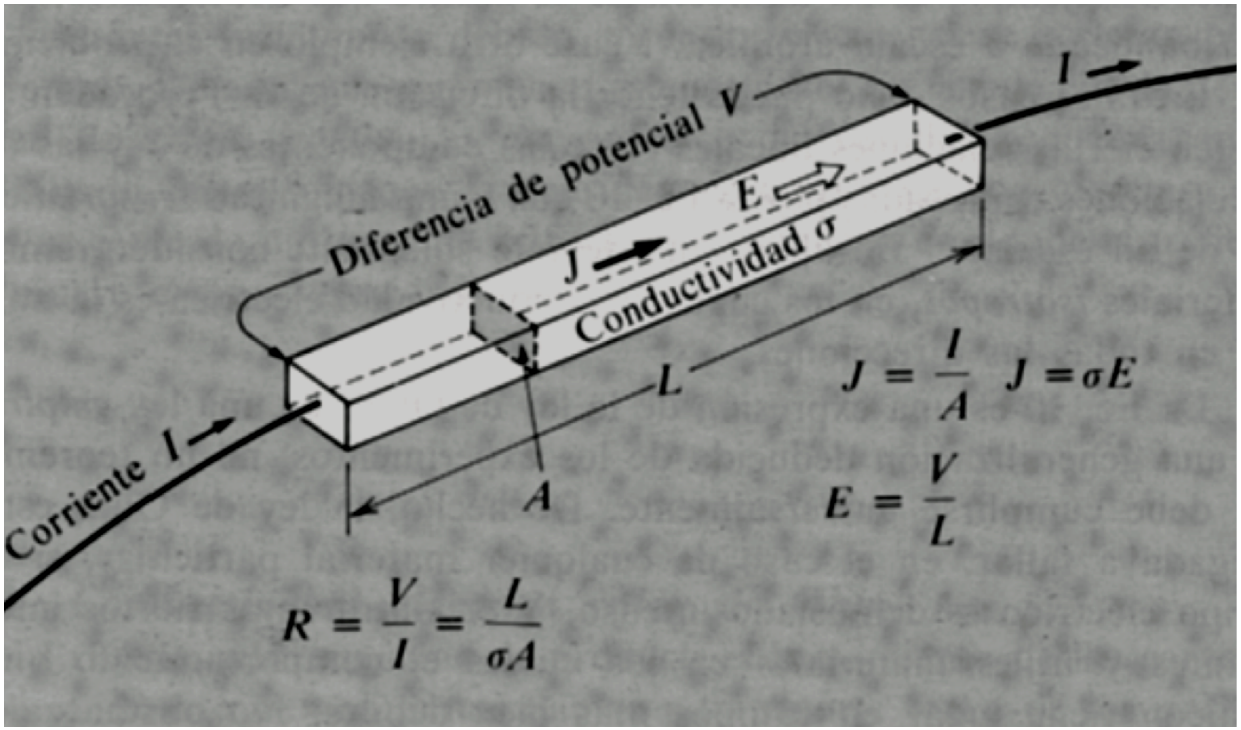
- Entonces en una dimensión y suponiendo que en Δt pasan N portadores de carga q por el área A

$$P = NqEv$$

donde $\Delta L = v\,\Delta t$

- Entonces por ley de Ohm

$$P = \frac{Nq\rho J \Delta L}{\Delta t}$$



Disipación de la energía en una resistencia

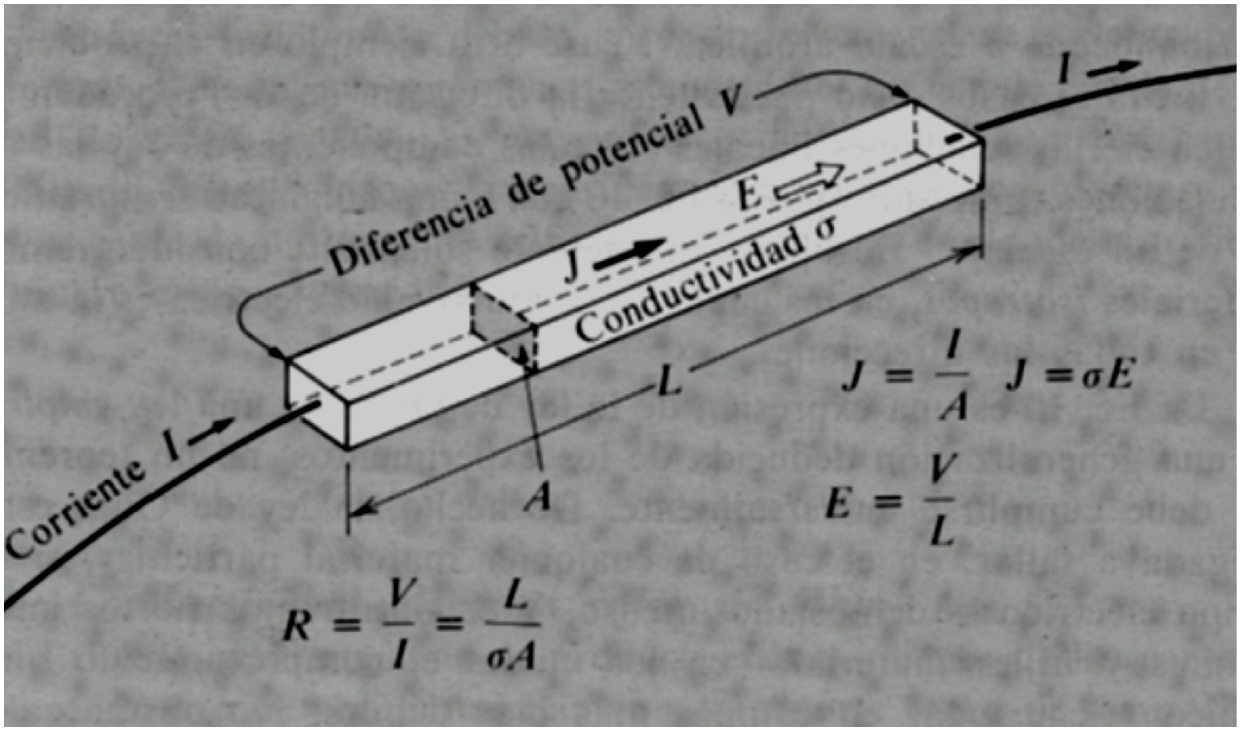
- Entonces como

$$I = \frac{Nq}{\Delta t} \;\; y \;\; J = \frac{I}{A}$$

$$P = \frac{I^2 \rho \Delta L}{A}$$

- Lo que equivale a

$$P = I^2 R$$



La potencia *P* o energía disipada por unidad de tiempo en SI se mide en Watts