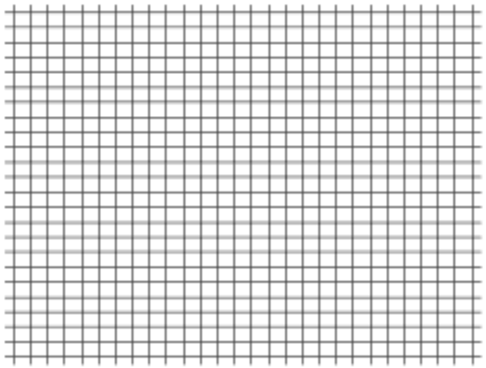
# Fenómenos periódicos

- Corazón
- Respirar
- Hamaca
- Bandera
- Movimiento de estrellas, planetas, lunas
- Nubes
- Sonido
- Luz



# Ondas

Una onda es una perturbación espacio temporal de una cantidad física con cierta periodicidad con la capacidad de transferir energía al propagarse.

- **Ondas transversales**: La perturbación es perpendicular al sentido de propagación de la onda (onda en una cuerda, ondas electromagnéticas, etc)
- **Ondas longitudinales**: La perturbación se da en la misma dirección que la propagación de la onda (ondas sonoras)

# Ondas electromagnéticas

# La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Conocemos bien la ley de Ampère

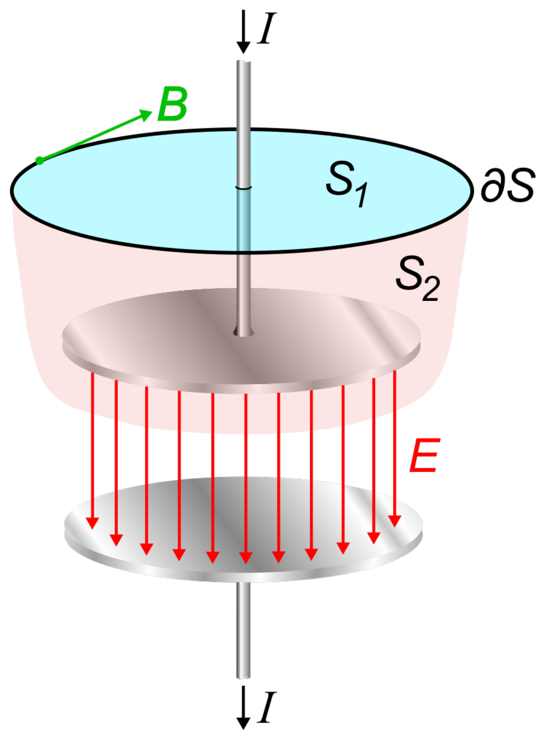
$$\oint_{C} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{S} \vec{J} \cdot \vec{ds}$$

Supongamos un capacitor cargándose a una velocidad dada por

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

- La corriente $I$ da lugar a un campo magnético $\vec{B}$ tal que si la superficie $S_1$ está limitada por el camino $\partial S$:

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J} \cdot \vec{ds} = \mu_0 I$$

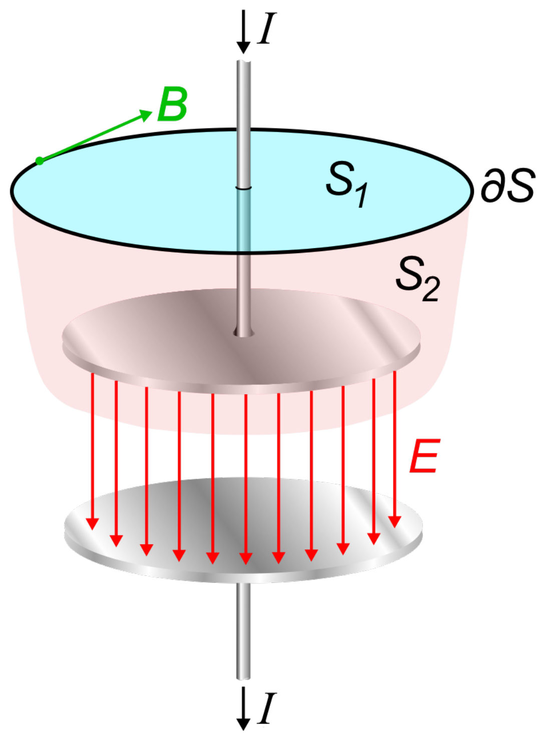


# La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- El resultado debe valer para toda superficie limitada por $\partial S$ incluyendo $S_2$ a través de la cual no pasa corriente !!

- Maxwell corrigió la ley de Ampère para salvar esta inconsistencia agregando un término dependiente del flujo de la derivada temporal del campo eléctrico $\vec{E}$ :en el capacitor

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$

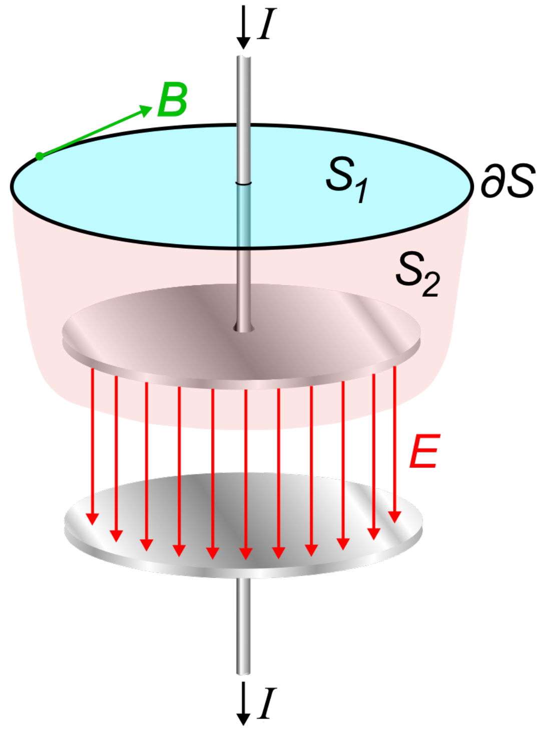


# La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Con lo cual la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial es:

$$\oint_C \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{j} \cdot \overrightarrow{ds} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$

- Como vemos el segundo término del segundo miembro sólo aparece en situaciones no estacionarias.



# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Consideremos ahora las ecuaciones de Maxwell para campos eléctricos y magnéticos **en el vacío**, **sin cargas ni corrientes**.

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

Gauss

$$\oiint \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$

$\nexists$ monopolo

$$\oint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Ampère + Maxwell

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Faraday

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Estas ecuaciones, en forma diferencial se escriben:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

∄ monopolo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ampère + Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Faraday

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Tomemos el rotor de la Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B}$$

- Y derivemos respecto al tiempo la Ley de Ampère + Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Igualando estas dos expresiones tenemos

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Pero, como vimos antes:

$$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right) - \vec{\nabla}^2\vec{E}$$

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Con lo cual

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- O lo que es lo mismo, en coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- La velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío es la velocidad de la luz:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cong 300000\ km/s$$

- La onda electromagnética es entonces una onda **vectorial transversal**
- Una solución sinusoidal plana para $\vec{E}$ que oscila a lo largo del eje $x$ que se propaga a lo largo del eje $z$ es:

Amplitud polarización

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(\overbrace{kz - \omega t}^{\text{fase}})\hat{x}$$

nro de onda frecuencia angular

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Obtengamos $\vec{B}$ mediante la ley de Faraday. En cartesianas:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

- De esto solo sobrevive el segundo término de la componente $y$:

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)\hat{y} = -E_0 k \sin(kz - \omega t)\hat{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

# Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Entonces :

$$\vec{B}(z,t) = E_0 k \hat{y} \int \sin(kz - \omega t) dt = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t)\ \hat{y}$$

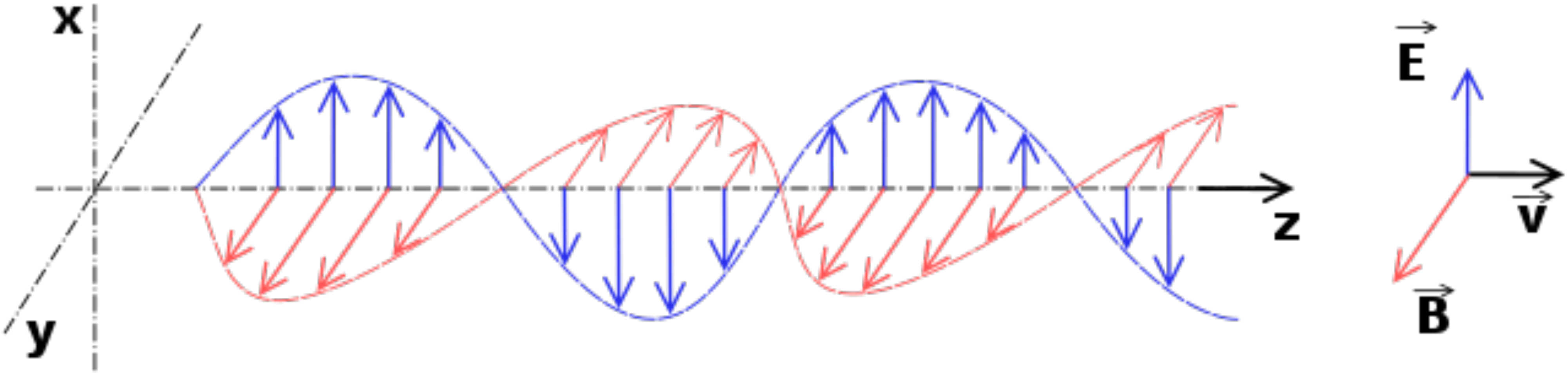
- De la ecuación de onda para $\vec{E}$ sacamos la relación de dispersión:

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau} = \lambda \nu$$

- Por lo tanto:

$$\vec{B}(z,t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t)\hat{y}$$ Perpendiculares y en fase

# Ondas electromagnéticas



# Propiedades de una onda EM viajera

$\vec{E}$ $\perp$ dirección de propagación

$\vec{B}$ $\perp$ dirección de propagación

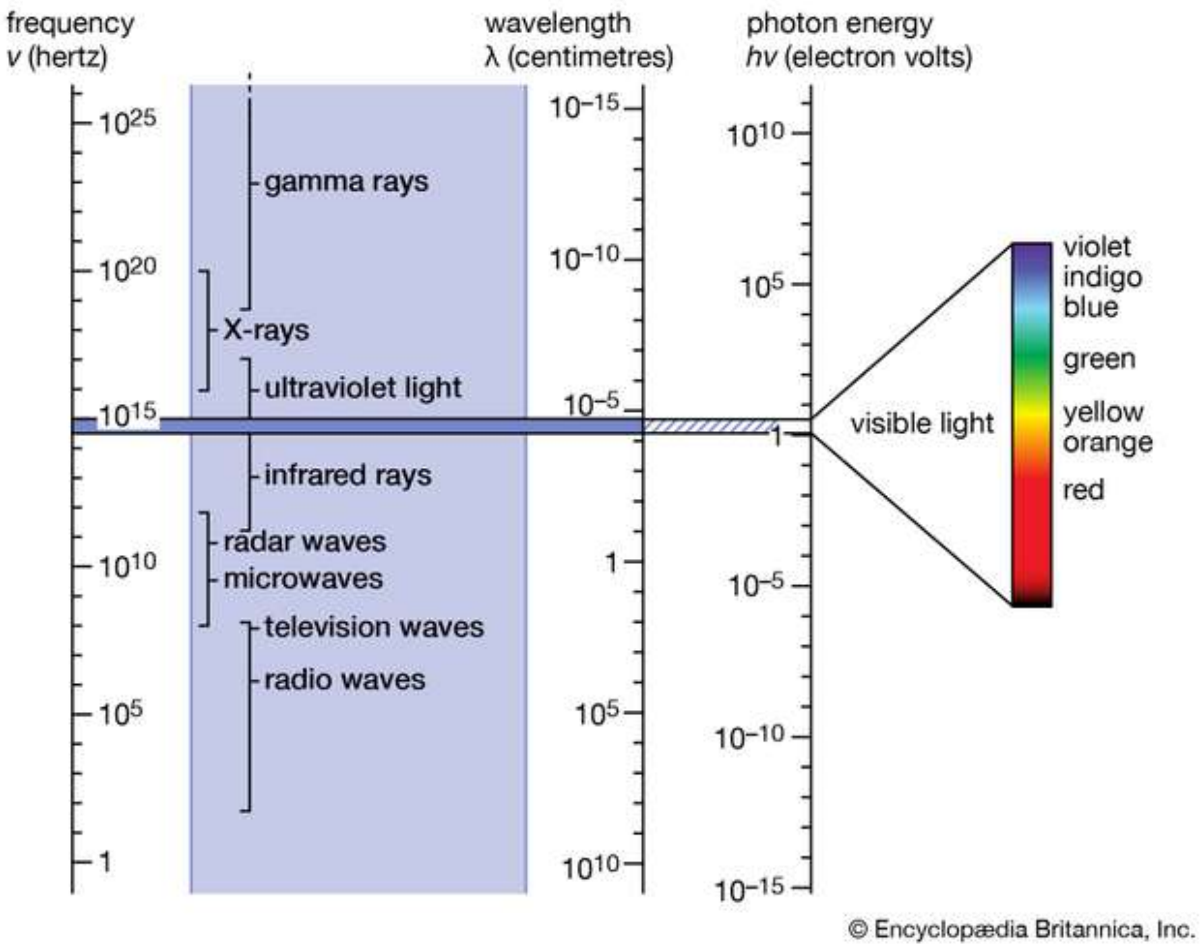
$\vec{E}$ y $\vec{B}$ en fase

$$\vec{E} \perp \vec{B}$$

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

$\vec{E} \times \vec{B}$ es paralelo a la dirección de propagación

# El espectro electromagnético



# Energía transportada por ondas EM

- Una onda electromagnética transporta al propagarse con velocidad $c$ a la energía electromagnética de los campos que la forman.
- Vimos que la densidad de energía por unidad de volumen venía dada por :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- Calculemos la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación.

# Energía transportada por ondas EM

- En $z = 0$ tenemos:

$$E(0,t)^2 = |E(0,t)|^2 = [E_0 \cos(-\omega t)]^2$$

$$B(0,t)^2 = |B(0,t)|^2 = \left[\frac{E_0}{c}\cos(-\omega t)\right]^2$$

- Entonces:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\left[E_0^2 + \left(\frac{E_0}{c}\right)^2 \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}\right][\cos(\omega t)]^2$$

- El promedio de $[\cos(\omega t)]^2$ en un período es $\frac{1}{2}$ entonces si $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4}[E_0^2 + E_0^2] = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

# Energía transportada por ondas EM

- Entonces, la energía promedio que atraviesa una unidad de superficie por unidad de tiempo es:

$$S = \langle u \rangle c = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c$$

- Esto equivale al módulo del vector:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \langle \vec{E} \times \vec{B} \rangle$$

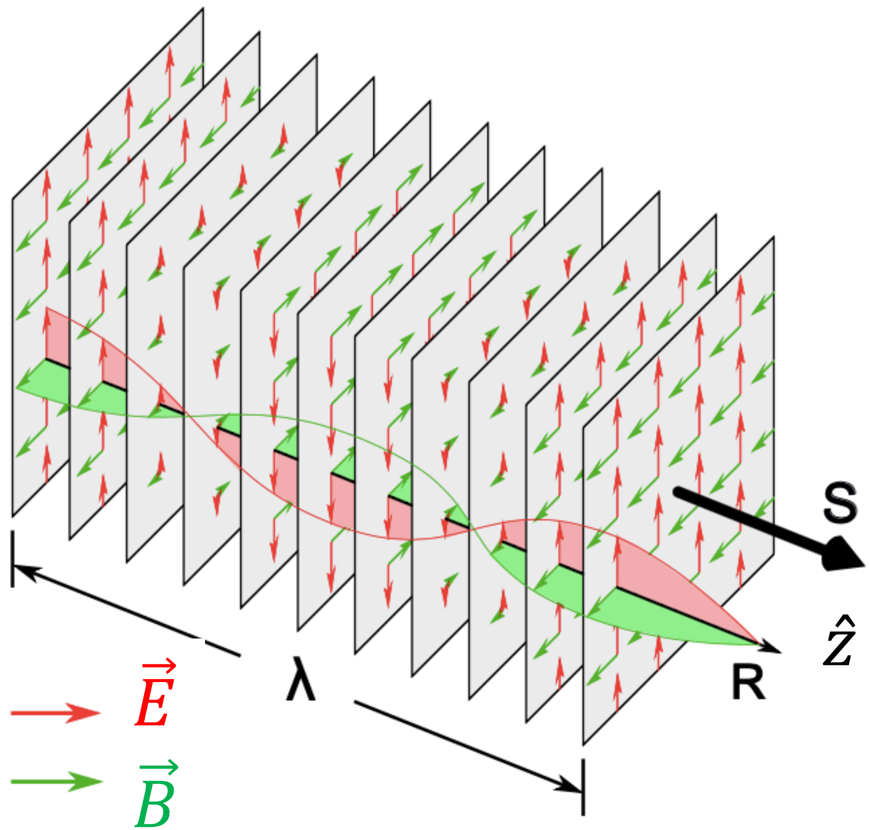
# Ondas planas

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t_0)\hat{x}$$

- En la clase anterior vimos la onda:
  $$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t)\hat{x}$$

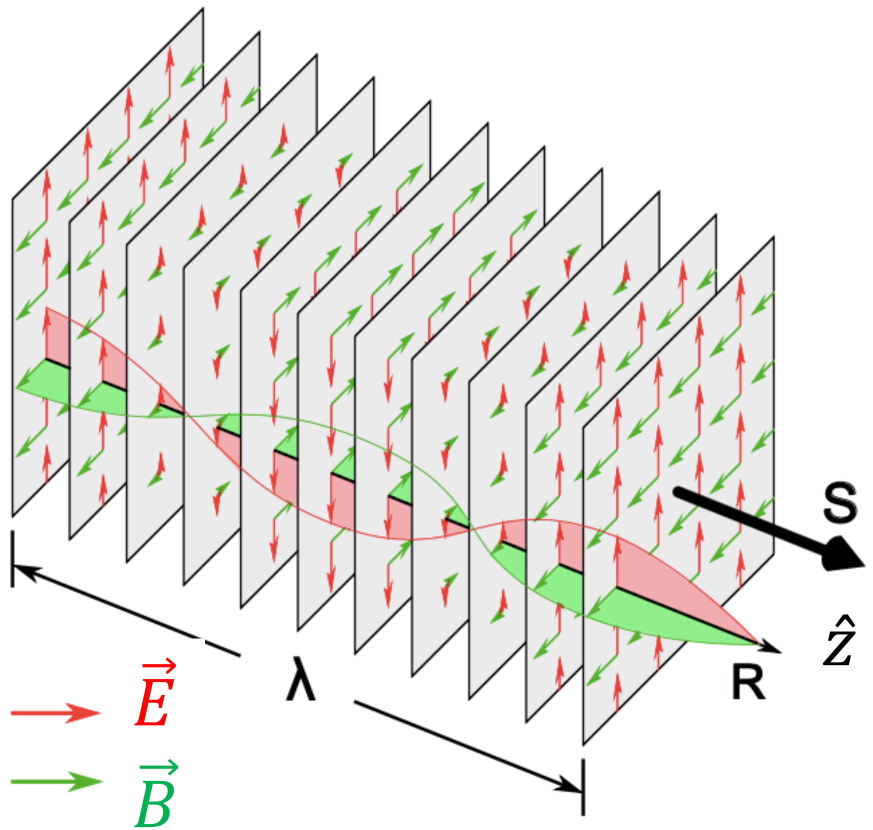
- Para un tiempo fijo $t_0$, cada valor de $z$ corresponde a una superficie del mismo valor de fase.

- En cada plano, los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ no varían.



# Ondas planas

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(kz - \omega t_0)\hat{x}$$




- Para un valor de $t_0$, elijamos un valor de $z = z_0$. La cantidad

$$\varphi_0 = kz_0 - \omega t_0.$$

es la **fase de ese plano o frente de onda**.

- $\varphi_0$ identifica ese frente en particular.
- Al hacer correr $t$ a fase constante vamos ir 'siguiendo' ese frente de onda en posiciones:

$$z = \frac{\varphi_0}{k} + \frac{\omega}{k} t = \frac{\varphi_0}{k} + ct$$

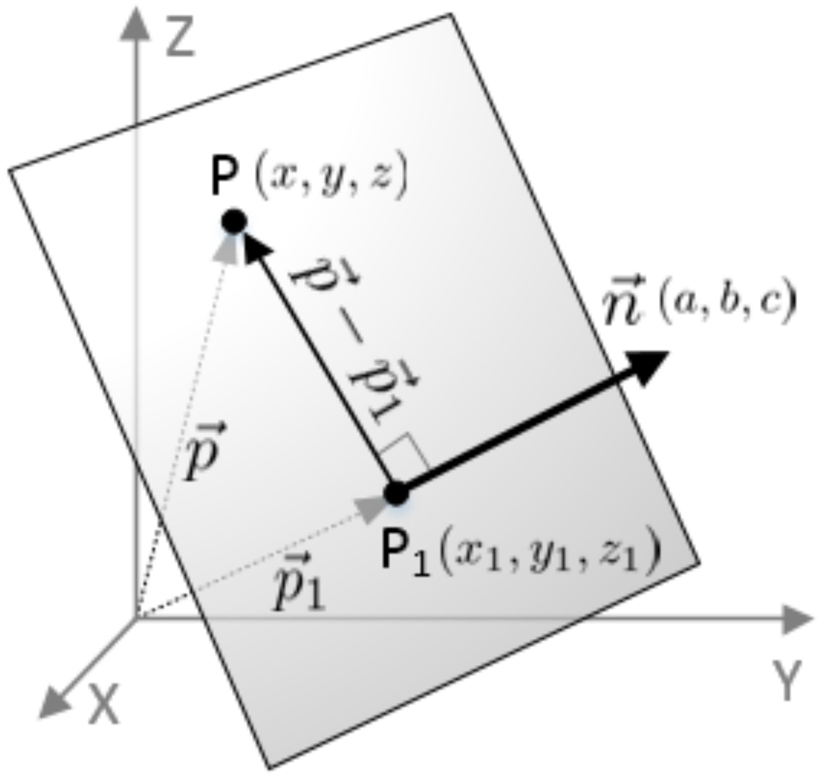
# Ondas planas: ecuación normal del plano

- $P_1$ y $P$ que pertenecen a un plano de normal $\hat{n}$.

- La siguiente es la ecuación normal del plano
$$\hat{n} \cdot (\vec{p} - \overrightarrow{p_1}) = 0$$

- Si dejamos fijo $\overrightarrow{p_1}$ el plano está compuesto por los puntos $\vec{p}$ tales que

$$\hat{n} \cdot \vec{p} = \hat{n} \cdot \overrightarrow{p_1} = constante$$

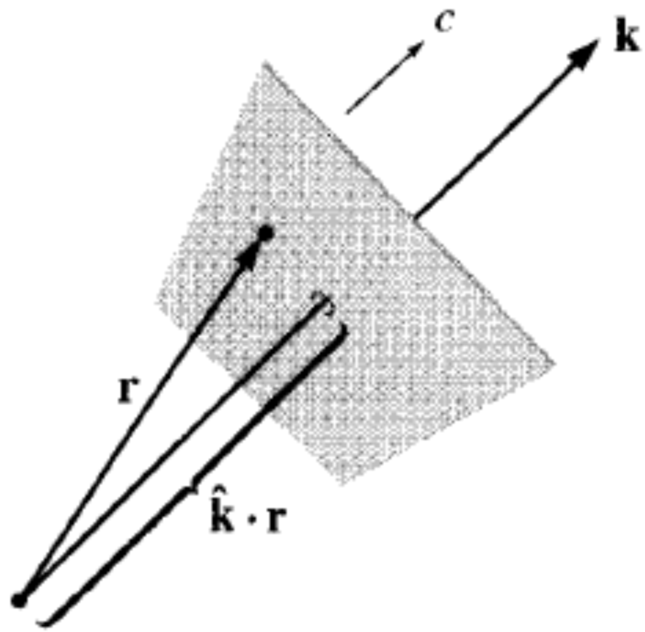


# Ondas planas

- Las ondas planas son una solución de la ecuación de ondas EM:
$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)$$

- Para cada instante $t$, el plano corresponde a
$$\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = constante$$
$$\vec{k}\cdot\vec{r} = constante + \omega t$$

- Esto define el frente de onda, que con $t$ se desplaza en la dirección de $\vec{k}$ con velocidad $c$



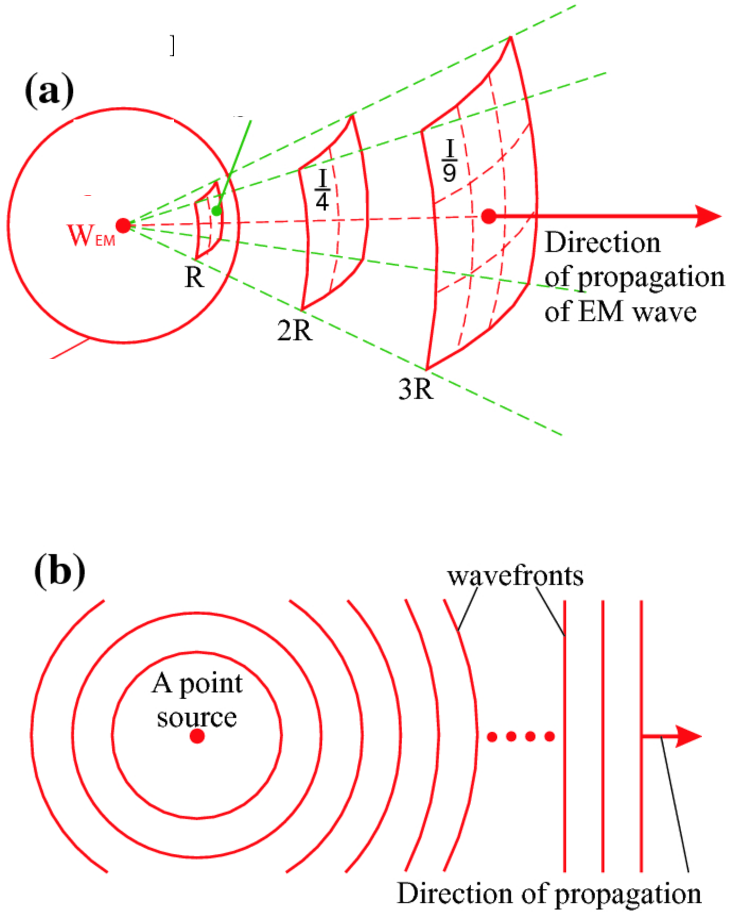
# Ondas esféricas

- Otra solución de la ecuación de onda en esféricas es:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\vec{E}_0}{r}\cos(kr - \omega t)$$

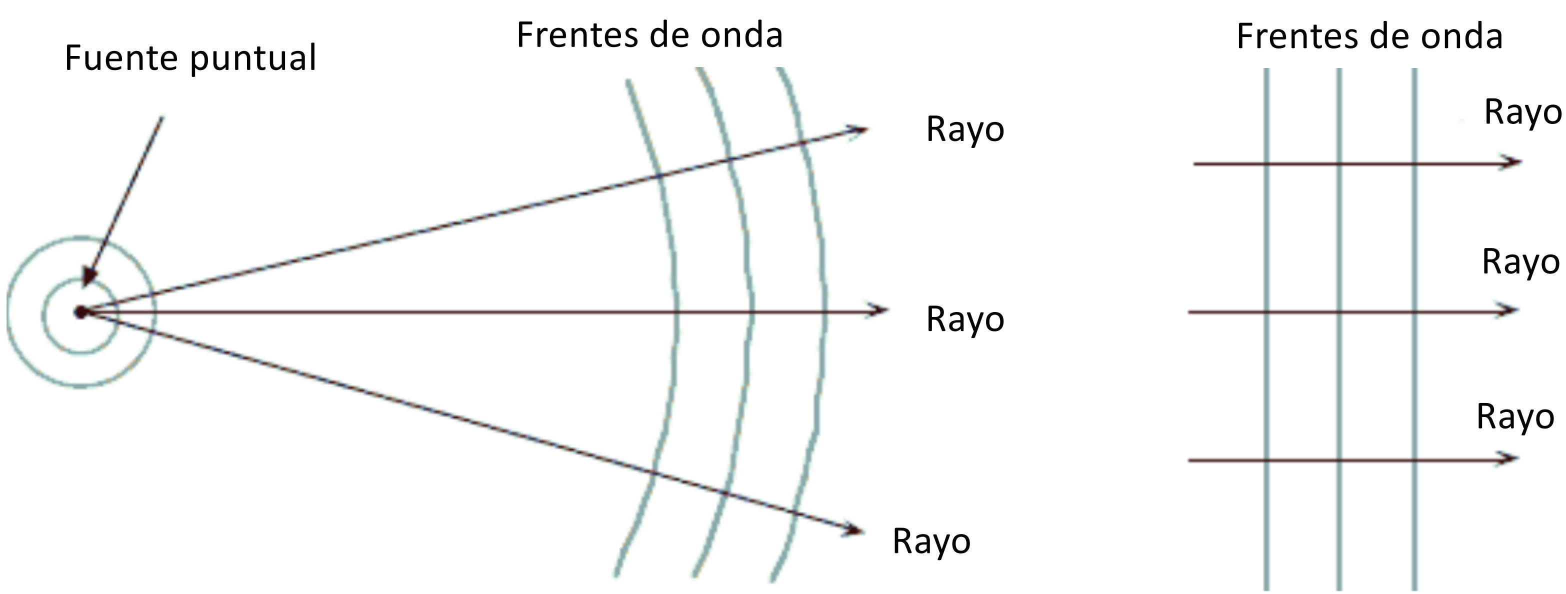
- Donde $\vec{k} = k\hat{r}$ y $\vec{E}_0 \perp \vec{k}$

- Lejos de la fuente, la onda esférica en una pequeña porción puede ser considerada plana en primera aproximación



# Rayos vs. Frentes de onda

- De la misma manera que las líneas de campo los rayos son líneas que tienen como tangentes los vectores de onda $\vec{k}$.



# Refracción y reflexión de la luz

# La luz en la materia

- Cuando la luz encuentra un material, esta puede interactuar con él de diferentes maneras dependiendo normalmente de su longitud de onda:
  - Reflexión
  - Absorción
  - Dispersión
- Materiales opticamente transparentes: materiales en los que los tres efectos son depreciables en el rango de longitudes de onda de interés.
- En el rango visible ($\lambda$ entre 380 y 740 nm), materiales como el agua o el vidrio son transparentes.

# La luz en la materia

- En medios ópticamente transparentes, la velocidad de propagación de la luz $v$ es menor a su valor en el vacío $c$.
- Una cantidad importante de un material transparente es el índice de refracción $n$, definido como

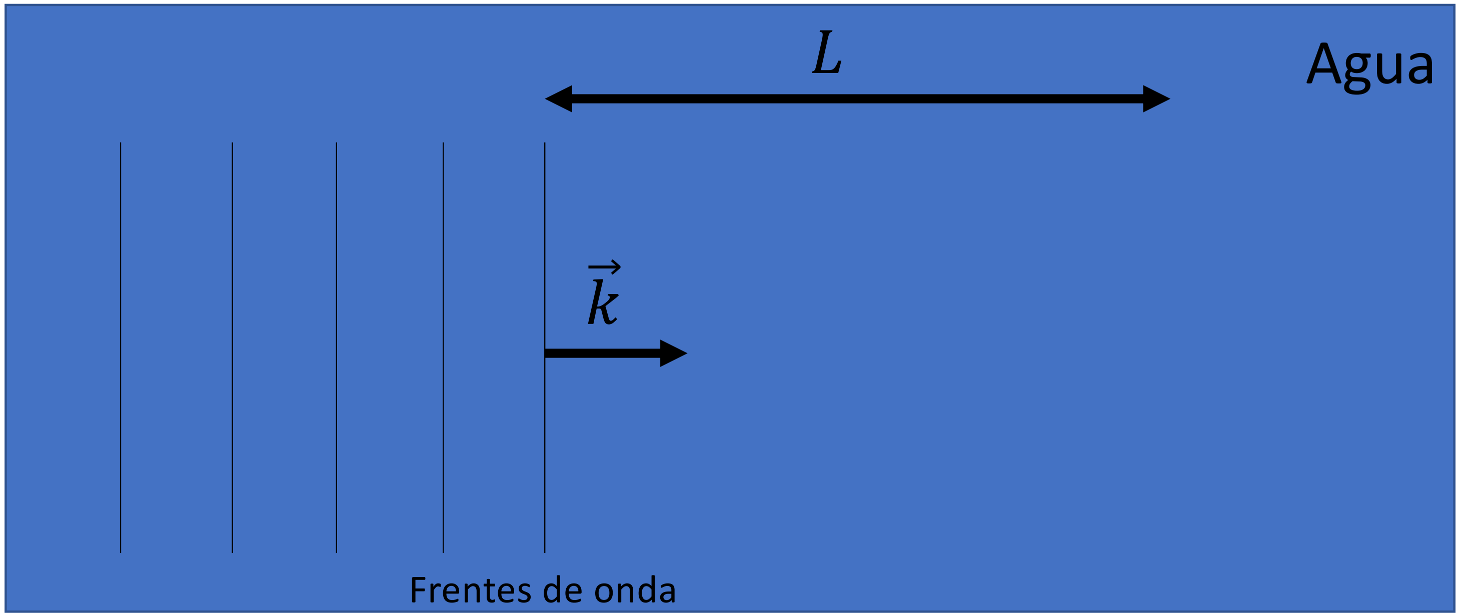
$$n = \frac{c}{v}$$

- $n$ es adimensional y $n \geq 1$

| Table 1. Index of Refraction of Various Materials. | |
|---|---|
| **Material** | **Index of Refraction** |
| Vacuum | 1.0000 |
| Air | **1.0003** |
| Water (pure) | 1.3330 |
| Seawater (35 ppt) | 1.3394 |
| Ethyl alcohol | 1.361 |
| Sugar solution (80% sugar) | 1.49 |
| Glass (soda lime) | 1.510 |
| Bromine (liquid) | 1.661 |
| Ruby | 1.760 |
| Diamond | 2.417 |

# Camino óptico

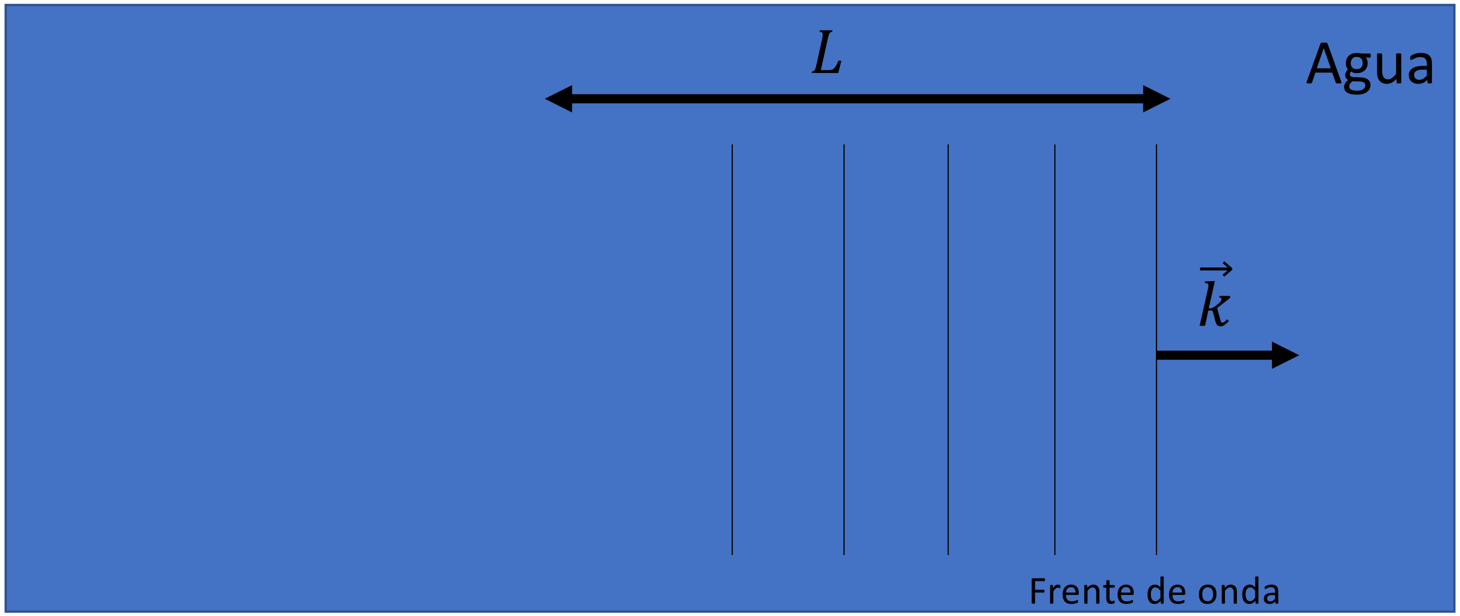
- Dada una onda EM que recorre una distancia $L$



# Camino óptico

- Dada una onda EM que recorre una distancia $L$, el camino óptico se define como:

$$C.O. = nL$$

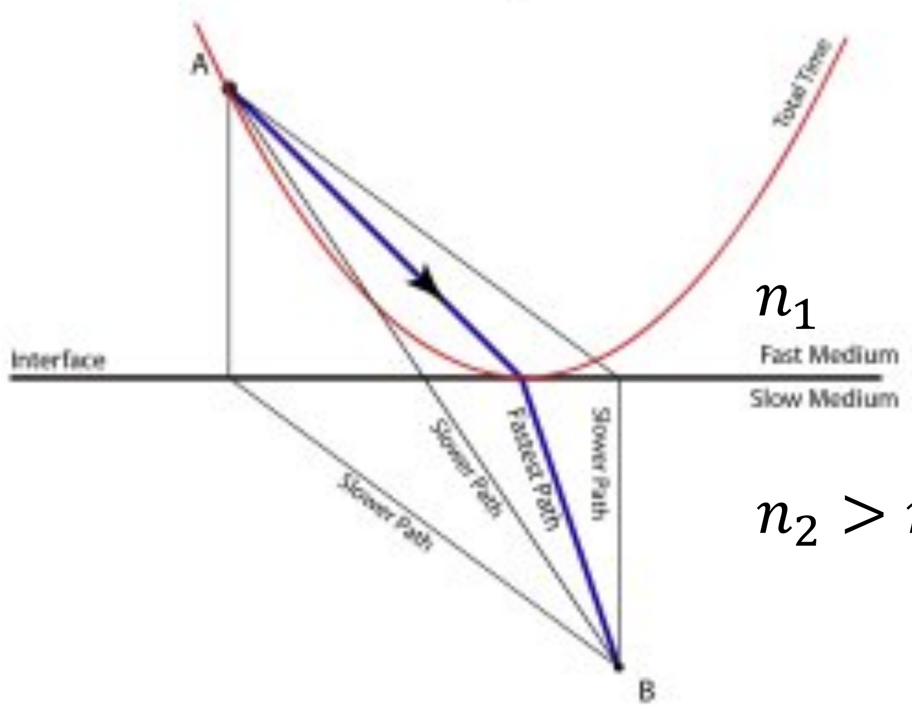


# Principio de Fermat y Ley de Snell

**El principio de Fermat**, relacionado con el principio de mínima acción, dice:

- El camino que recorre la luz entre dos puntos, es tal que minimiza el tiempo en el que realiza el recorrido

- Esto equivale a decir que el recorrido óptimo es el de menor camino óptico.

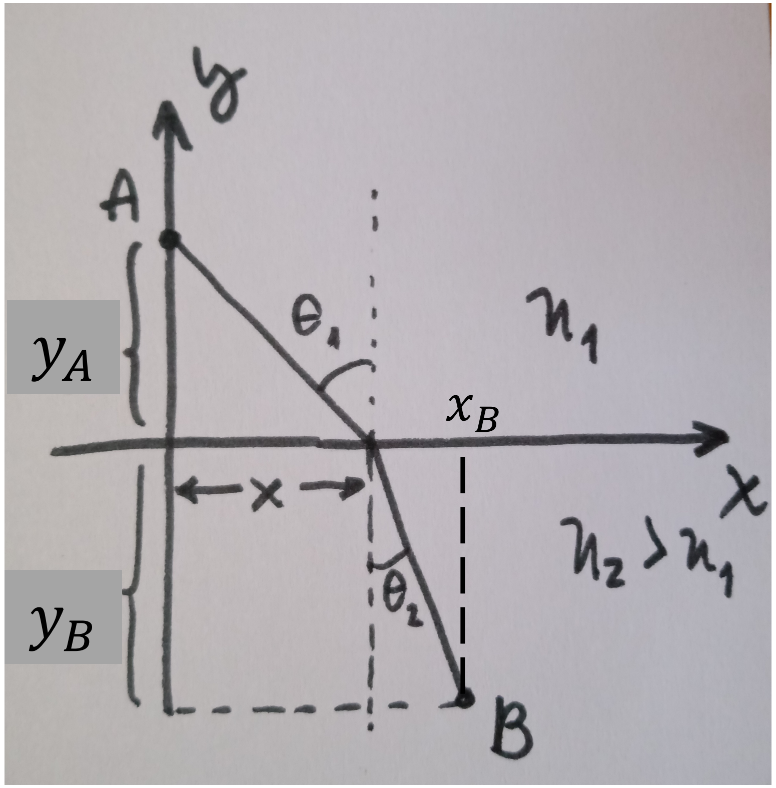



$n_1$

$n_2 > n_1$

# Principio de Fermat y Ley de Snell

- Supongamos dos medios de índices $n_1$ y $n_2 > n_1$.
- El camino de la onda (rayo) pasa por lo puntos A $(0, y_A)$ y B $(x_B, y_B)$.
- Sea $x$ la abcisa del punto sobre la interfase donde impacta el rayo
- El camino óptico total recorrido entre A y B es
$C.O.$
$$= n_1\sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$



# Principio de Fermat y Ley de Snell

$$C.O. = n_1 \sqrt{x^2 + y_A^2} + n_2 \sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}$$

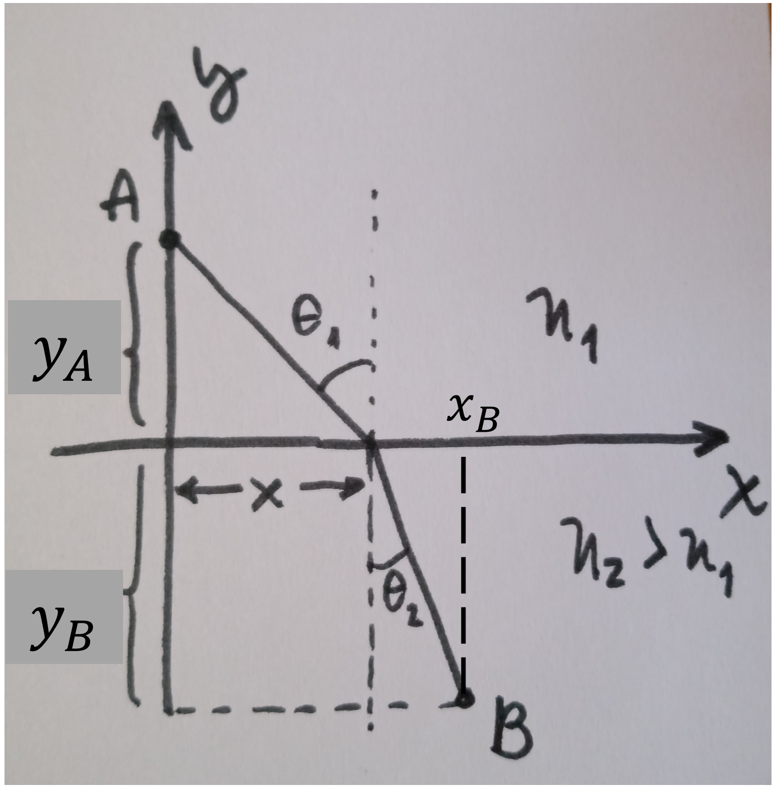
$$\frac{\partial C.O.}{\partial x} = \frac{- n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} + n_2 \frac{+(x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

Busco mínimos

$$\frac{\partial C.O.}{\partial x} = 0$$

Luego

$$\frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}} = \frac{n_2 (x_B - x)}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

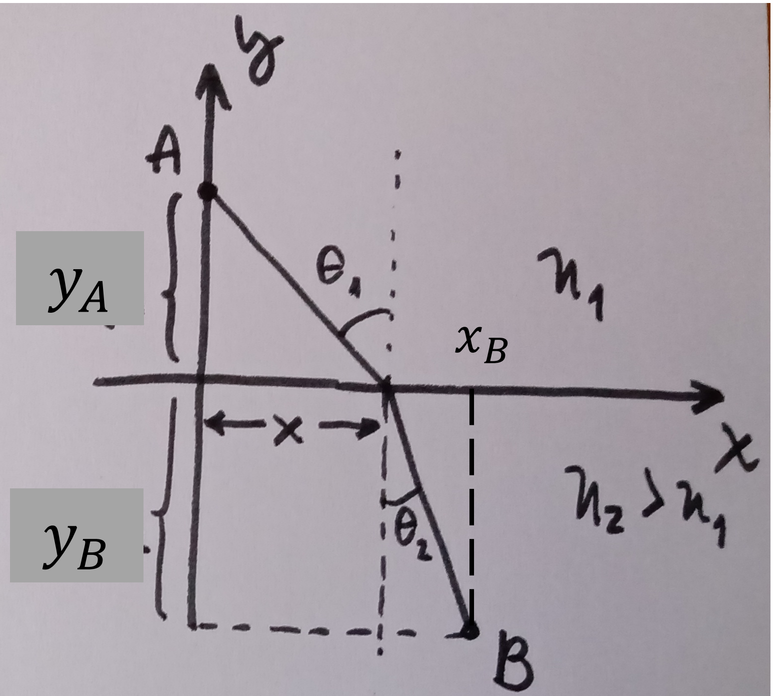


Pero:

$$\text{Sen}\,\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_A^2}}$$

y

$$\text{Sen}\,\theta_2 = \frac{x_B - x}{\sqrt{(x_B - x)^2 + y_B^2}}$$

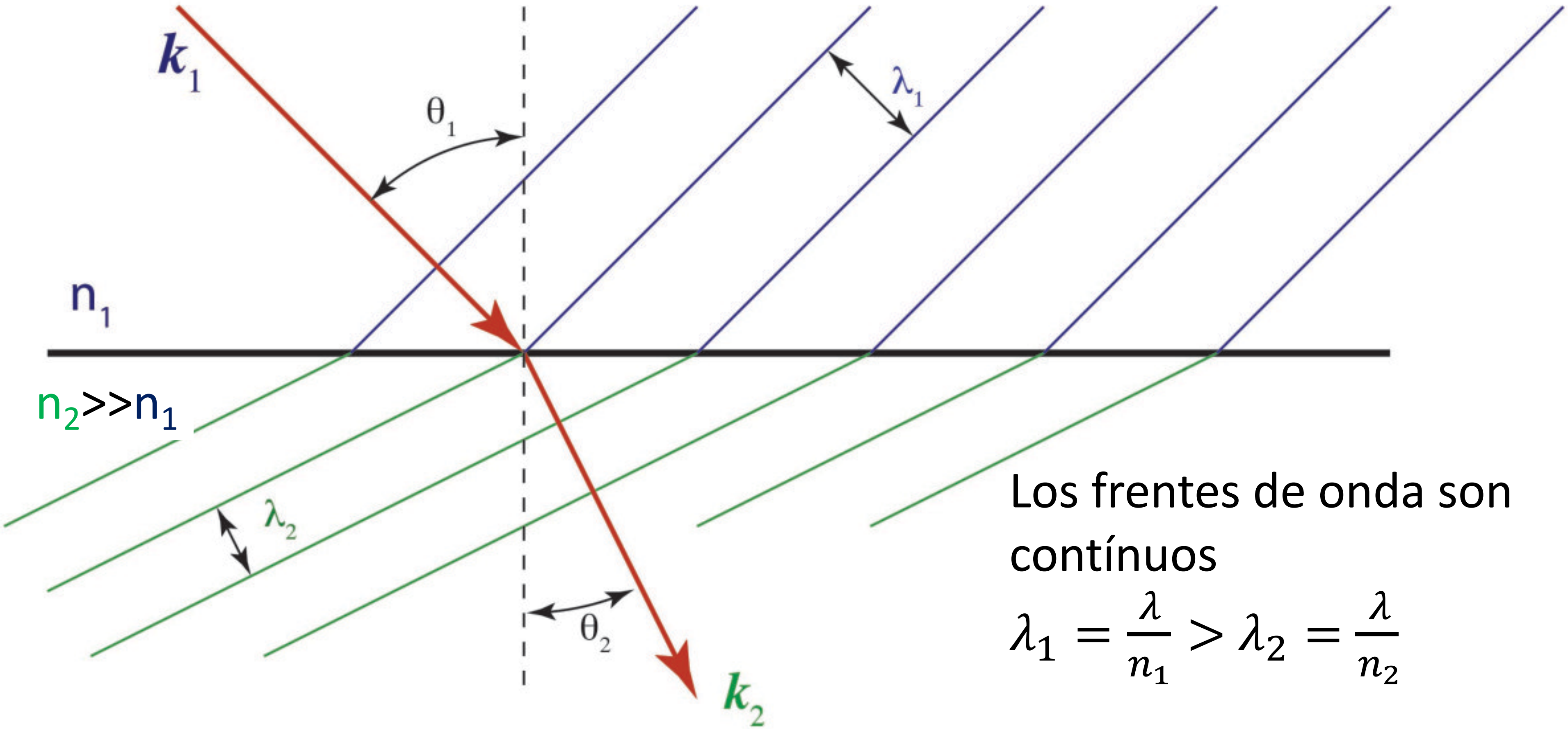



Entonces, la condición que minimiza el C.O. entre A y B es

$$\boxed{n_1\,\text{Sen}\,\theta_1 = n_2\,\text{Sen}\,\theta_2}$$

Ley de Snell

Snell's Law $\quad n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$




Los frentes de onda son contínuos

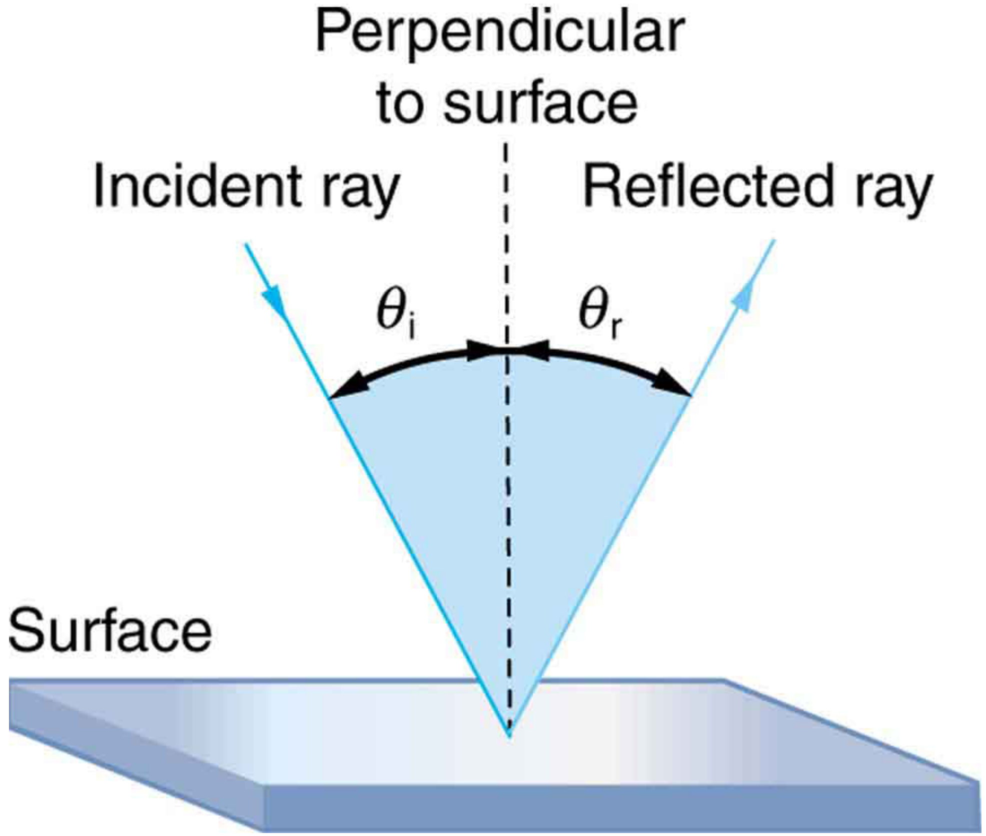
$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{n_1} > \lambda_2 = \frac{\lambda}{n_2}$$

# Ley de Reflexión

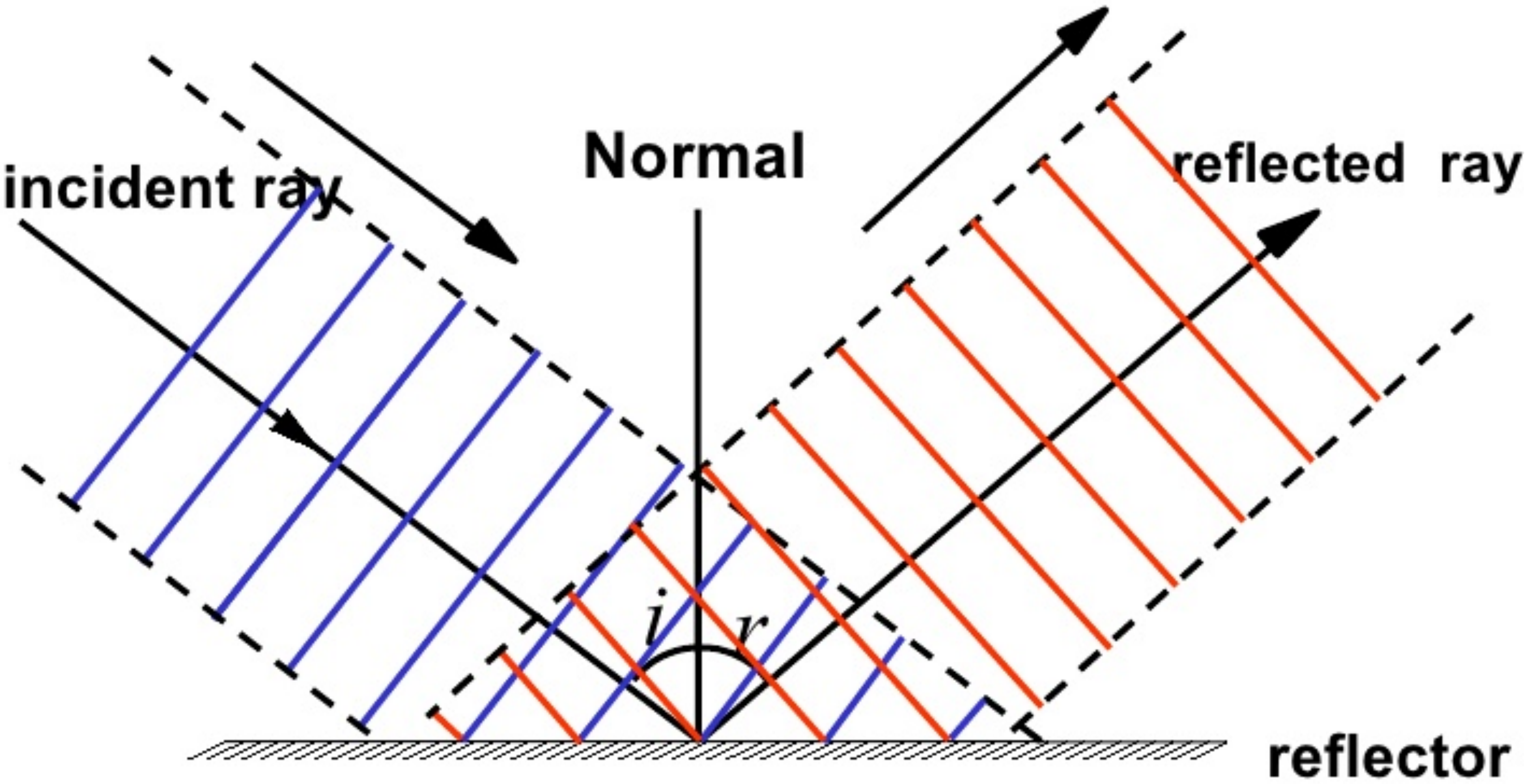
- Cuando una onda electromagnética propagándose en un medio de índice $n_1$ llega a una interfase con otro medio de índice $n_2$ además de refractarse, hay una porción que se refleja:

- Si el rayo (en la dirección del vector $\vec{k}$) incidente forma un ángulo $\theta_i$ con la normal a la interfase, la ley de reflexión dice que si $\theta_r$ es el ángulo del rayo reflejado :

$$\theta_i = \theta_r$$



# Ley de reflexión y frentes de onda



# Reflexión y Refracción en el plano de incidencia

https://phet.colorado.edu/en/simulation/bending-light

# Placas plano paralelas

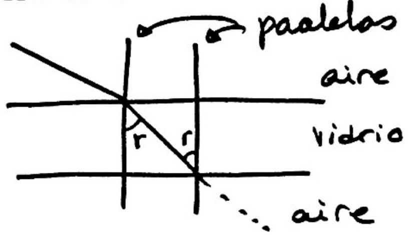
Supongamos una placa de caras paralelas planas de vidrio en aire.

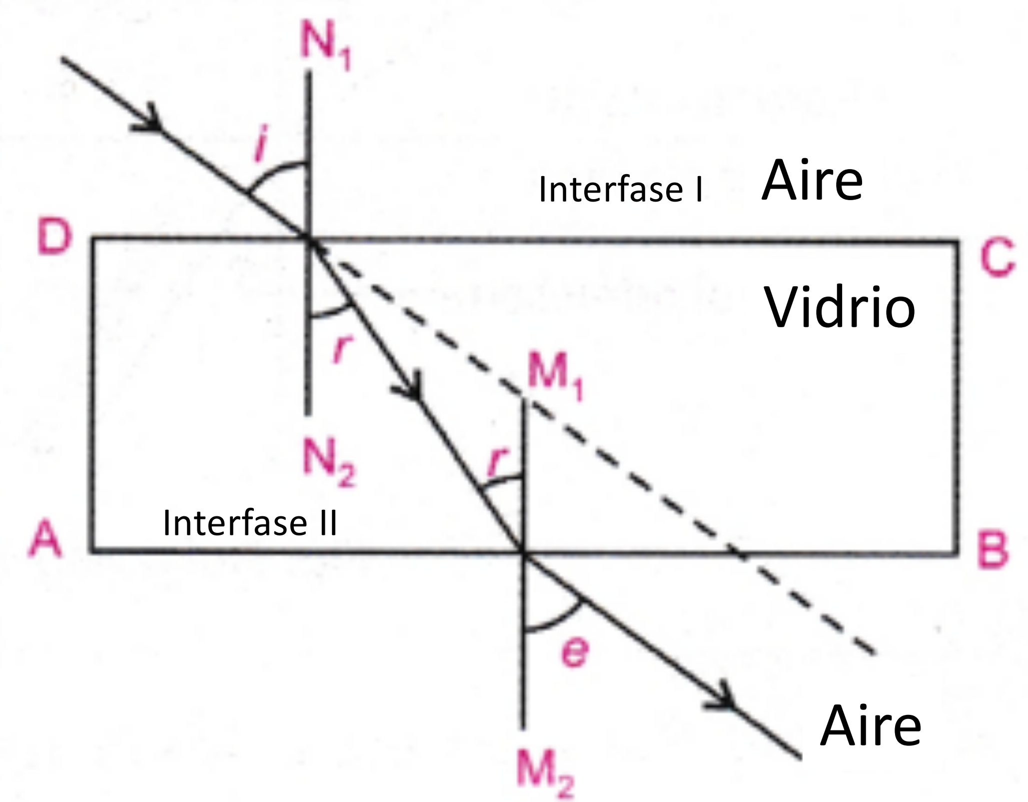
Aire : $n_1$

Vidrio : $n_2$

<u>Interfase I</u> : $n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r)$

<u>Interfase II</u> ángulo de incidencia igual a r por ángulos alternos internos entre paralelas



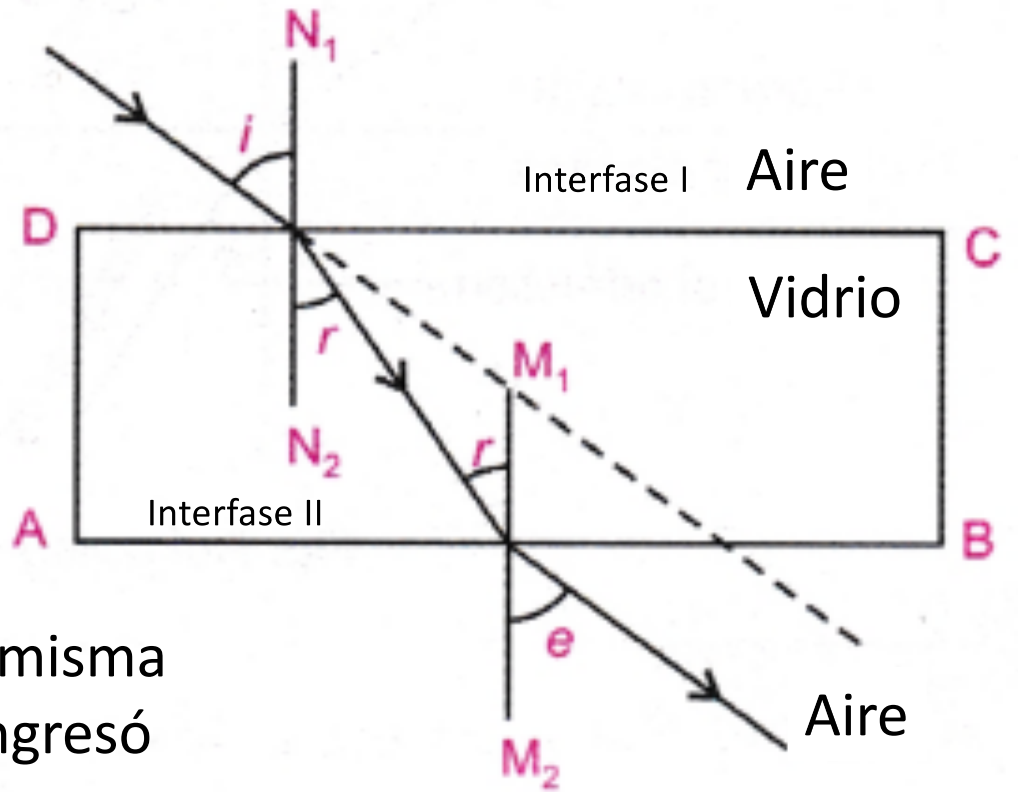
# Placas plano paralelas

Entonces $n_2 \sin(r) = n_1 \sin(e)$

Luego, de las interfases I y II:

$$n_1 \sin(i) = n_2 \sin(r) = n_1 \sin(e)$$

$$\Rightarrow \boxed{i = e}$$




El rayo emerge con la misma dirección con la que ingresó pero desplazado.

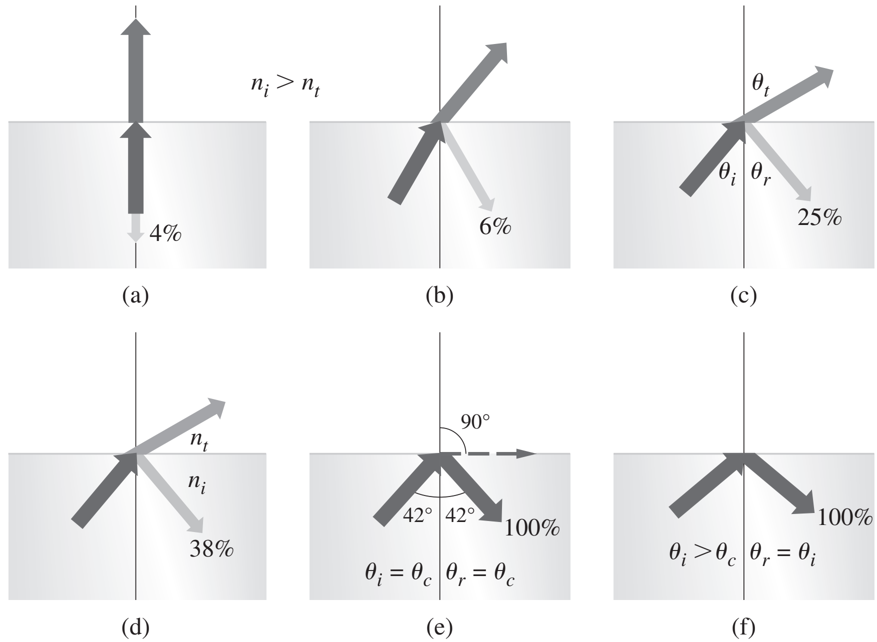
# Reflexión total interna

- $n_t < n_i$

$$\sin\theta_i = \frac{n_t}{n_i}\sin\theta_t$$

- El ángulo crítico

$$\boxed{\sin\theta_c = n_{ti}}$$



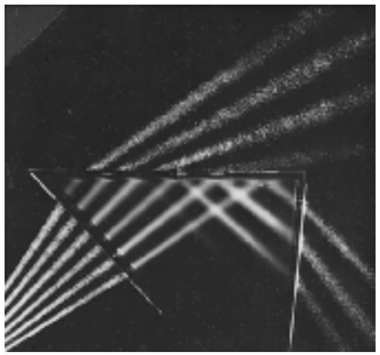
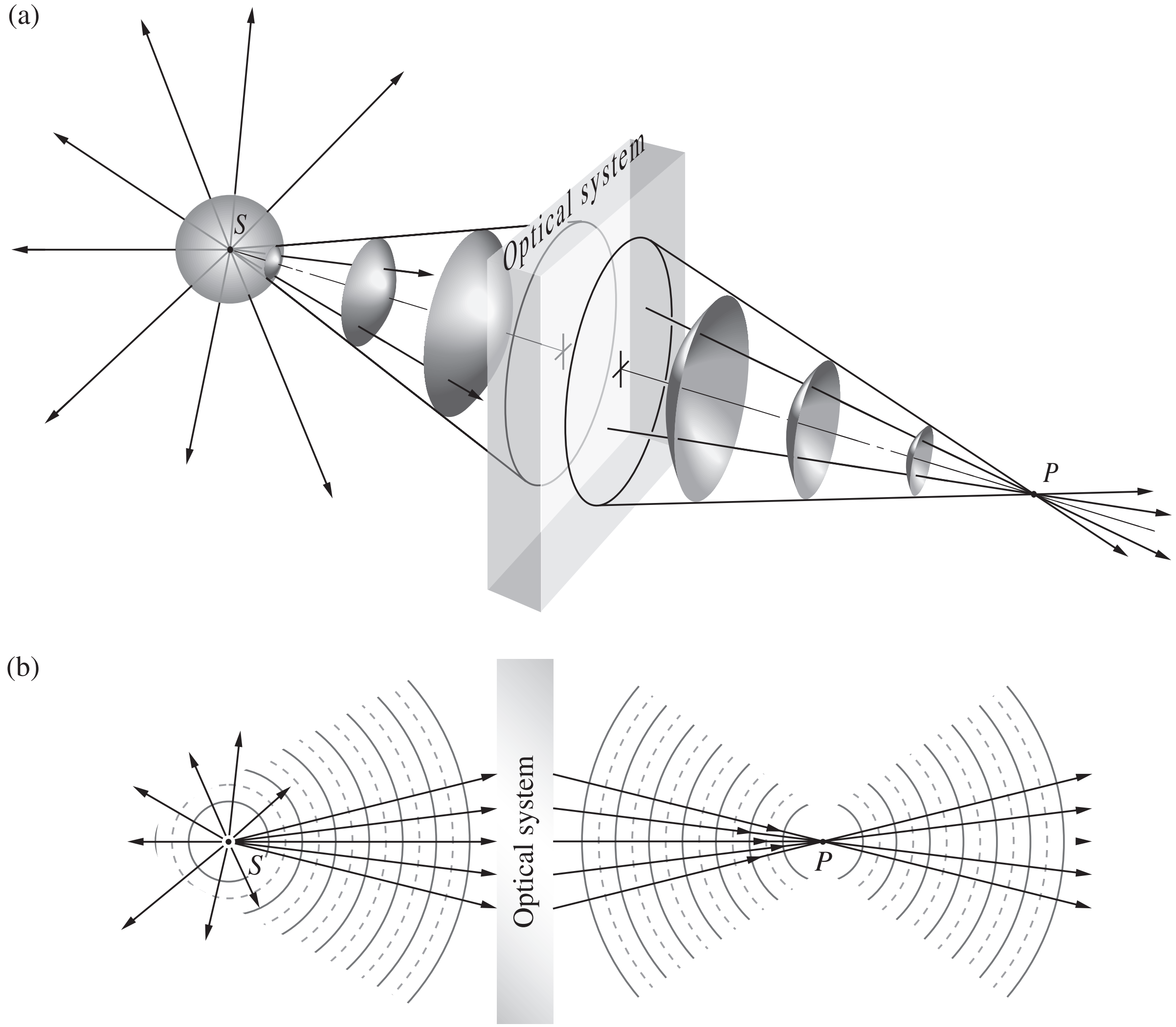



**Figure 4.59** Internal reflection and the critical angle. (Educational Services, Inc.)

# Óptica Geométrica

# Sistemas ópticos

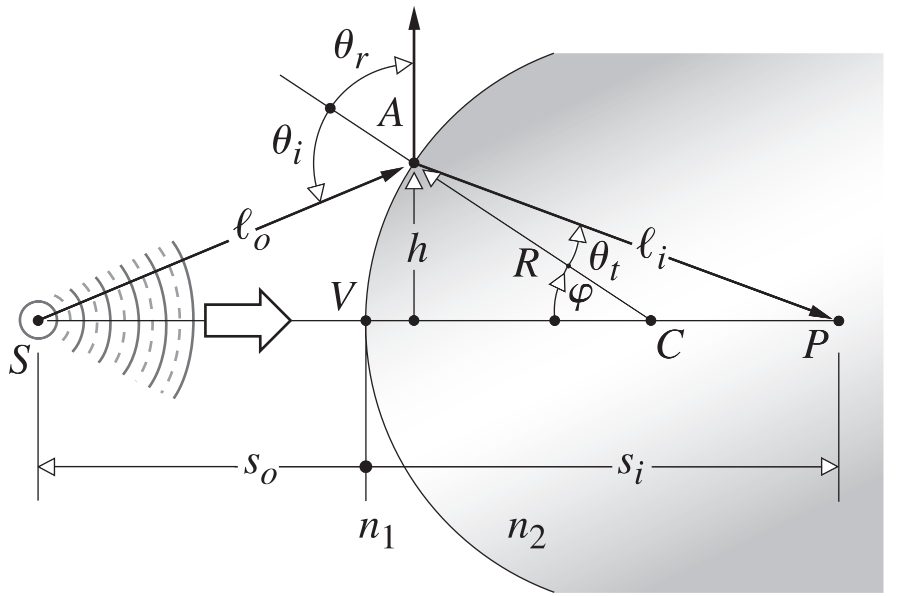
- Una fuente puntual envía ondas esféricas.
- Un cono de rayos entra al sistema óptico, el cual hace que los rayos converjan a un punto P.
- Los frentes de ondas se invierten
- Si nada para la luz en P, las ondas o rayos continúan su camino.



# Sistemas ópticos

- Dioptras
- Lentes
- Espejos

# Superficies esféricas




- La longitud de camino óptico entre S y P es:

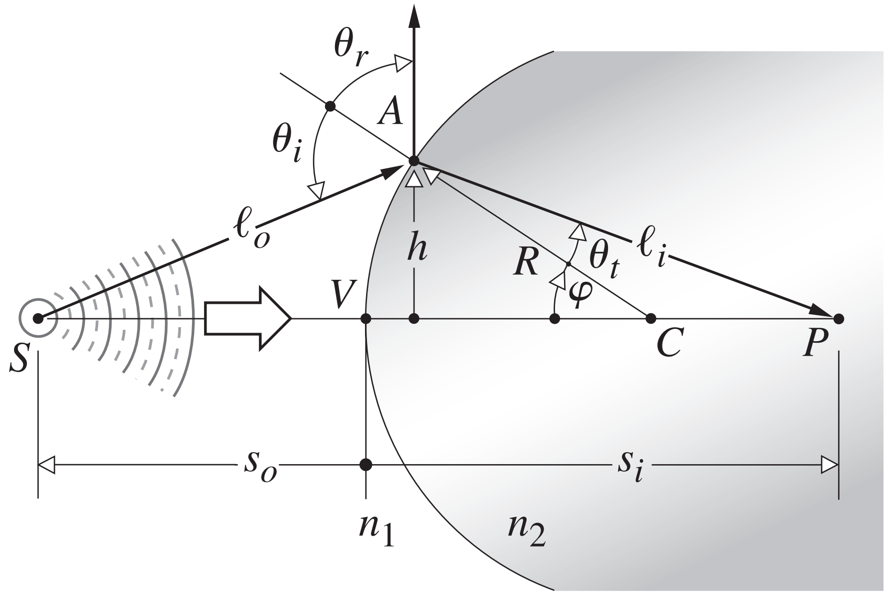
$$OPL = n_1\ell_o + n_2\ell_i$$

- Usando el teorema del coseno en triángulos SAC y APC y recordando que $\cos\varphi = -\cos(180^o - \varphi)$:

$$\ell_o = [R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\varphi]^{1/2}$$

$$\ell_i = [R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\varphi]^{1/2}$$

# Superficies esféricas




- Entonces

$$OPL = n_1[R^2 + (s_o + R)^2 - 2R(s_o + R)\cos\varphi]^{1/2}$$

$$+ n_2[R^2 + (s_i - R)^2 + 2R(s_i - R)\cos\varphi]^{1/2}$$

- Minimizando el OPL con respecto a $\varphi$

$$d(OPL)/d\varphi = 0,$$

- Tenemos que

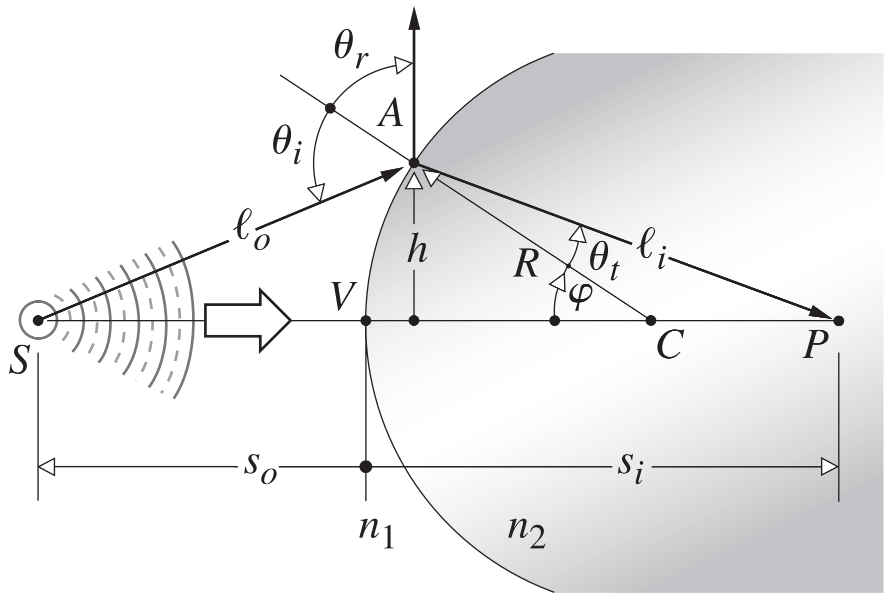
# Superficies esféricas

- Tenemos que

$$\frac{n_1 R(s_o + R)\sin\varphi}{2\ell_o} - \frac{n_2 R(s_i - R)\sin\varphi}{2\ell_i} = 0$$

- Con lo cual

$$\frac{n_1}{\ell_o} + \frac{n_2}{\ell_i} = \frac{1}{R}\left(\frac{n_2 s_i}{\ell_i} - \frac{n_1 s_o}{\ell_o}\right)$$



# Aproximación paraxial

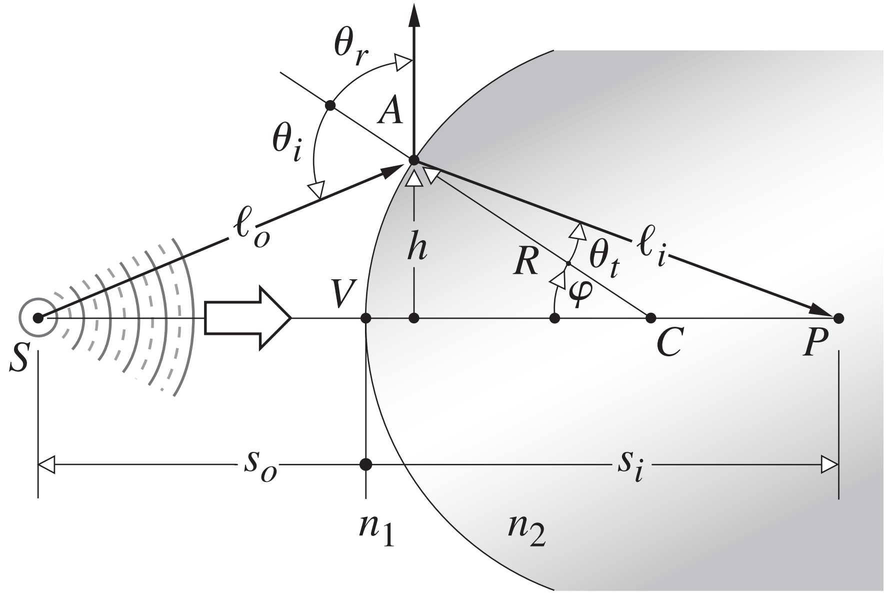
- Para simplificar las expresiones, vamos a suponer que los rayos son casi paralelos al eje óptico. Esto implica que $\cos\varphi \approx 1$ ($\varphi$ muy pequeño) y entonces:

$$l_0 \approx s_0 \text{ y } l_i \approx s_i$$

- Con esto, la condición de longitud de camino óptico mínimo nos da:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

Ecuación de la dioptra en aproximación paraxial



# Convención de signos para dioptras y lentes delgadas (Hecht)

| | |
|---|---|
| $s_0, f_0$ | Positivo a la izquierda de $V$ |
| $x_0$ | Positivo a la izquierda de $F_0$ |
| $s_i, f_i$ | Positivo a la derecha de $V$ |
| $x_i$ | Positivo a la derecha de $F_i$ |
| $R$ | Positivo si $C$ está a la derecha de $V$ |
| $y_0, y_i$ | Positivo por encima del eje óptico |

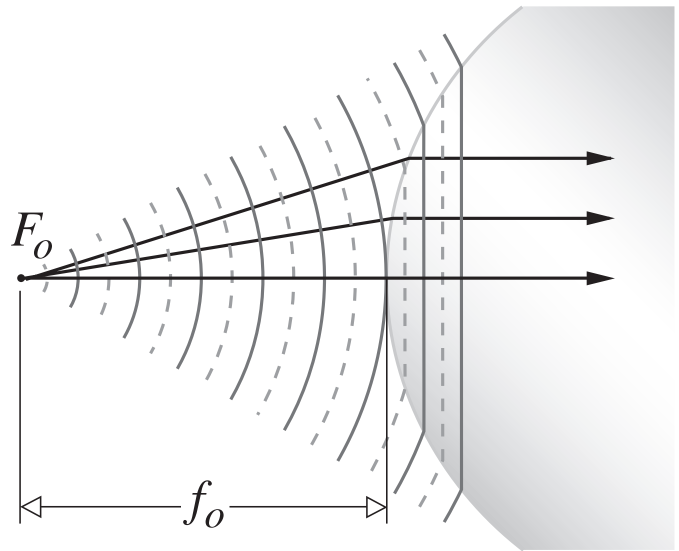
# Foco objeto

- Si el punto $F_0$ tiene imagen en el $\infty$ tenemos:

$$\frac{n_1}{s_o} + \frac{n_2}{\infty} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

- Entonces $f_0$ es la distancia focal objeto y se define como:

$$f_o = \frac{n_1}{n_2 - n_1} R$$



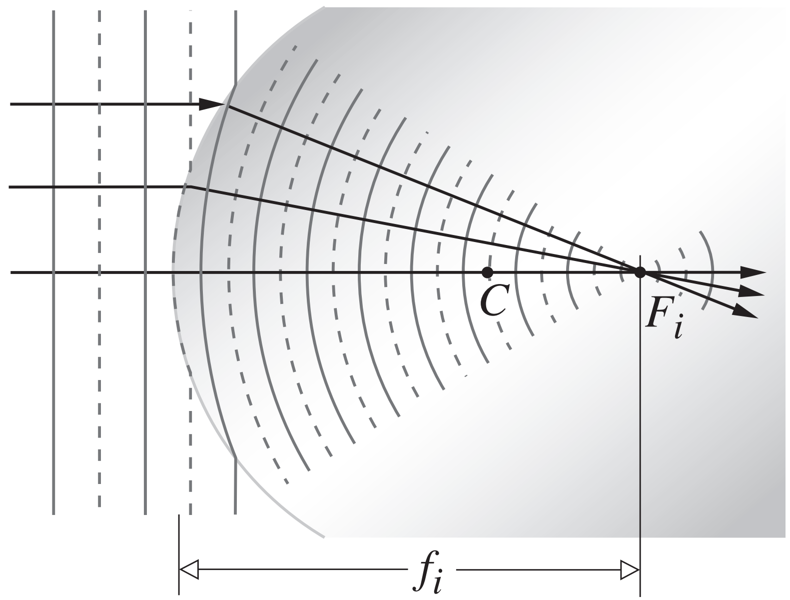
# Foco imagen

- Si el punto $F_i$ es la imagen de un un objeto en el ∞ tenemos:

$$\frac{n_1}{\infty} + \frac{n_2}{s_i} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

- Entonces $f_i$ es la distancia focal imagen y se define como:

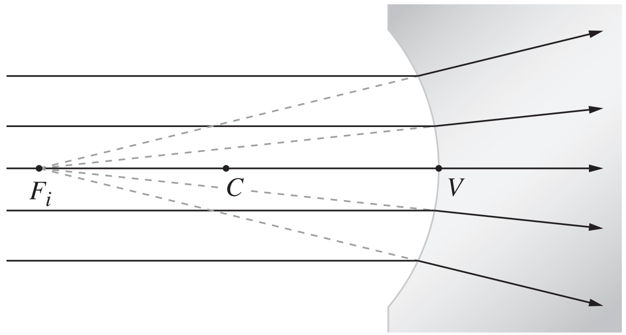
$$f_i = \frac{n_2}{n_2 - n_1} R$$



# Imágenes y objetos virtuales

- Una imagen es virtual cuando los rayos divergen de ella.
- Análogamente, un objeto es virtual cuando los rayos convergen hacia el.
- Notar que el objeto virtual está en el lado derecho del vértice y por lo tanto va a ser una cantidad negativa

Imagen virtual




Objeto virtual