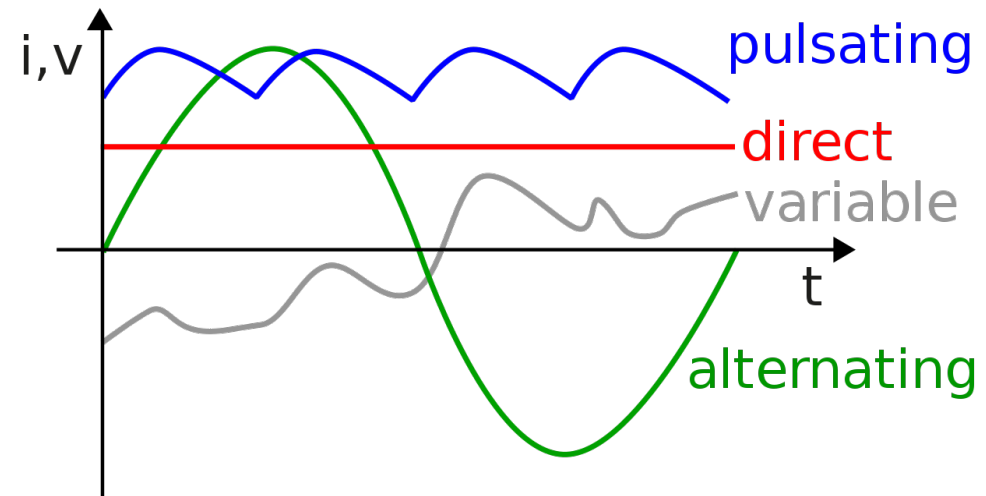
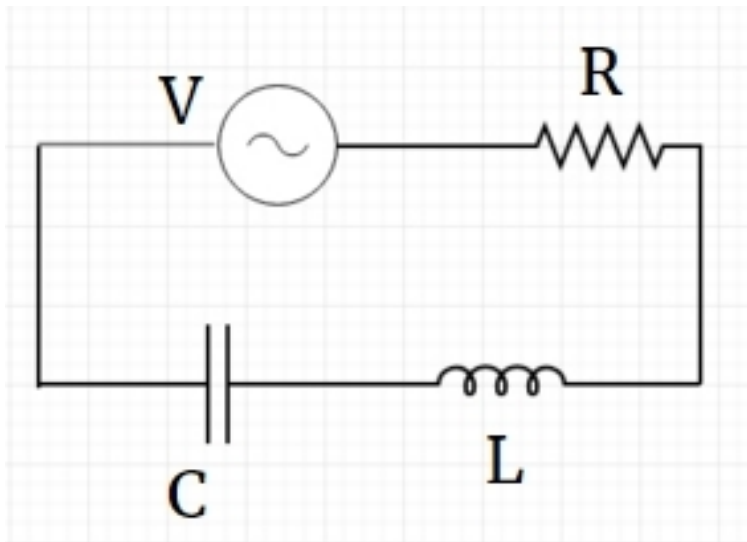


# Corriente o voltaje alterno

- Es una corriente eléctrica (o voltaje) que revierte su dirección y cambia su magnitud en el tiempo periódicamente.
- Común en el suministro eléctrico.
- La corriente alterna es más utilizada por la baja pérdida al ser distribuida y la posibilidad del uso de transformadores.



# Circuito RLC en serie



- Supongamos ahora un circuito RLC en serie de corriente alterna donde

$$V = V_0 \cos \omega t$$

- Por ley de Faraday tenemos

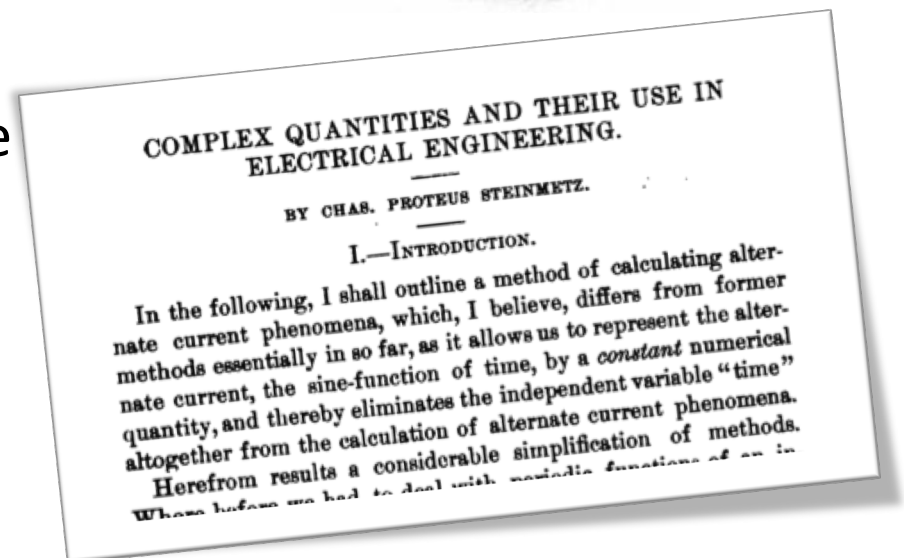
$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

- Podemos resolver esta ecuación diferencial de manera diferente a como lo venimos haciendo?

# Números complejos y circuitos AC

- En 1893 Charles Steinmetz, ingeniero alemán en GE (EEUU), presenta el trabajo 'Complex Quantities and Their Use in Electrical Engineering'.
- En este trabajo muestra como ecuaciones como la anterior son en realidad un problema de álgebra simple de números complejos.
- En otras palabras

¡No hace falta integrar !



# Representaciones de números complejos

- Cartesianas

$$z = x + iy$$

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = \operatorname{Im}(z)$$

- Polares (Euler)

$$z = r e^{i\varphi}$$

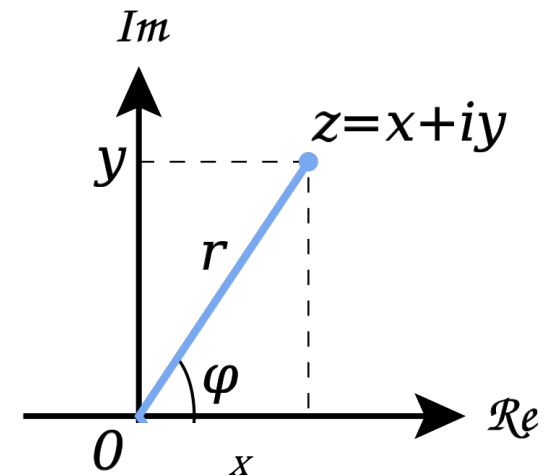
donde  $r$  es el módulo y  
 $\varphi$  es el argumento o  
la fase

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$x = r \cos \varphi$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$





# Operaciones simples en polares

La multiplicación de números complejos es especialmente sencilla con la notación polar:

$$z_1 z_2 = r s e^{i(\phi+\psi)} \Leftrightarrow z_1 z_2 = r e^{i\phi} s e^{i\psi}$$

División:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{s} e^{i(\phi-\psi)}$$

Potenciación:

$$z^n = r^n e^{i\phi n} \Leftrightarrow z^n = (r e^{i\phi})^n$$

# Complejo conjugado $\bar{z}$

- Si  $z = x + iy$  entonces  $\bar{z} = x - iy = re^{-i\varphi}$
- Propiedades

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$z + \bar{z} = 2 \cdot \operatorname{Re}(z)$$

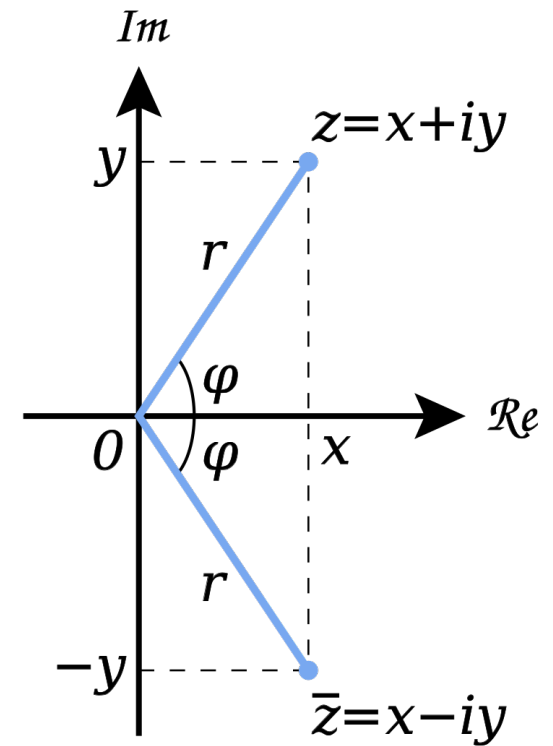
$$z - \bar{z} = 2i \cdot \operatorname{Im}(z)$$

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$$

$$z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$$

$$|z|^2 = z\bar{z} \geq 0$$

$$z \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$



# Voltaje complejo

- La FEM de la batería

$$V_0 \cos \omega t$$

- Puede ser vista como la parte real del número complejo

$$V_0 e^{i\omega t} = V_0 (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

- En cuyo caso

$$V_0 \cos \omega t = \operatorname{Re}(V_0 e^{i\omega t})$$

# Corriente compleja

- Para la solución de nuestro problema podemos hacer lo mismo con  $I$

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(I_0 e^{i(\omega t + \varphi)})$$

donde  $\varphi$  es la diferencia de fase con  $V$

- Pero podemos reescribir esto como

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(I_0 e^{i\varphi} e^{i\omega t})$$

- Ahora definimos **la amplitud compleja  $\tilde{I}$**  (independiente del tiempo)

$$\tilde{I} = I_0 e^{i\varphi} = I_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

- Podemos escribir

$$I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}(\tilde{I} e^{i\omega t})$$

# Corriente compleja: derivada e integral

- Veamos cómo dan las derivadas y las integrales de  $\tilde{I} e^{i\omega t}$

- La derivada respecto a  $t$  queda:

$$\frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} = \tilde{I} \frac{de^{i\omega t}}{dt} = i\omega \tilde{I} e^{i\omega t}$$

¡Derivar la corriente compleja equivale a multiplicarla por  $i\omega$ !

- La integral queda

$$\int \tilde{I} e^{i\omega t} dt = \tilde{I} \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} \tilde{I} e^{i\omega t} = -\frac{i}{\omega} \tilde{I} e^{i\omega t}$$

¡Integrar la corriente compleja equivale a multiplicarla por  $\frac{1}{i\omega}$ !

# Pregunta

- ¿Por cuánto hay que multiplicar  $\tilde{I}e^{i\omega t}$  para obtener su derivada segunda respecto al tiempo?

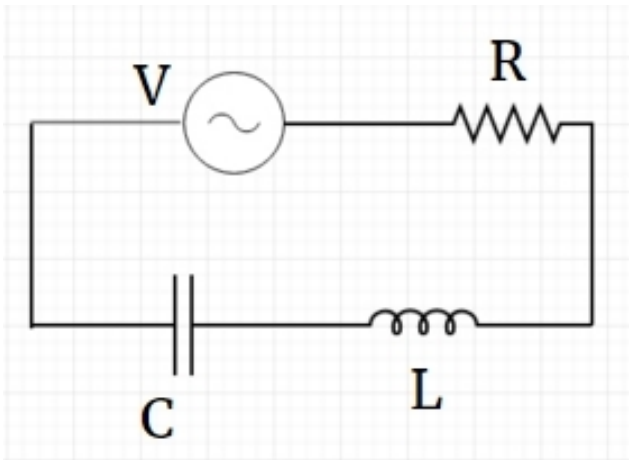
# Circuito RLC en serie

- Estas propiedades de los números complejos nos permiten hallar la solución de la ecuación diferencial del circuito. Entonces

$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

Como **la ecuación es lineal**, esto equivale a

$$\text{Re}(V_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(R\tilde{I} e^{i\omega t} + L \frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} e^{i\omega t} dt)$$



# Circuito RLC en serie

- Resolvamos entonces en complejos y luego tomemos la parte real

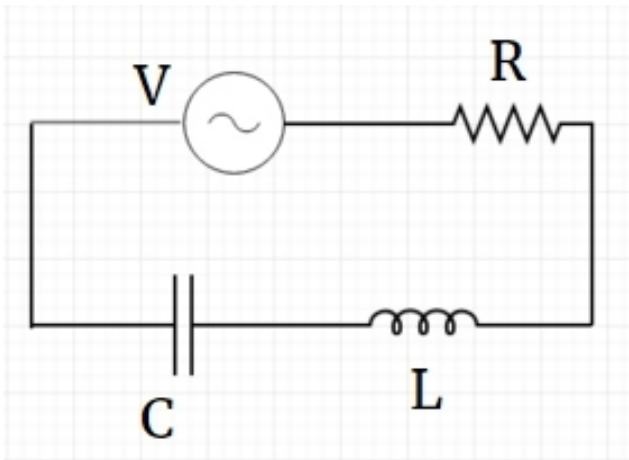
$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} e^{i\omega t} + L \frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} e^{i\omega t} dt$$

- Reemplazamos la integral y la derivada

$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} e^{i\omega t} + i\omega L\tilde{I} e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C} \tilde{I} e^{i\omega t}$$

- simplificamos  $e^{i\omega t}$

$$V_0 = R\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}$$

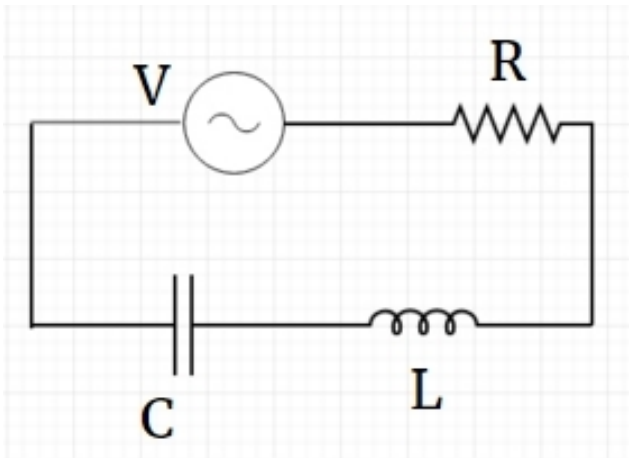




# Circuito RLC en serie

- Y por último despejamos  $\tilde{I}$

$$V_0 = \left[ R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right] \tilde{I}$$

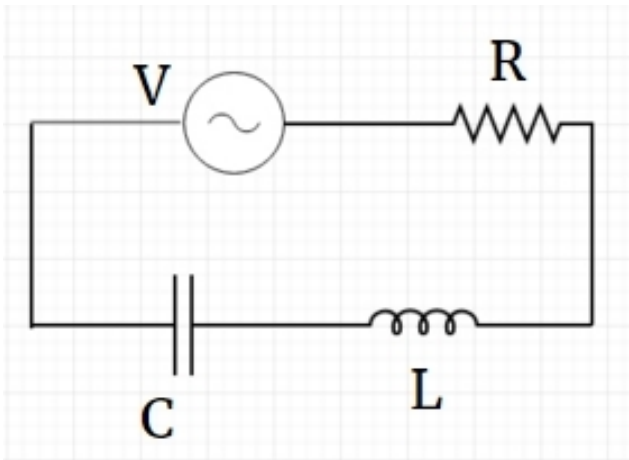


$$\tilde{I} = \frac{V_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{V_0}{Z}$$

donde  $Z$  es la *impedancia resultante del circuito*

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

# Circuito RLC en serie



- Entonces, la corriente es

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I}e^{i\omega t}) = \text{Re} \left[ \frac{V_0}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}} e^{i\omega t} \right]$$

- Llamemos  $\theta$  a la fase de la impedancia

$$Z = R + i \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right] = |Z|e^{i\theta}$$

$$I(t) = \text{Re} \left[ \frac{V_0}{|Z|e^{i\theta}} e^{i\omega t} \right] = \text{Re} \left[ \frac{V_0}{|Z|} e^{i(\omega t - \theta)} \right]$$

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta)$$

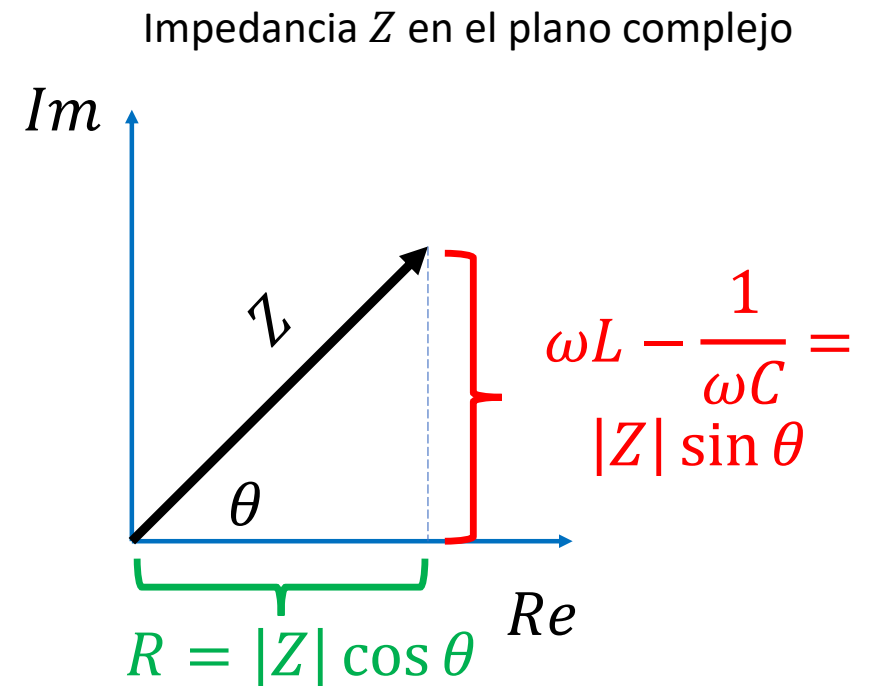
# Circuito RLC en serie

- La impedancia tiene las propiedades:

$$Z = R + i \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right] = |Z| e^{i\theta}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}$$

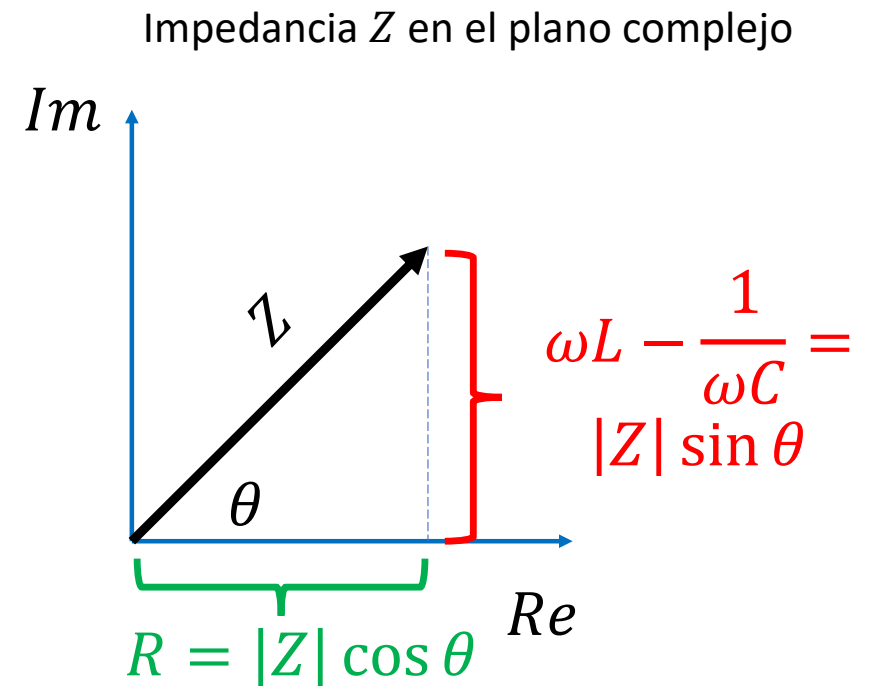
$$\tan \theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



# Circuito RLC en serie

- Entonces la corriente real vale:

$$I(t) = \frac{V_0 \cos \left[ \omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]}{\sqrt{R^2 + \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}$$



# La impedancia

- Como vemos en este caso, la intensidad de la corriente depende de  $\omega, C, L$  y  $R$ .
- También de ellas depende su fase.
- Llamemos nuevamente  $I_0$  a la amplitud real de  $I$ :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}$$

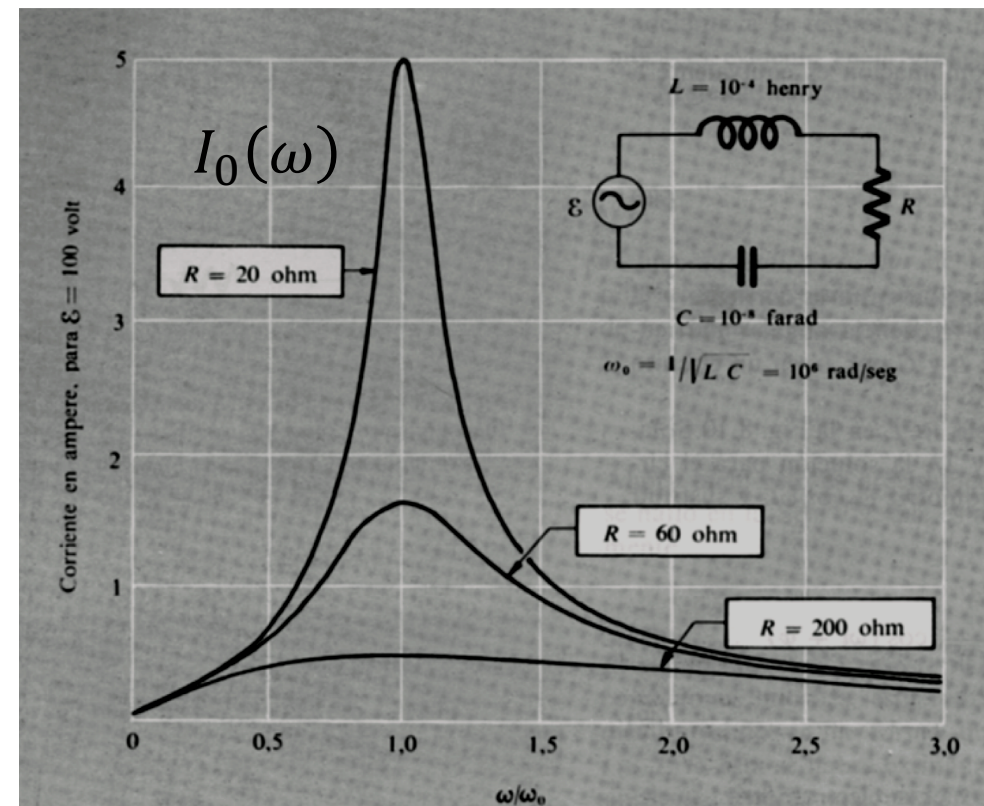
# La impedancia

- En la figura vemos cómo varía  $I_0$  en función de  $\omega$  para:

$$\begin{aligned}V_0 &= 100 \text{ V} \\ C &= 10^{-8} \text{ Farad}, \\ L &= 10^{-4} \text{ H} \\ R &= 20, 60, 200 \Omega\end{aligned}$$

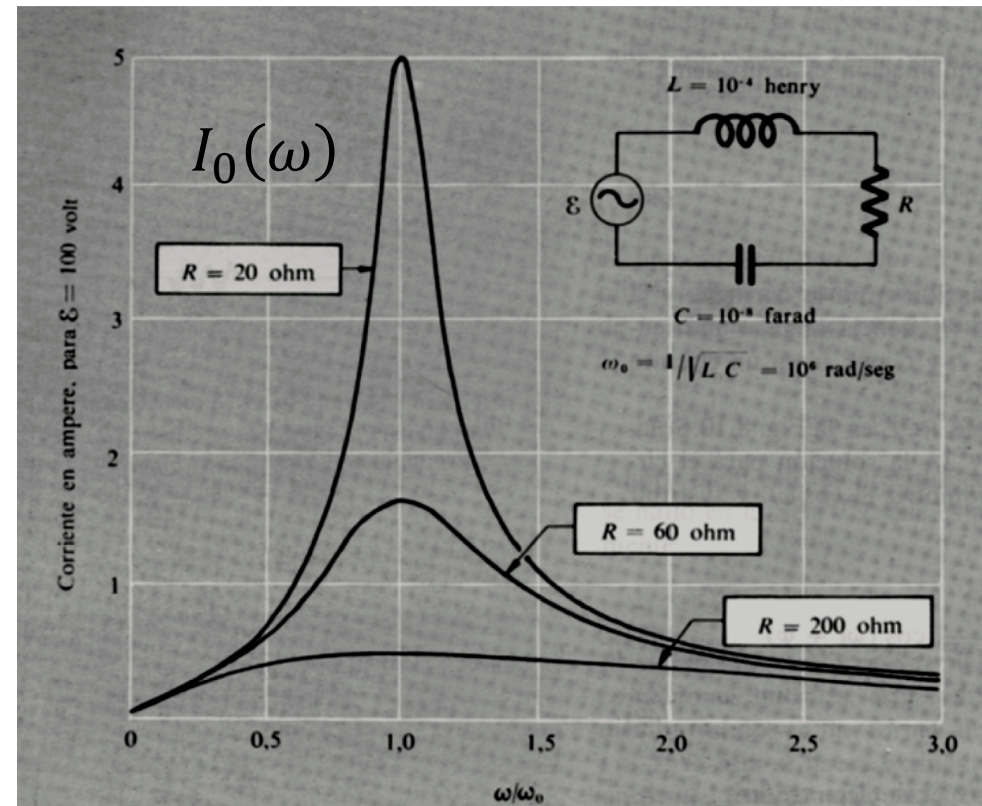
- Vemos que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_0(\omega) = 0 \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} I_0(\omega) = 0$$



# La impedancia

- $I_0(\omega)$  alcanza un máximo cuando
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad/s}$$
- Cuando esto ocurre se da una resonancia y el efecto de  $L$  y  $C$  parecen desaparecer (hasta la fase)
$$I_{res}(t) = \frac{V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t}{R}$$
- El máximo es más intenso y más fino en la medida que  $R$  es más pequeño

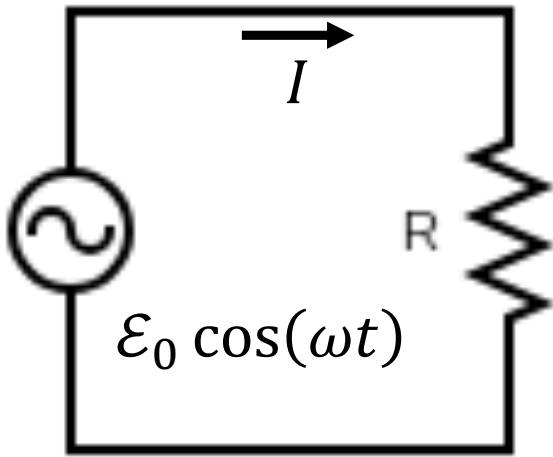


# Pregunta

- En el caso de resonancia para un circuito RLC en serie: ¿Qué tipo de valor extremo alcanza la impedancia equivalente?



# Potencia en un circuito de alterna



- Sea un circuito con una fuente  $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$  y una resistencia  $R$ .

- La corriente es:

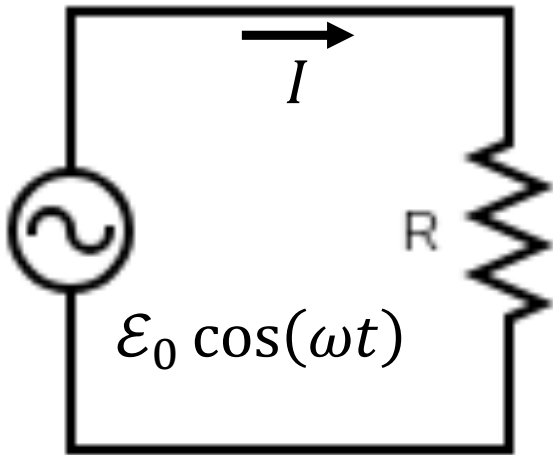
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t)$$

- La potencia instantánea disipada en  $R$  es:

$$P = IV = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t) \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$P = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} [\cos(\omega t)]^2$$

# Potencia en un circuito de alterna



- La potencia media en un período

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

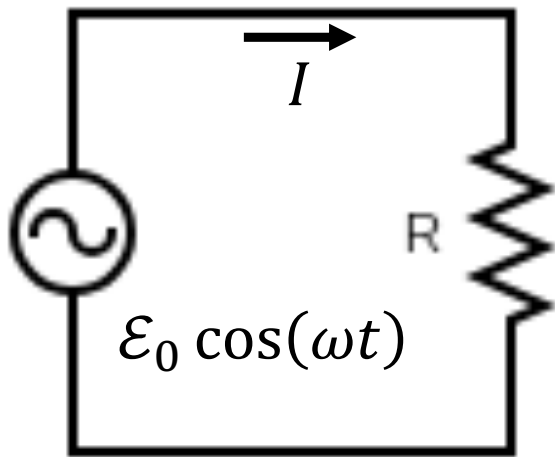
viene dada por la expresión

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} [\cos(\omega t)]^2 dt$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(\omega t)]^2 dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R}$$

# Potencia en un circuito de alterna



- A veces la tensión viene dada en RMS es decir en

$$V_{RMS} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

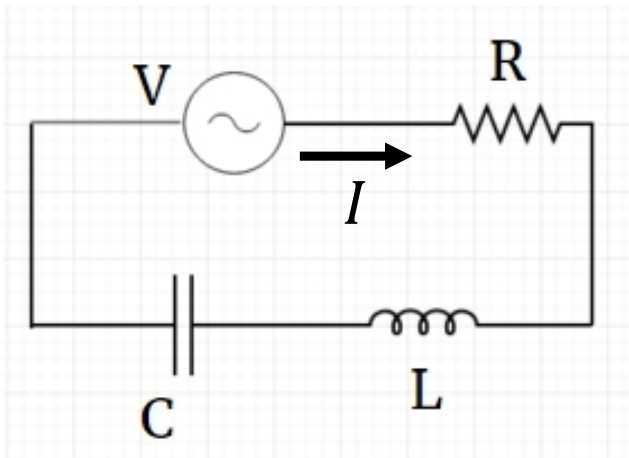
- Por ejemplo, la tensión RMS en la red doméstica es de 220 V (y frecuencia 50 Hz). Eso implica una amplitud real:

$$\mathcal{E}_0 = 220 \text{ V} \sqrt{2} = 311 \text{ V}$$

- En términos de  $V_{RMS}$  la potencia media queda:

$$\langle P \rangle = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

# Potencia media en RLC en serie



- Si tenemos una impedancia total  $Z = |Z|e^{i\theta}$

$$P = IV = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

- desarmamos  $\cos(\omega t - \theta)$ :

$$P = \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|} [(\cos \omega t)^2 \cos \theta + \cos \omega t \sin \omega t \sin \theta]$$

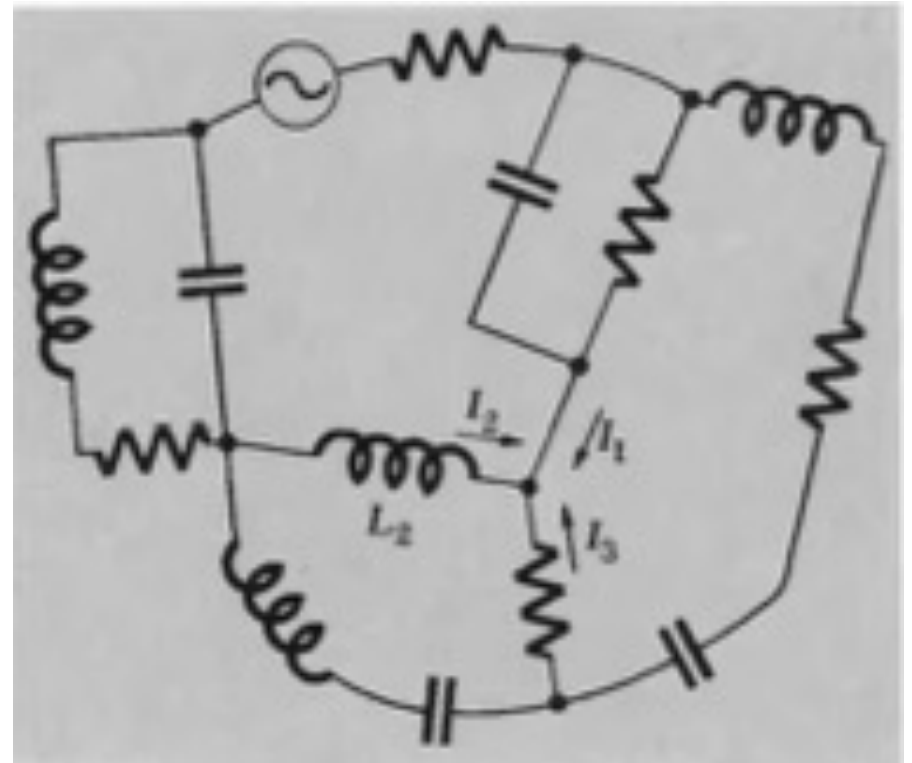
$$\langle P \rangle = \frac{\varepsilon_0^2}{2|Z|} \cos \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \right)^2 |Z| \cos \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \right)^2 R$$

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2}{2} R \quad (\text{la única que disipa es } R)$$

Otros circuitos en alterna

# Otros circuitos en alterna

- Una red de corriente alterna es un conjunto de **resistencias, capacitores e inductores** en los cuales circula corriente que oscila **estacionariamente** a una frecuencia  $\omega$ .
- La frecuencia es una constante en todo el circuito.
- Para hallar la corriente en cada rama hay que saber su amplitud y su fase respecto a la fuente.

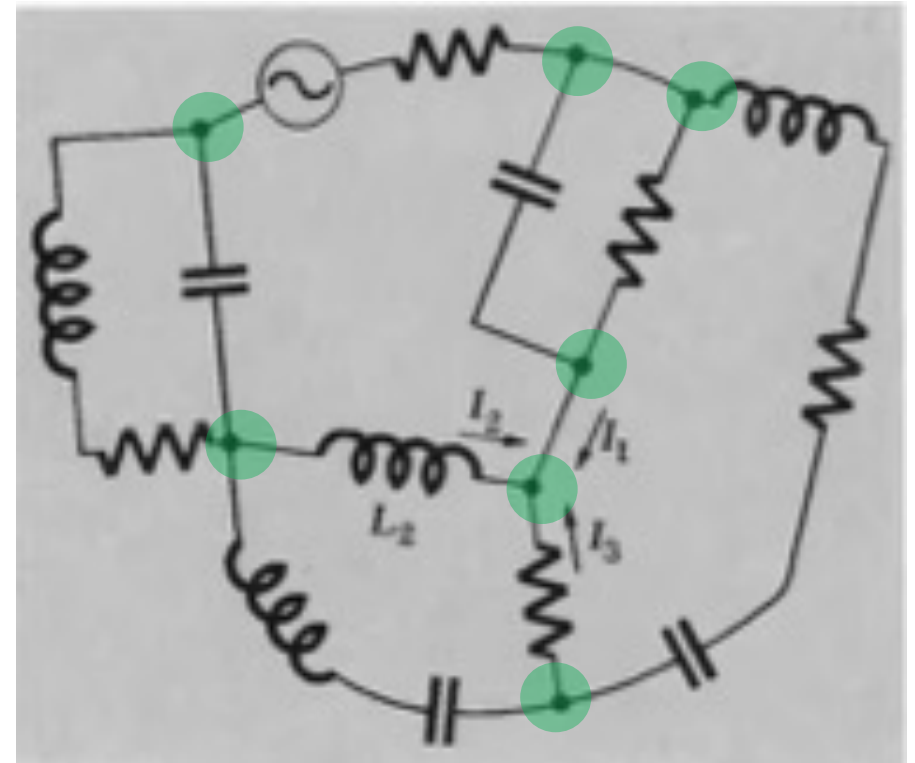


## Otros circuitos en alterna

- Por conservación de la carga, las corrientes que pasan por cada nodo deben dar suma nula

$$I_1 + I_2 \dots = 0$$

- En cada rama, el voltaje también tendrá su propia amplitud y fase.

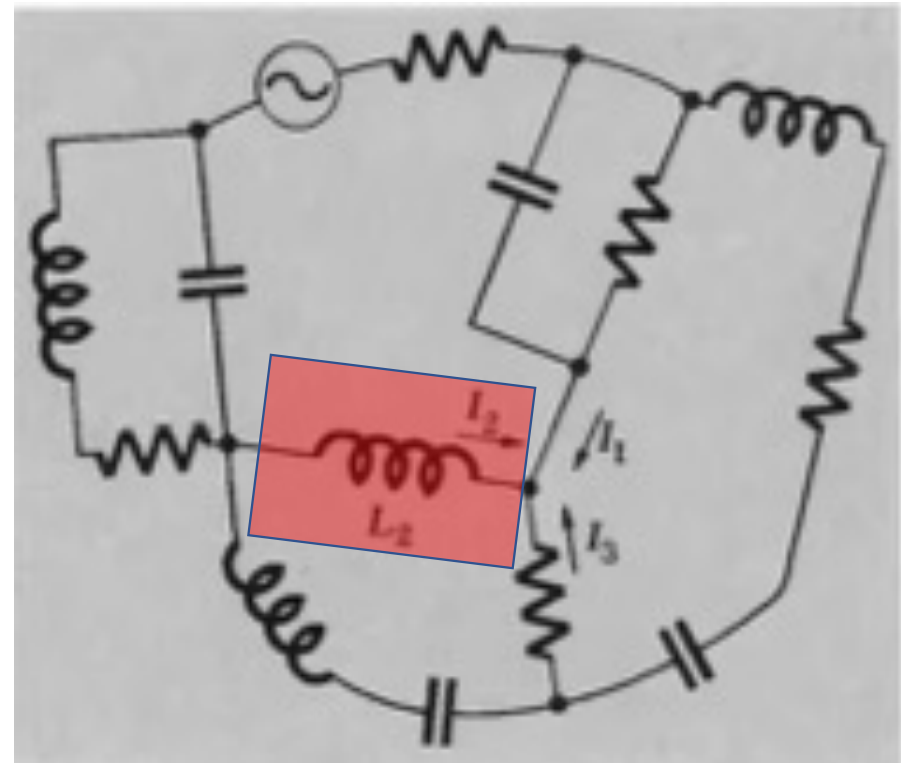


## Otros circuitos en alterna

- La fase de la tensión y la corriente en cada rama puede no ser la misma.

$$I_2 = I_{02} \cos (\omega t + \varphi_2)$$

$$V_2 = V_{02} \cos (\omega t + \theta_2)$$





# Impedancias y admitancias

- ¿Cómo se relacionan la tensión y la corriente complejas en cada rama  $k$ ?

$$\tilde{I}_k e^{i\omega t} = Y_k \tilde{V}_k e^{i\omega t}$$

$$\tilde{I}_k = Y_k \tilde{V}_k$$

donde  $\tilde{I}_k$  y  $\tilde{V}_k$  son las amplitudes complejas de la tensión y la corriente en cada rama  $k$

$$\tilde{I}_k = |\tilde{I}_k| e^{i\varphi_k} \quad \text{y} \quad \tilde{V}_k = |\tilde{V}_k| e^{i\theta_k}$$

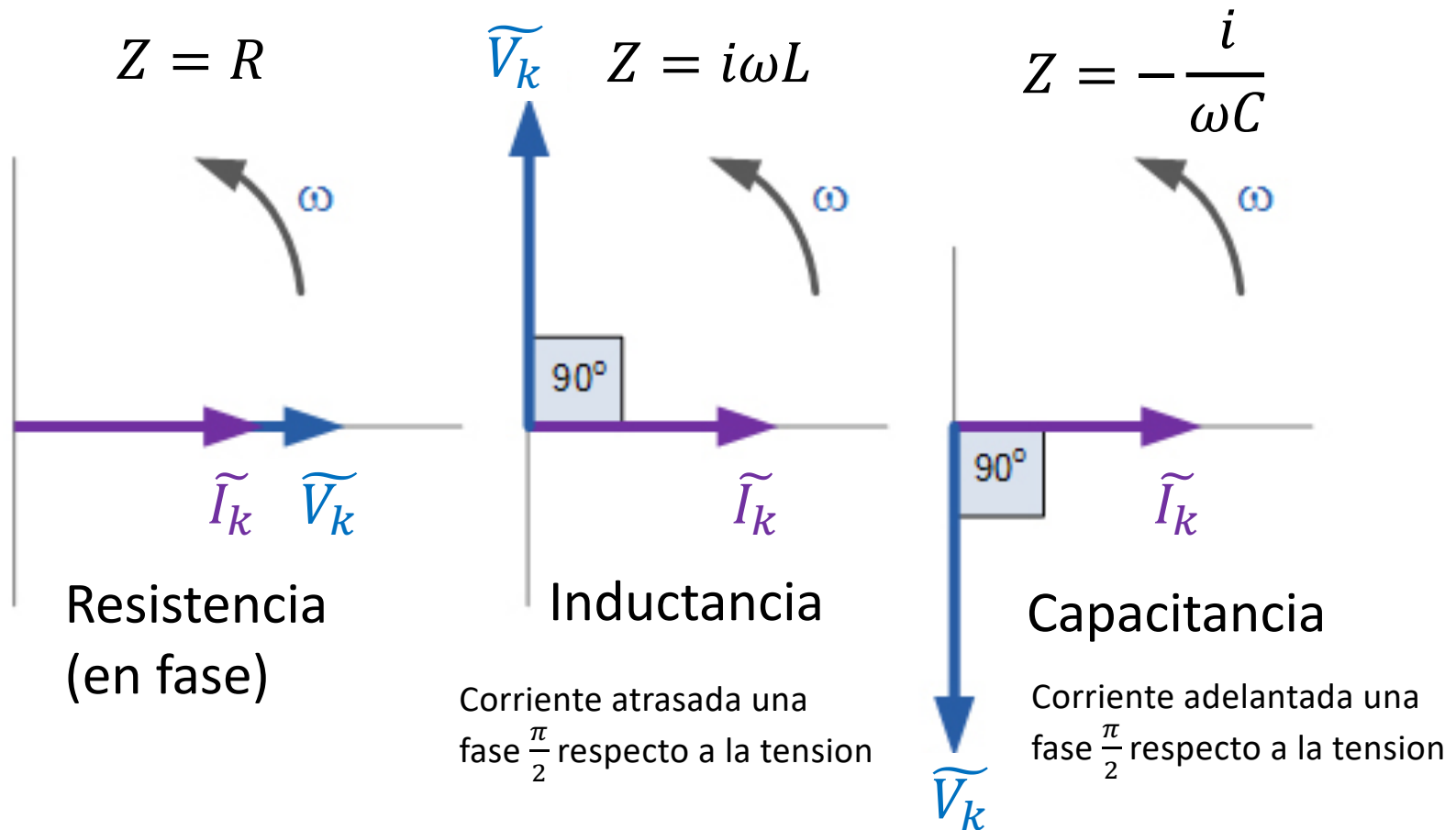
# Impedancias y admitancias

- La cantidad compleja  $Y_k$  se denomina **admitancia** (*unidad*  $= \frac{1}{\Omega}$ ).
- La inversa compleja de la admitancia es la **impedancia**  $Z_k$  (*unidad*  $= \Omega$ )

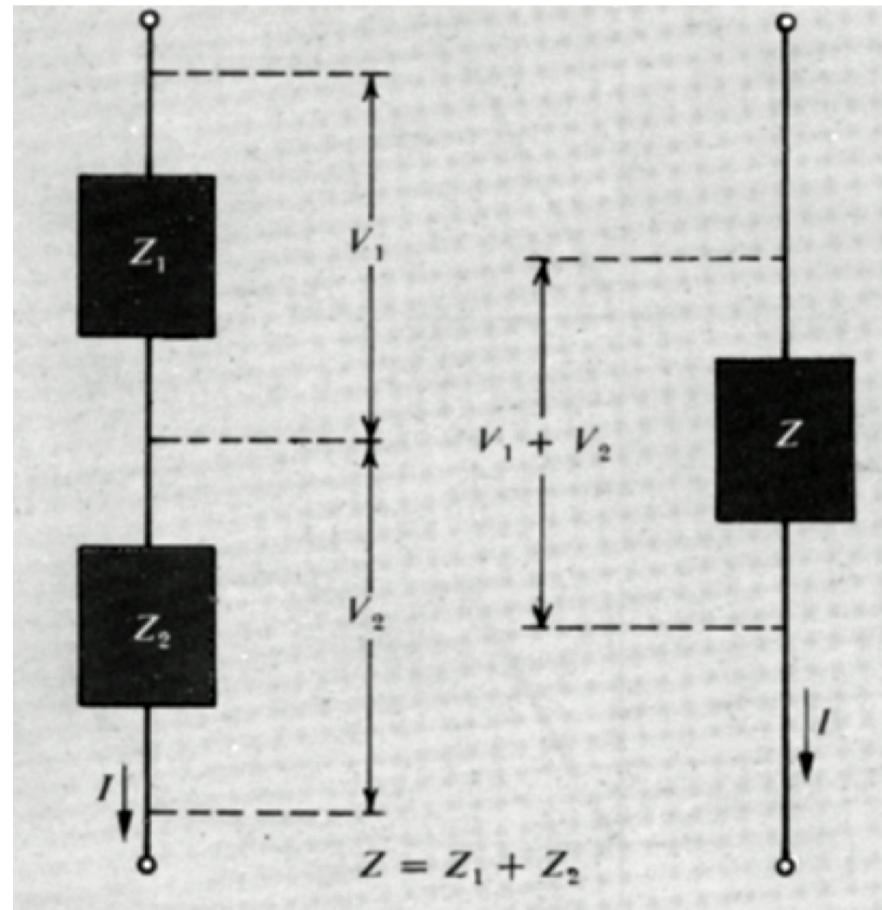
$$\widetilde{V}_k = Z_k \widetilde{I}_k = \frac{1}{Y_k} \widetilde{I}_k$$

| <i>Símbolo</i>                           | <i>Admitancia, <math>Y</math></i> | <i>Impedancia, <math>Z = \frac{1}{Y}</math></i> |
|------------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\overset{R}{\text{~~~~~}} \text{~~~~~}$ | $\frac{1}{R}$                     | $R$                                             |
| $\overset{L}{\text{~~~~~}} \text{~~~~~}$ | $\frac{-i}{\omega L}$             | $i\omega L$                                     |
| $\overset{C}{\text{~~~~~}} \text{~~~~~}$ | $i\omega C$                       | $\frac{-i}{\omega C}$                           |

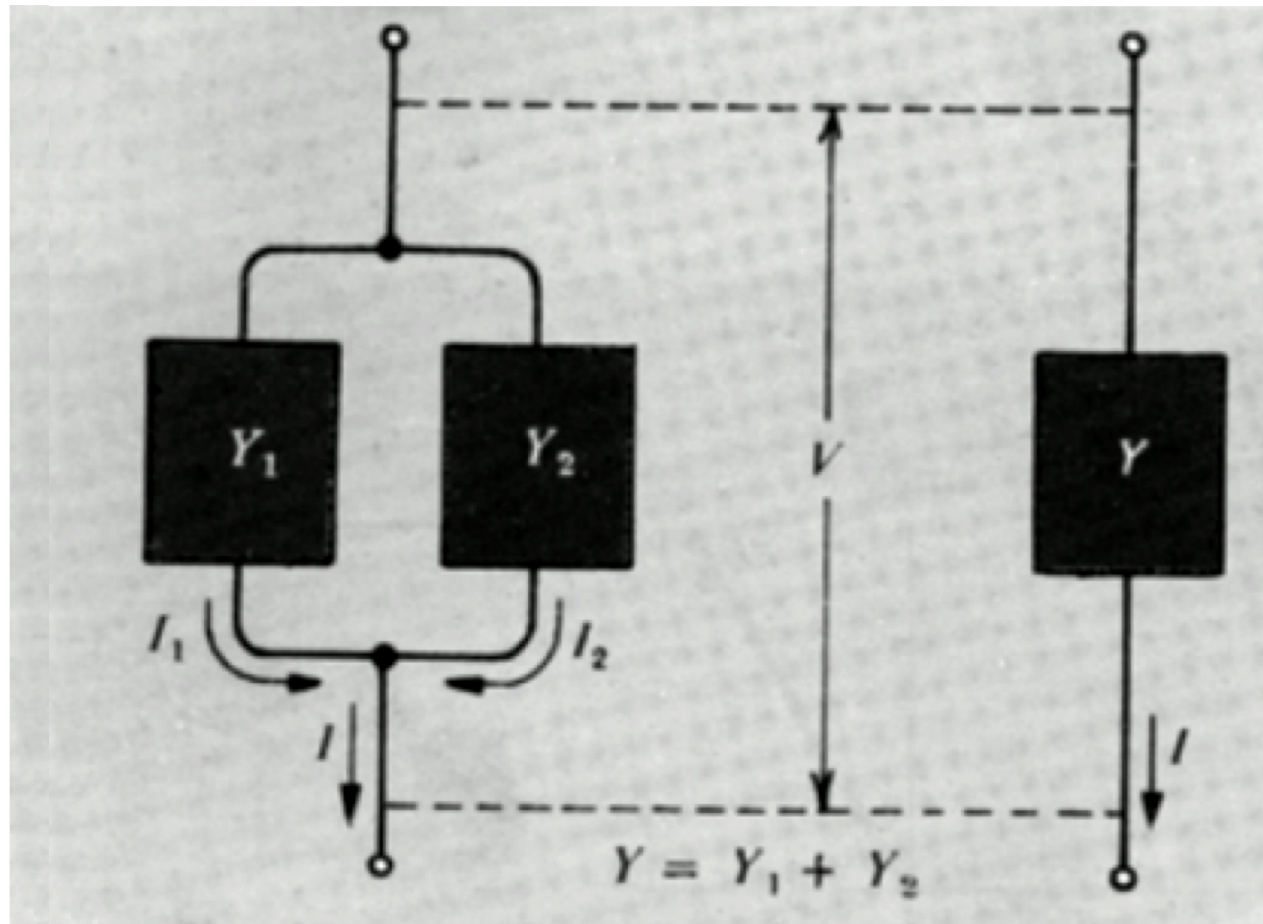
Diferencias de fase entre  $\widetilde{V}_k$  e  $\widetilde{I}_k$  ( $\widetilde{V}_k = Z_k \widetilde{I}_k$ ) para distintos tipos de impedancia



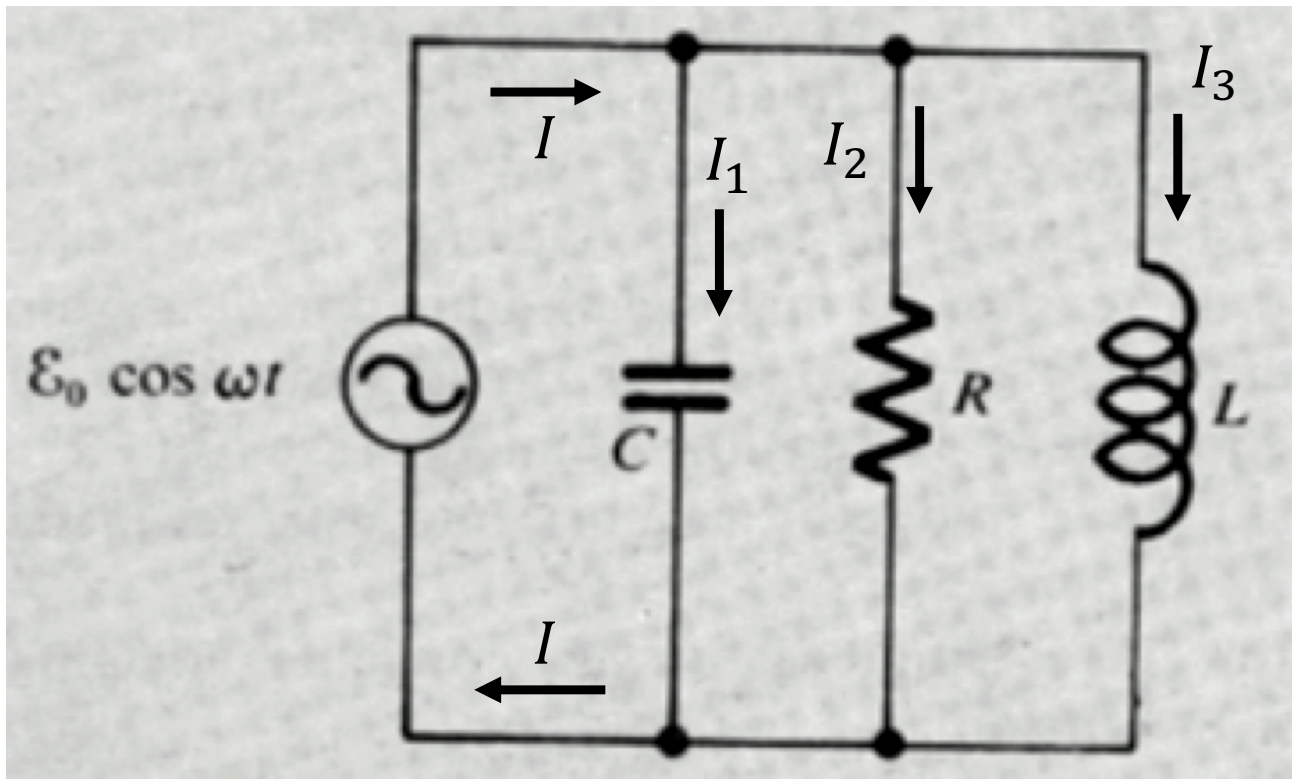
Impedancias en serie:  $Z = Z_1 + Z_2$



Admitancias en paralelo:  $Y = Y_1 + Y_2$



Ejercicio: resolver el circuito RLC paralelo



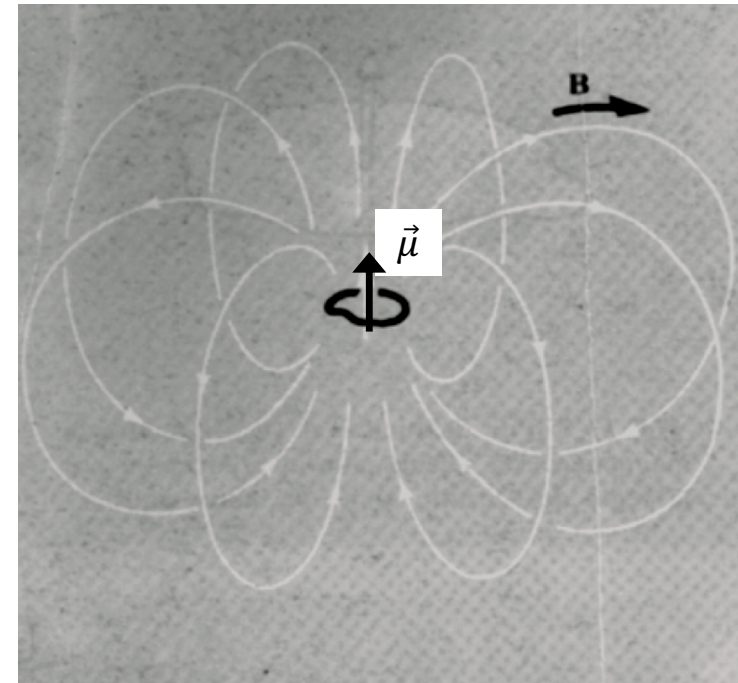
Ayuda: Ver RLC\_paralelo.pdf en campus

# Magnetismo en la materia

# El campo lejano de una espira es dipolar

- La ausencia de monopolos magnéticos hace que un campo dipolar sea la forma más básica de un campo eléctrico.
- Es posible demostrar que el campo magnético **lejos de cualquier espira plana es de tipo dipolar.**
- En coordenadas esféricas y tomando  $\vec{\mu} = IA\hat{z}$  :

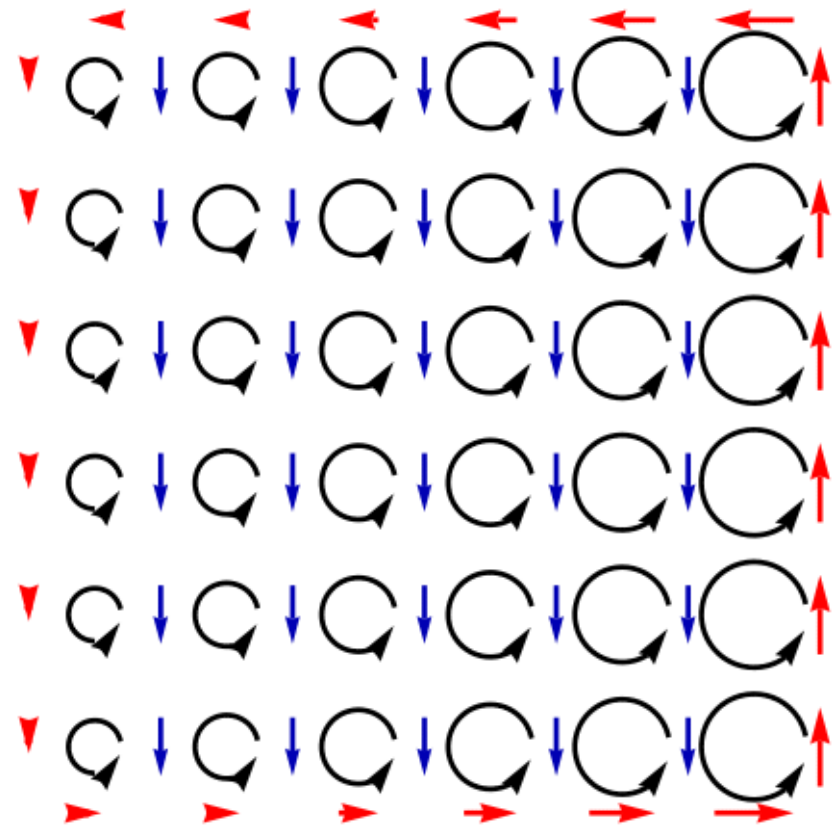
$$B_r = \frac{\mu_0\mu}{2\pi r^3} \cos \theta \quad B_\theta = \frac{\mu_0\mu}{4\pi r^3} \sin \theta \quad y \quad B_\phi = 0$$





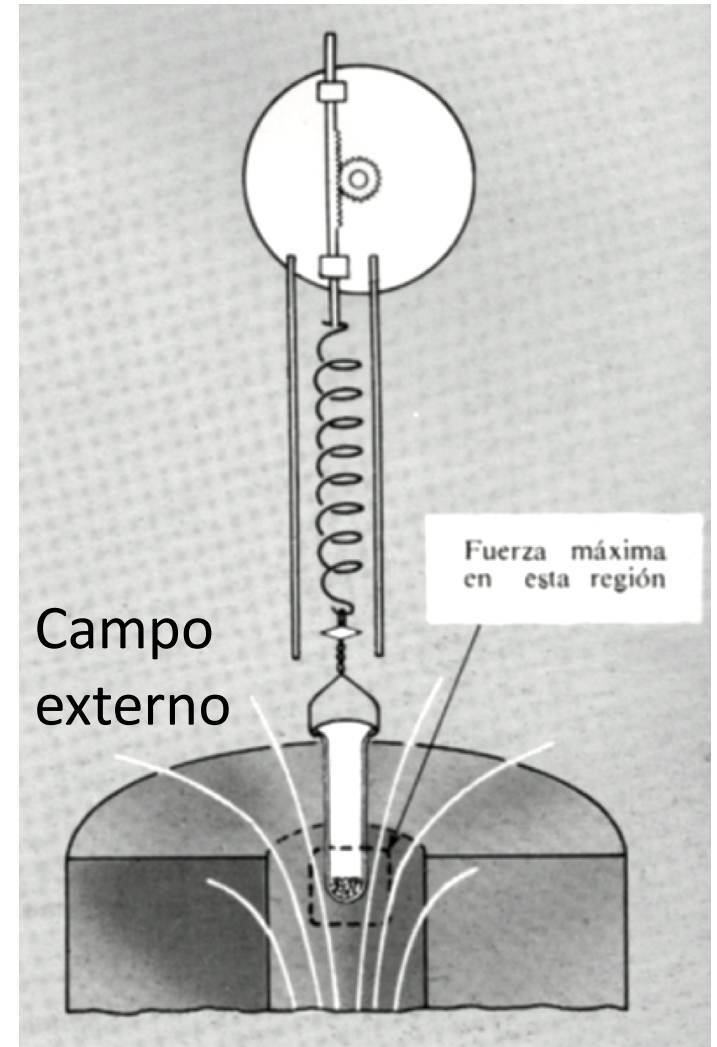
# Magnetismo en la materia

- En particular Ampère formuló la hipótesis más simple sobre el magnetismo en la materia y era que un material puede aproximarse como un conjunto de pequeñas espiras distribuidas dentro del material



# Materiales magnéticos

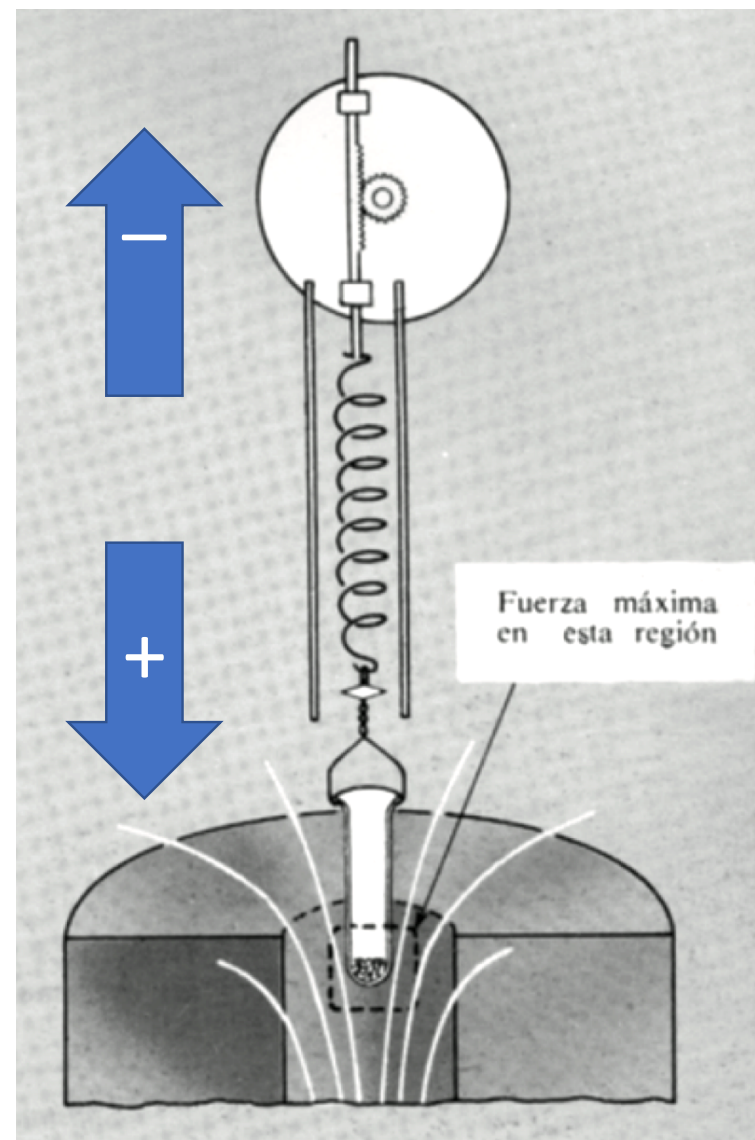
- Los materiales reaccionan de manera diferente a un campo magnético externo.
- Supongamos un campo magnético que llamaremos de vacío generado por un solenoide finito.
- Coloquemos una muestra conectada a un dinamómetro e introduzcamosla en el solenoide.



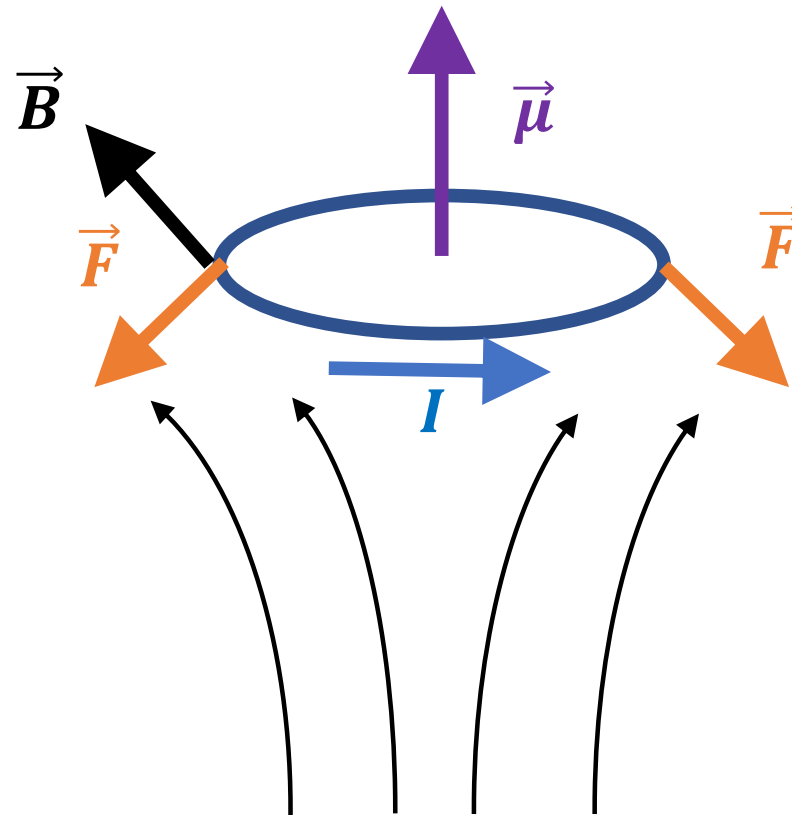
**Tabla 11.1 Fuerza sobre un gramo de muestra cerca del extremo superior de una bobina con  $B_z = 1,8$  tesla  $dB_z/dz = 17$  T/m**

| <i>Substancia</i>      | <i>Fórmula</i>                 | <i>Fuerza*</i> ,<br><i>Newton · 10<sup>-5</sup></i> |
|------------------------|--------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <b>Diamagnéticas</b>   |                                |                                                     |
| Agua                   | H <sub>2</sub> O               | — 22                                                |
| Cobre                  | Cu                             | — 2,6                                               |
| Plomo                  | Pb                             | — 37                                                |
| Cloruro sódico         | NaCl                           | — 15                                                |
| Cuarzo                 | SiO <sub>2</sub>               | — 16                                                |
| Azufre                 | S                              | — 16                                                |
| Diamante               | C                              | — 16                                                |
| Grafito                | C                              | — 110                                               |
| Nitrógeno líquido      | N <sub>2</sub>                 | — 10 (78 K)                                         |
| <b>Paramagnéticas</b>  |                                |                                                     |
| Sodio                  | Na                             | + 20                                                |
| Aluminio               | Al                             | + 17                                                |
| Cloruro de cobre       | CuCl <sub>2</sub>              | + 280                                               |
| Sulfato de níquel      | NiSO <sub>4</sub>              | + 830                                               |
| Oxígeno líquido        | O <sub>2</sub>                 | + 7500 (90 K)                                       |
| <b>Ferromagnéticas</b> |                                |                                                     |
| Hierro                 | Fe                             | + 400 000                                           |
| Magnetita              | Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> | + 120 000                                           |

\* Sentido de la fuerza: hacia abajo +, hacia arriba —,  
Todas las medidas se han efectuado a 20 °C excepto cuando se indica.



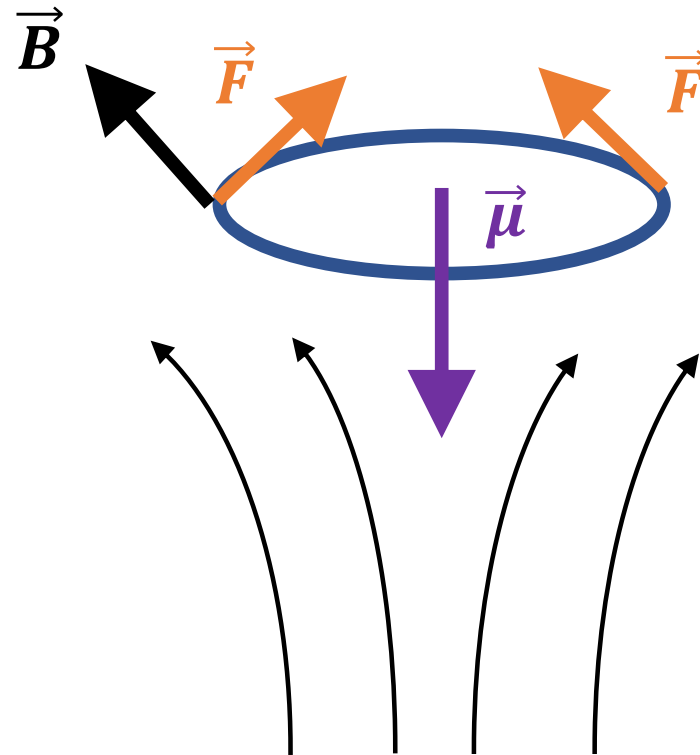
Fuerza  
sobre un  
dipolo en  
campo no  
uniforme



Campo externo  
(solenoid)

$z$

Fuerza  
sobre un  
dipolo en  
campo no  
uniforme



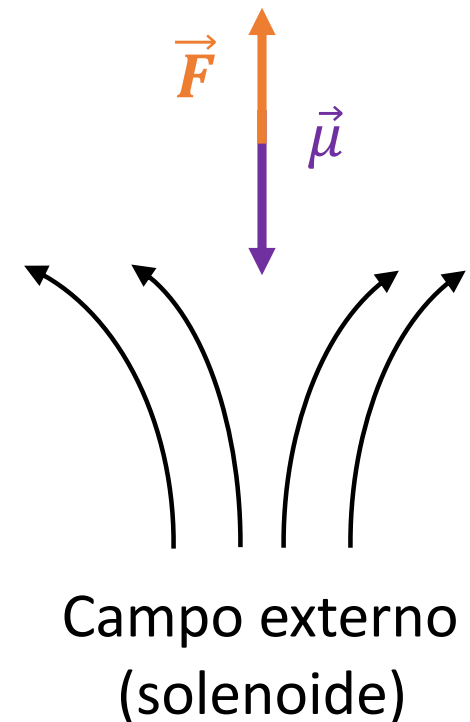
Campo externo  
(solenoid)



z

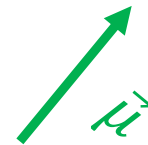
# Diamagnetismo

- En los elementos diamagnéticos, el campo exterior induce a nivel atómico y molecular momentos dipolares magnéticos microscópicos en la dirección opuesta.
- Se trata de un efecto descrito por la mecánica cuántica.
- En consecuencia el campo en el interior del material es menor que el campo externo.
- La fuerza resultante sobre el dipolo inducido tiende a alejarlo del solenoide



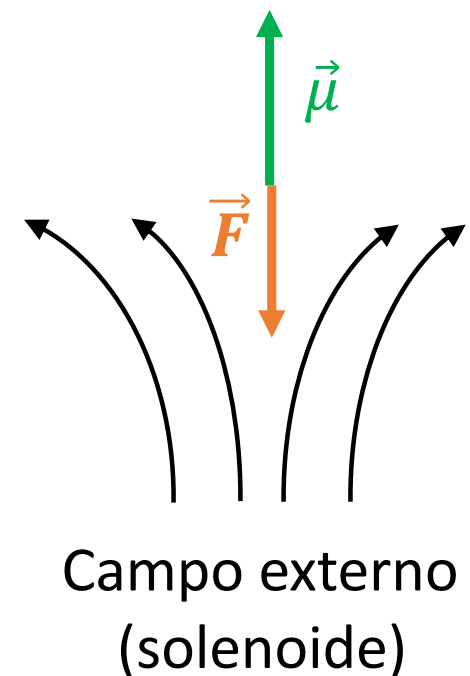
# Paramagnetismo

- Estructura formada por átomos que poseen dipolos magnéticos permanentes normalmente distribuidos al azar.



# Paramagnetismo

- Estructura formada por átomos tienen que poseen dipolos magnéticos permanentes normalmente distribuidos al azar.
- Dipolos atómicos se alinean con el campo externo.
- Es atraído hacia donde el campo externo aumenta





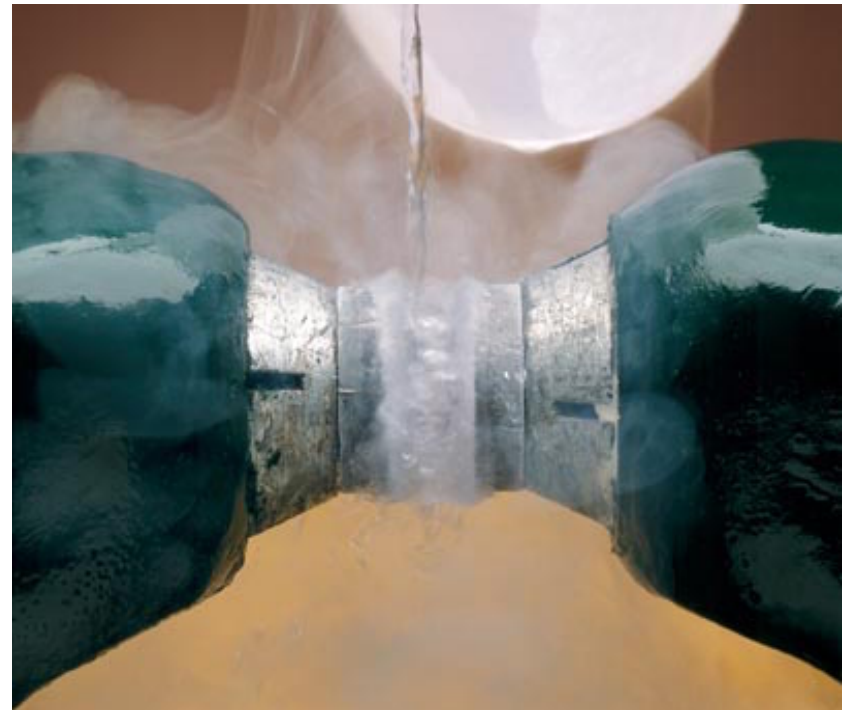
# Paramagnetismo

- Estructura formada por átomos tienen que poseen dipolos magneticos permanentes normalmente distribuidos al azar.
- Dipolos atómicos se alinean con el campo externo.
- Es atraído hacia donde el campo externo aumenta
- Al dejar de exponer el material al campo externo, los dipolos se vuelven a desordenar.



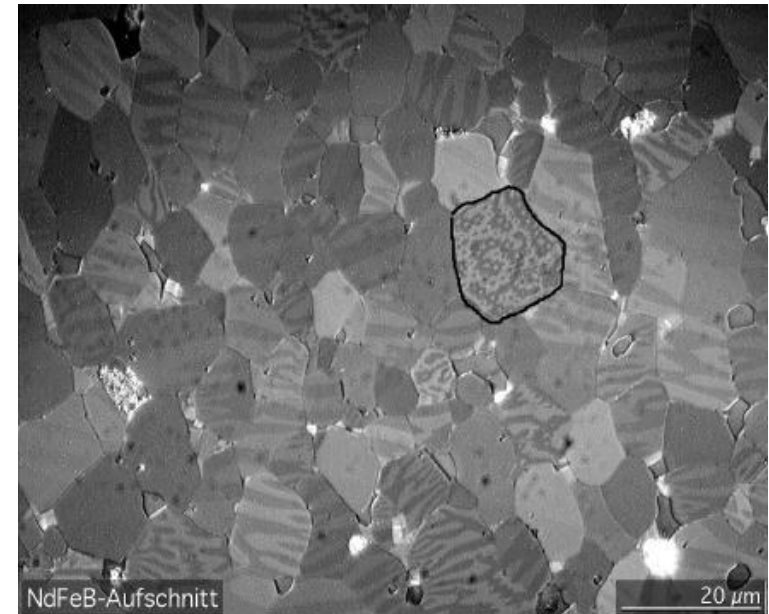
# Paramagnetismo

- En general son fuerzas débiles, pero en el caso de algunos líquidos, la fuerza es capaz de compararse al peso
- La figura muestra oxígeno líquido siendo vertido entre los polos de un imán



# Ferromagnetismo

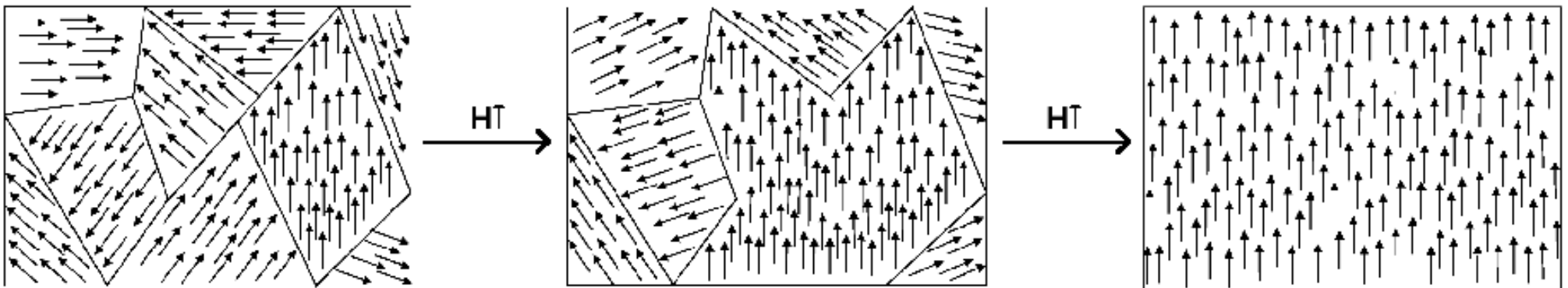
- Átomos tienen dipolos magnéticos permanentes.
- Por razones cuánticas, estos materiales poseen zonas llamadas dominios magnéticos.
- Los dominios tienen un tamaño de algunos  $\mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ .
- En estos dominios, los dipolos magnéticos de los átomos/moléculas están 100% alineados.



Vista de dominios magnéticos (rayas oscuras y claras) en una aleación usada para hacer imanes

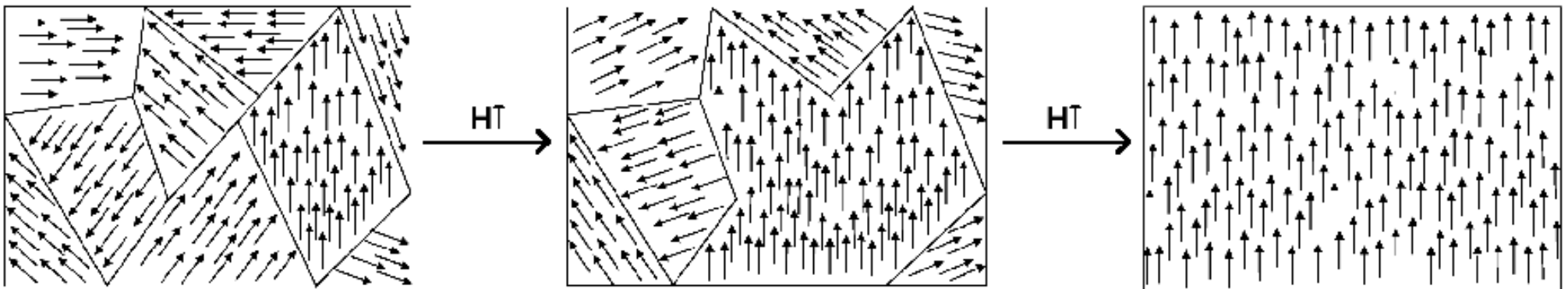
# Ferromagnetismo

- Al ser expuestos a un campo externo los dominios se alinean más o menos con él dependiendo de la intensidad de aquel, y la temperatura.
- Son materiales atraídos al campo externo con una fuerza mayor a los paramagnéticos.
- Dentro del material el campo puede ser varios órdenes de magnitud más grande que el campo externo.

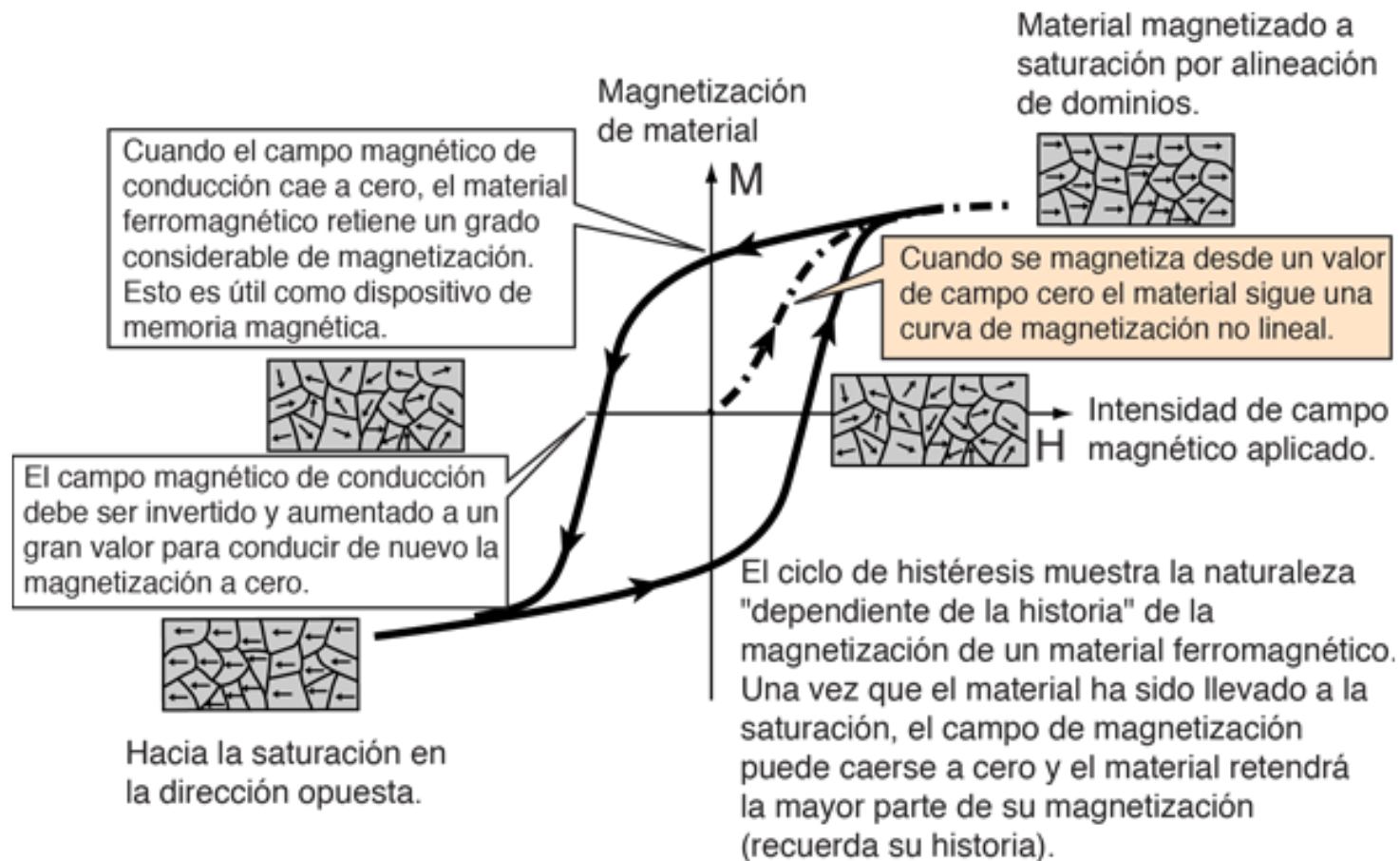


# Ferromagnetismo

- Al quitar el campo externo algunos dominios pueden desorganizarse, otros no, quedando el material magnetizado permanentemente.
- Para desmagnetizar hay que calentarlo mucho o alterarlo mecánicamente.

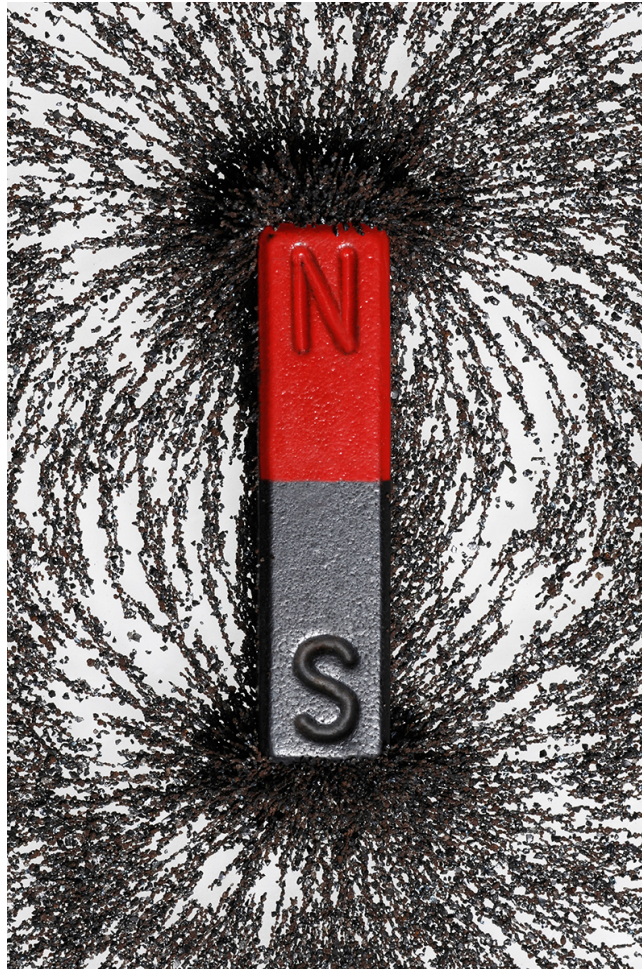


# Ferromagnetismo: ciclo de Histéresis





# Imanes permanentes



# Ley de Ampère para materiales magnéticos



# Ley de Ampère para materiales magnéticos

- En materiales paramagnéticos y diamagnéticos el campo generado por el material  $\vec{B}_{mat}$  es proporcional al campo externo  $\vec{B}_{ext}$

$$\vec{B}_{mat} = \chi_m \vec{B}_{ext}$$

donde  $\chi_m$  es la susceptibilidad magnética del material

- Entonces el campo total en el material es la suma del campo generado por el material y el campo externo.

$$\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{mat} = \vec{B}_{ext} + \chi_m \vec{B}_{ext} = (1 + \chi_m) \vec{B}_{ext}$$

# Ley de Ampère para materiales magnéticos

- De la misma manera que pensamos el campo  $\vec{D}$  con dieléctricos, definimos el campo  $\vec{H}$  tal que:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{(1 + \chi_m)\mu_0} = \frac{\vec{B}}{\mu_m}$$

- Donde  $\mu_m$  es la permeabilidad magnética del material. Entonces:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \vec{J}_{libre} \cdot d\vec{a}$$

Ley de Ampère  
para medios  
magnéticos.