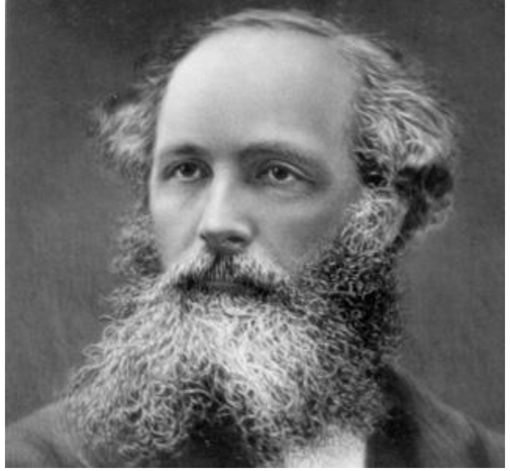
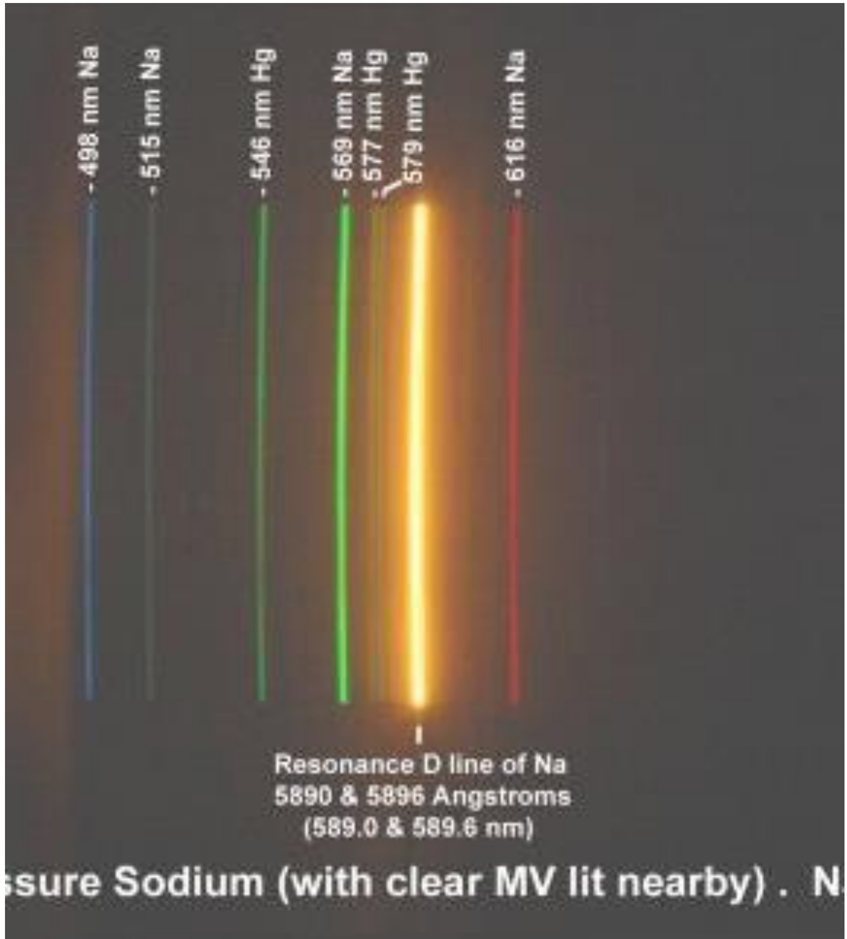


Electromagnetismo y Óptica

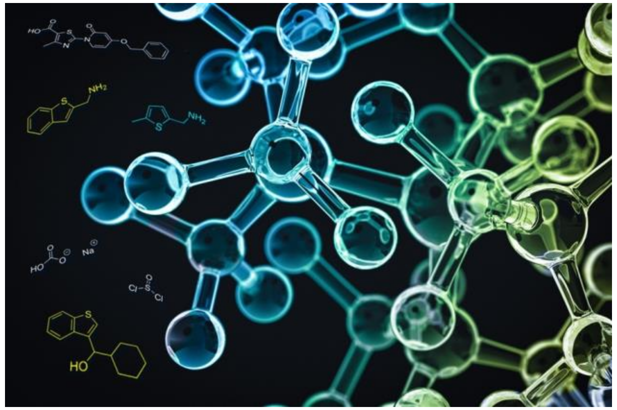
Verano 2024

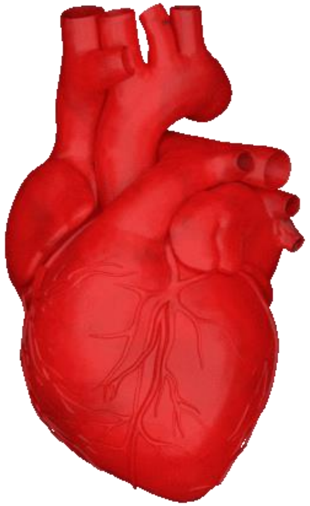


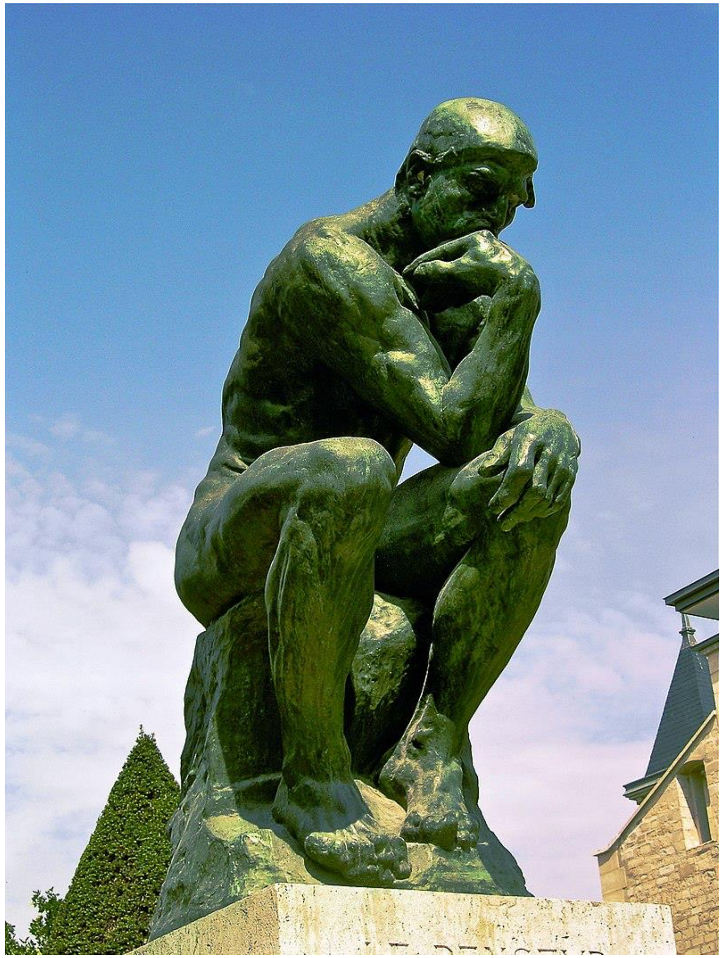
Condiciones para aprobar la materia

- Los trabajos prácticos de la materia se aprueban aprobando el Laboratorio y los dos parciales o sus correspondientes recuperatorios
- Los parciales / recuperatorios se aprueban con 6 o mas. No se recuperan temas aislados si no todos los temas incluidos en el parcial correspondiente.
- La nota del recuperatorio reemplaza a la del parcial siempre.
- La materia se aprueba habiendo aprobado los TP con un examen final donde entran todos los temas de las tres partes (teórica, práctica y laboratorio)

La electricidad y el magnetismo nos rodea







Las cargas eléctricas

Las cargas eléctricas

- 600 AC ámbar (‘elektron’ en griego)

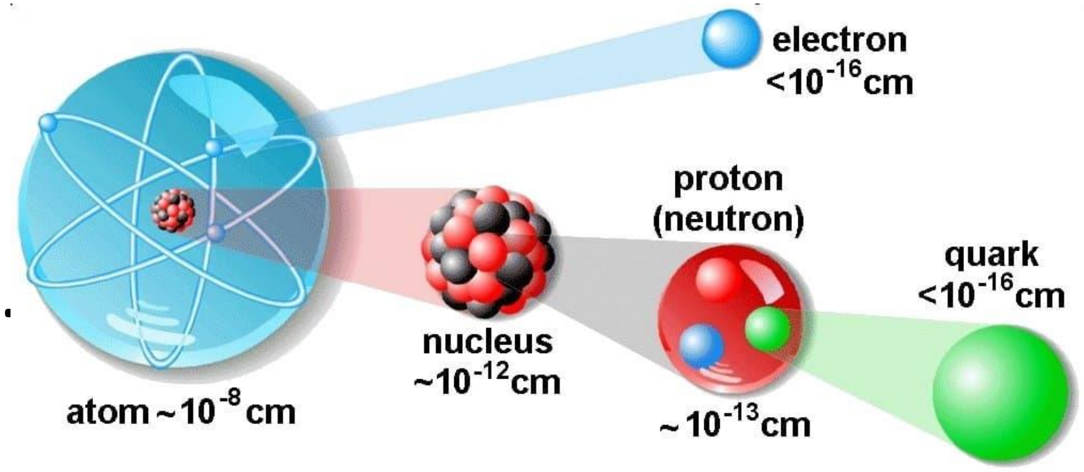
frotado atraía hojas.

- S. XVI: Más sustancias similares: Vidrio, azufre.
- S. XVIII: dos tipos de materiales: Vidrio (A) Ámbar (B)
- A repele A, B repele B, pero A atrae B
- Benjamin Franklin
  - Toda sustancia esta penetrada por fuego eléctrico o fluido eléctrico. Estableció convención de signos. Exceso de fuego=positivo, defecto=negativo. Vidrio positivo.
  - Cuanto más fuego, mayor la fuerza. Cuanto más cerca están los objetos, mayor es la fuerza.

Benjamin Franklin (1706-1790)

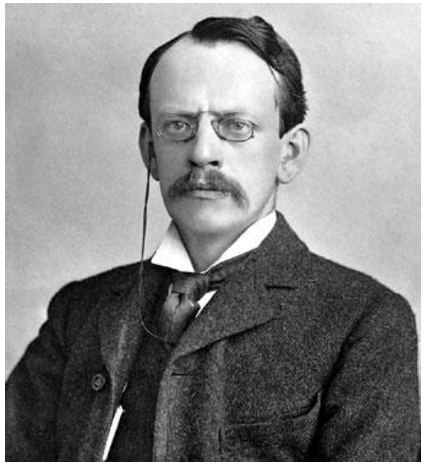
El átomo

- Núcleo muy pequeño (10^{-12} cm)
  - Protones (cargados)
  - Neutrones
  - Masa de cada uno: 1.7 10^{-27} kg
- Nube de electrones (cargados) 10^{-8} cm. Masa: 9.1 10^{-31} kg
- La carga es la misma en valor absoluto para electrones y protones.



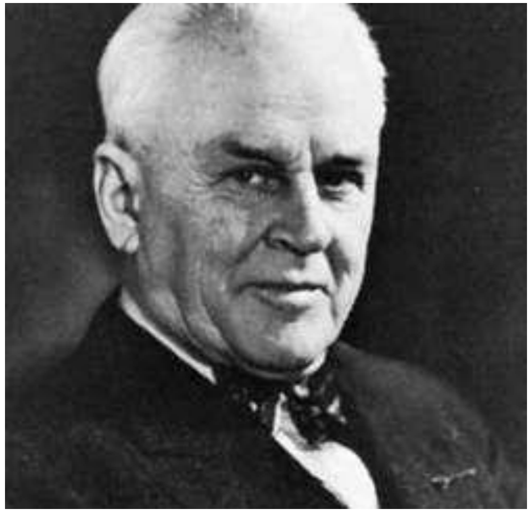
El átomo y las cargas eléctricas

- Descubrimiento de los protones (Goldstein,1886; Rutherford 1899).
- Descubrimiento del electrón a partir de rayos catódicos (Thomson, 1896)
- Modelo del átomo como núcleo y electrones (Rutherford, 1911)
- Cuantización de la carga (Milikan & Fletcher 1909).



Joseph Thomson

Ernest Rutherford



Robert Milikan

La carga eléctrica

- Característica fundamental de la materia, junto con la masa. Los experimentos indican que existe en dos tipos. Por convención se las denominan positiva y negativa.
- Por convención, los portadores de carga positiva son los **protones** y los **electrones poseen carga negativa**. Ambos tienen la misma cantidad de carga: $|e| = 1.6\ 10^{-19}\ C$ (Coulombs)
- Átomos y moléculas neutros: igual número de iones y electrones. Un exceso de carga en un cuerpo implica que éste está cargado con una carga Q.

Leyes fundamentales basadas en experimentos

- **Ley de cuantización de la carga :**

Toda carga Q es siempre múltiplo entero de la carga elemental e.

- **Ley de conservación de la carga**:

La carga eléctrica neta de un sistema aislado es siempre la misma.

- **Ley de Coulomb**:

Dos cargas eléctricas en reposo se repelen o atraen entre sí con una fuerza proporcional al producto de sus cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

Electrostática

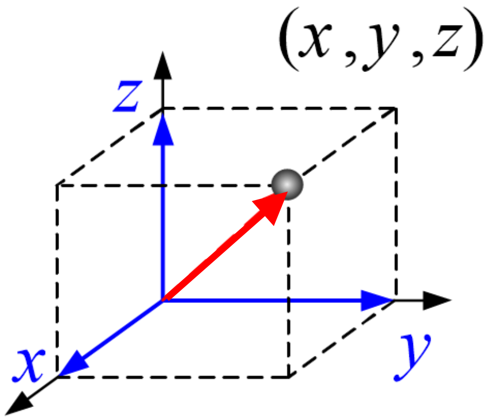
- **Es el estudio de las fuerzas eléctricas y los campos asociados cuando la distribución espacial de cargas no cambia con el tiempo**.
- Las cargas, aunque sujetas a fuerzas, no se pueden mover.
- El movimiento de cargas generaría una corriente eléctrica.

Cantidades escalares y vectoriales

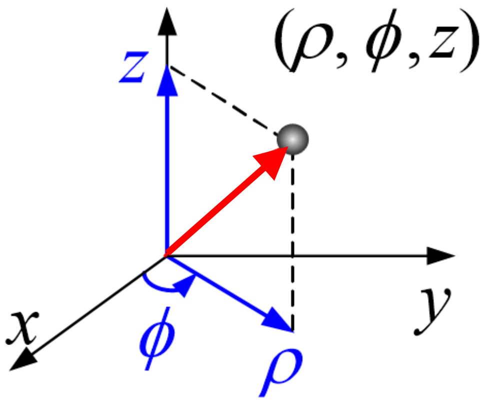
- **Escalares**: cantidades que no tienen dirección ni sentido (ej: temperatura, masa, energía, tiempo, carga). Quedan definidas por un solo número.

- **Vectoriales**: cantidades que incluyen una dirección y sentido (ej: vector posición, velocidad, campo eléctrico). Para definir un vector (rojo) necesitamos 3 coordenadas.

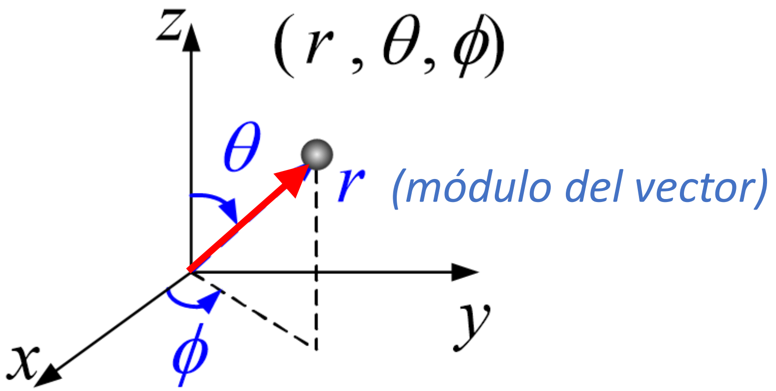
Coordenadas cartesianas



Coordenadas cilíndricas



Coordenadas esféricas



Vectores y versores

- Todo vector tiene un **<u>módulo</u>** que viene definido por el producto escalar:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$$

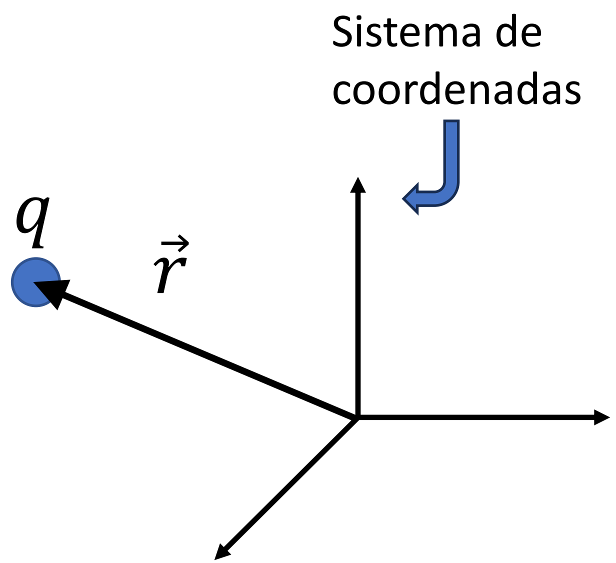
- Un **versor** es un **vector de módulo unitario**. Podemos hacer de cualquier vector $\vec{r}$ un versor $\hat{r}$ simplemente dividiéndolo por su módulo:

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

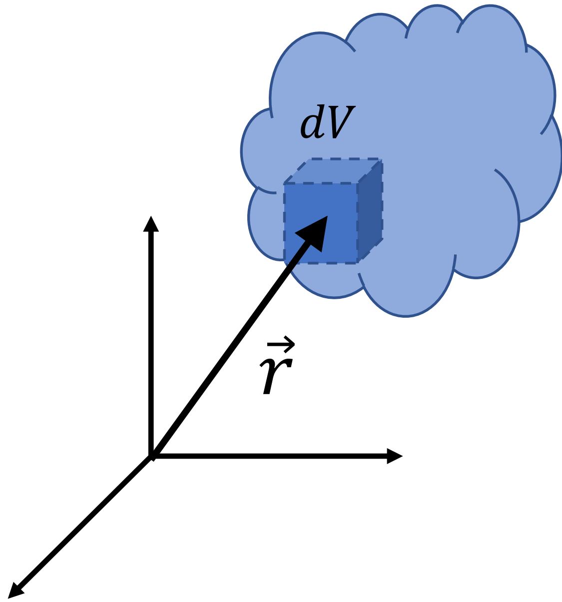
- Por definición $\hat{r}$ es paralelo a $\vec{r}$.

MÁS PROPIEDADES Y REPASO EN EL PRÁCTICO

Representaciones de la carga



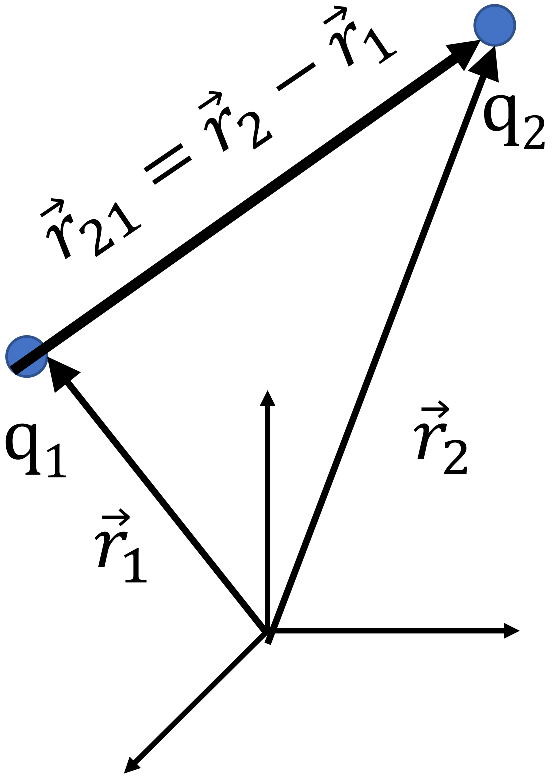
- **Cargas puntuales**: La carga se concentra en un punto del espacio identificado por un vector posición $\vec{r}$



- **Distribución continua de carga**: en un cuerpo cargado definimos la densidad volumétrica de carga ρ en el volumen infinitesimal dV alrededor del punto identificado por el vector posición $\vec{r}$ dentro del cuerpo. La cantidad de carga en el volumen dV es $dq = \rho\, dV$, donde el valor de ρ depende de $\vec{r}$, es decir $\rho(\vec{r})$. Para los puntos fuera del cuerpo cargado $\rho = 0$

Ley de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb
1736-1806



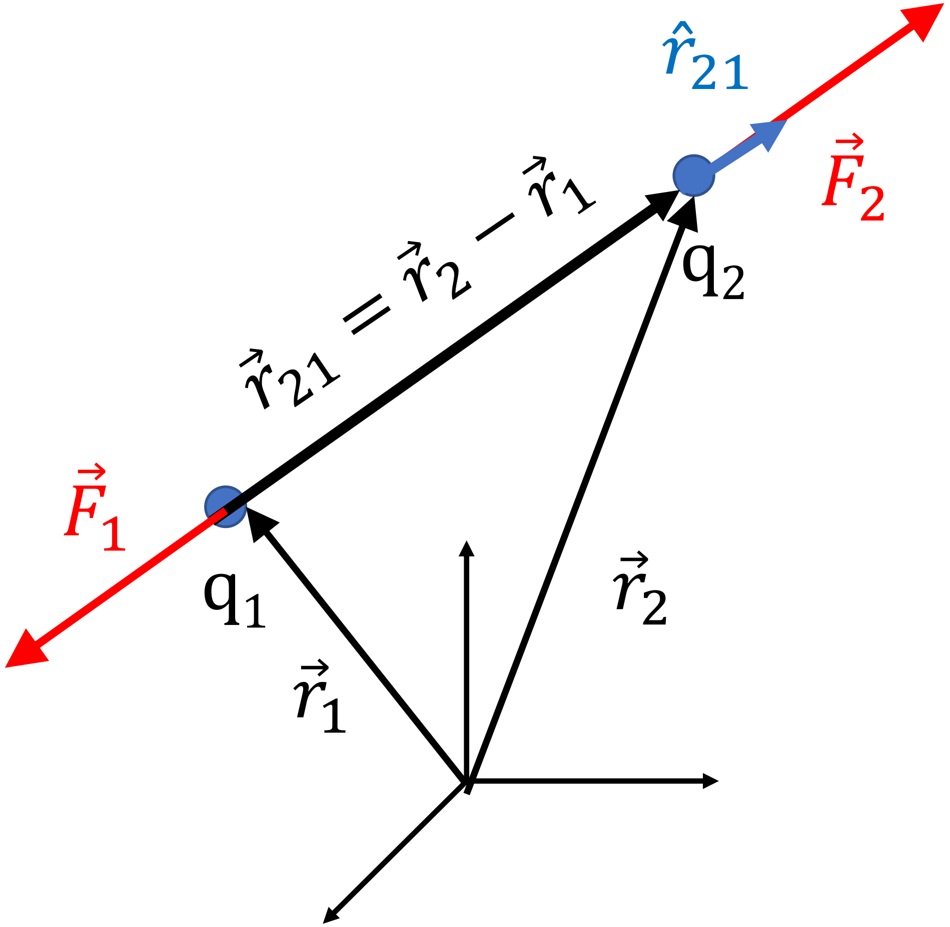
- Sean dos cargas puntuales q_1 y q_2 de cualquier signo en posiciones $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente respecto a un mismo sistema de coordenadas.

- La distancia entre ellas es el módulo del vector $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$:

$$r_{21} = |\vec{r}_{21}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

Ley de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb
1736-1806



- La fuerza experimentada por q_2:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2 \hat{r}_{21}}{r_{21}^2}$$

$\hat{r}_{21}$ es el vector unitario de q_1 a q_2

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

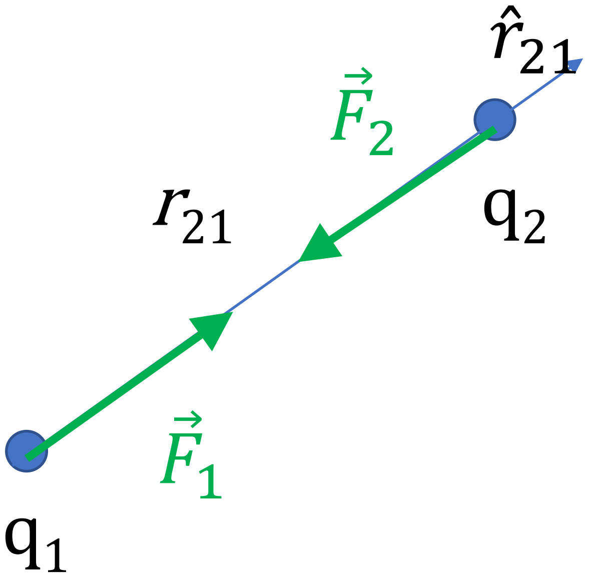
- q_1 experimenta una fuerza igual y opuesta

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

- **Cargas de igual signo se repelen**

Ley de Coulomb

Charles Augustin de Coulomb
1736-1806



- La fuerza experimentada por q_2:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2 \hat{r}_{21}}{r_{21}^2}$$

$\hat{r}_{21}$ es el vector unitario de q_1 a q_2

$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

- q_1 experimenta una fuerza igual y opuesta

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

- **Cargas de signo opuesto se atraen**

Factor de proporcionalidad

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9\ 10^9 Nm^2C^{-2}$$

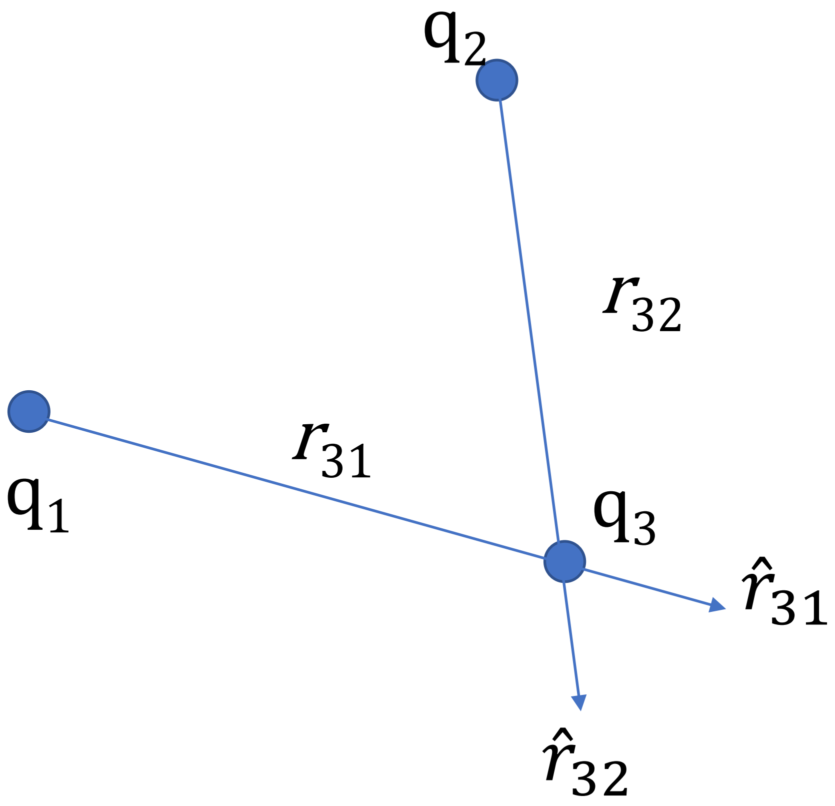
Llamaremos a ϵ_0 la permitividad del vacío

Escalas y fuerzas

- A nivel atómico lo que mantiene la materia unida es la fuerza eléctrica
- A gran escala estrellas, planetas y galaxias es la fuerza gravitatoria.
- ¿Por qué? Porque hay poca carga por unidad de masa en cuerpos celestes.
- La Tierra o Marte tienen una carga neta de 400000 C lo cual es poco comparado con su masa.

Principio de superposición

La fuerza con la que dos cargas interaccionan no se modifica por la presencia de una tercera



- COROLARIO:

La fuerza experimentada por q_3 es la suma vectorial de las fuerzas de interacción entre q_1 y q_3 ,y q_2 y q_3

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1 q_3 \hat{r}_{31}}{r_{31}^2} + \frac{q_2 q_3 \hat{r}_{32}}{r_{32}^2}\right]$$

Fuerza del par q_1 q_3

Fuerza del par q_2 q_3

La energía potencial electrostática

Electrostática

Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ es una integral de línea a lo largo de una curva C desde una posición inicial $\overrightarrow{r_i}$ a una final $\overrightarrow{r_f}$.

$$W = \int_{\substack{\overrightarrow{r_i} \\ C}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Diferencial de camino

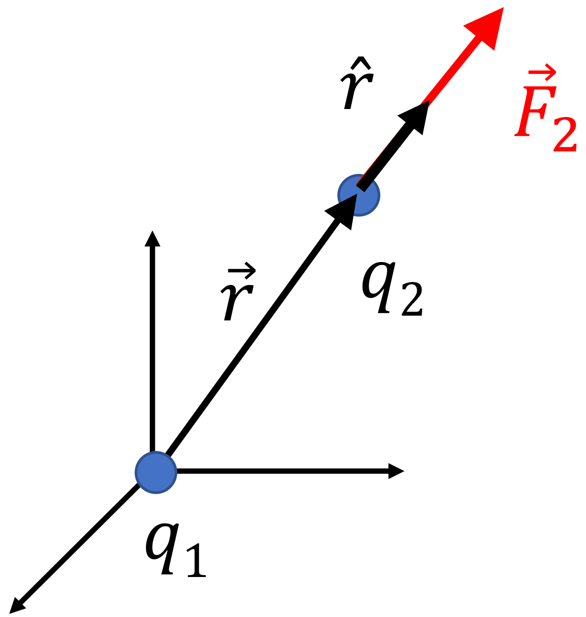
- Calculemos el **trabajo de la fuerza** $\overrightarrow{F_2}$ **aplicada sobre la carga** q_2 **realizado al alejar dicha carga de la carga** q_1 **a partir de una distancia inicial** r_{12} hasta una distancia muy grande.

Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- Nos paramos en q_1 y usamos coordenadas esféricas.
- Sea $\vec{r} = r\,\hat{r}$ la posición de q_2 desde q_1.
- La fuerza sobre q_2 entonces se escribe como:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2}$$

- Nos toca elegir un camino C. Pensemos un camino en la dirección radial (a lo largo del versor $\hat{r}$) a partir de la distancia r_{21}hasta una distancia muy grande que supondremos infinita.



Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- El diferencial de camino radial en coordenadas esféricas es $\overrightarrow{dl} = dr\,\hat{r}$.
- El trabajo entonces queda:

$$W = \int_{r_{21}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\hat{r} \cdot dr\hat{r})}{r^2}$$

- Como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$W = \int_{r_{21}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{21}}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

- La integral $\int \frac{dr}{r^2}$ es $-\frac{1}{r}$ Entonces, evaluando obtenemos

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}}$$

Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- Es fácilmente demostrable que este trabajo no depende del camino elegido sino de las posiciones iniciales y finales.
- Por lo tanto, la fuerza electrostática, al igual que **la fuerza gravitatoria es conservativa.**
- **Por lo tanto, esta fuerza tiene asociada una energía potencial que cambia de manera opuesta al trabajo de la fuerza.**
- Notemos que $W > 0$ cuando q_1 y q_2 son de igual signo y $W < 0$ cuando tienen signos opuestos.

Energía potencial electrostática

- Cuando $W > 0$, el trabajo positivo entregado al sistema redunda en un aumento de la energía potencial electrostática del sistema de las dos cargas.
- Cuando $W < 0$, el trabajo negativo tomado del sistema redunda en una disminución de la energía potencial del sistema.
- La variación de energía potencial electrostática es igual a menos el trabajo de la fuerza:

$$U = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl}$$

- En particular, si traemos una carga q_2 desde muy lejos de signo igual a una existente q_1 la energía potencial aumenta o se acumula en una cantidad:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}}$$

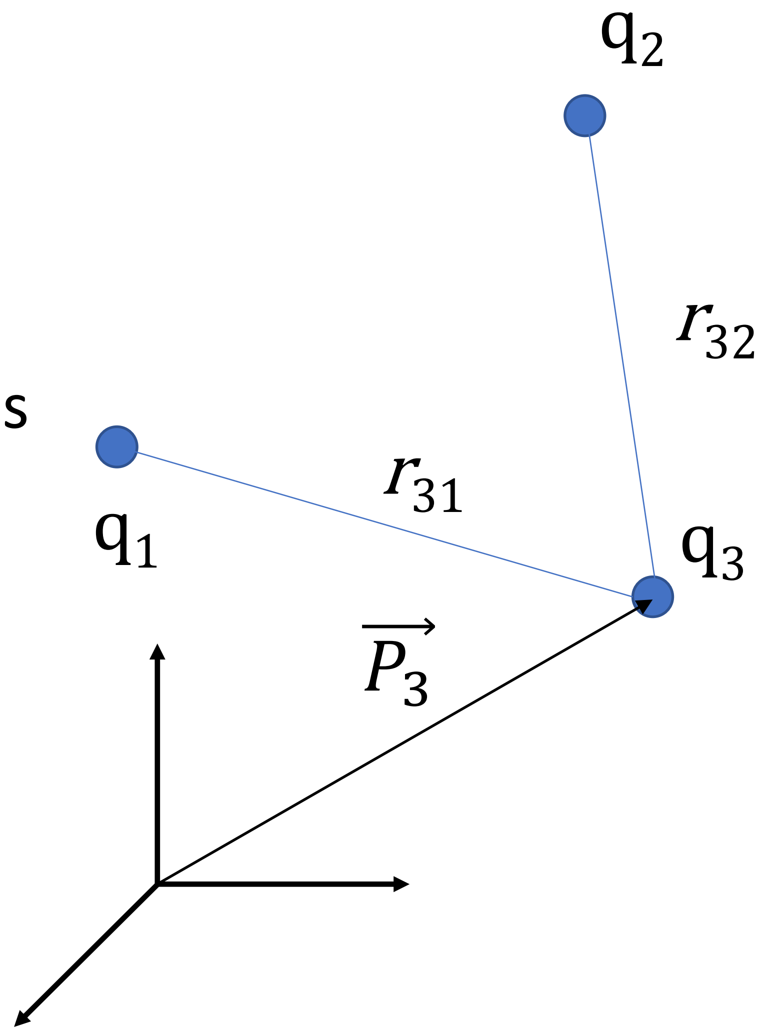
Esto cuesta ‘armar’ un sistema de un par de cargas de igual signo

Energía de un sistema de 3 cargas

- La energía invertida en armar un sistema de más de dos cargas es fácil de calcular porque las fuerzas electrostáticas trabajan de a pares.
- Entonces, la energía total es simplemente la suma de las energías acumuladas al traer cada una de las cargas con las fuerzas que les hace cada una de las otras que ya están en el grupo hasta su posición final.
- Por ejemplo, para tres cargas $q_1 q_2 q_3$ la energía electrostática acumulada U es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q_1 q_2}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}}\right]$$

- Donde r_{ij} es la distancia final entre q_i y q_j



La energía potencial eléctrica U de un sistema

- No depende del orden de colocación de las cargas
- Es independiente del camino seguido por cada carga

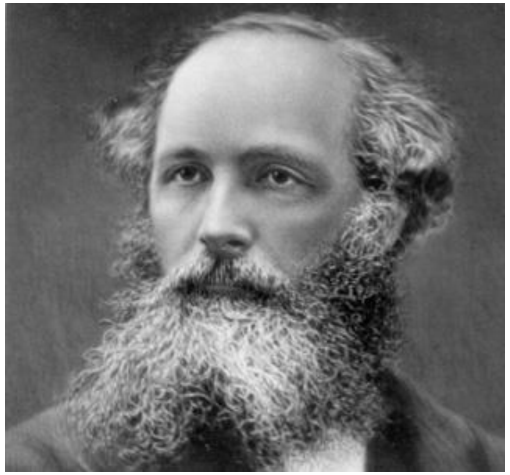
Dependerá únicamente de la disposición final de las cargas

El Campo Eléctrico

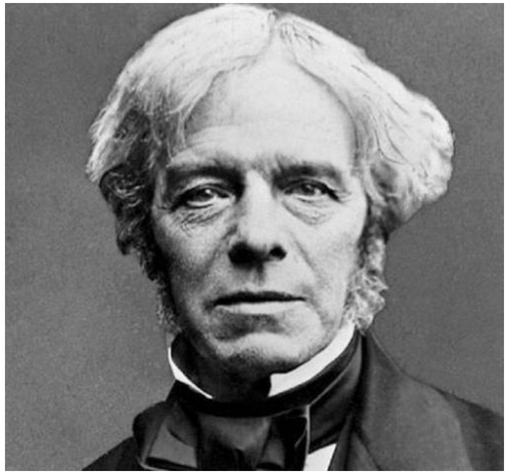
Electrostática

El electromagnetismo, la primera teoría de campos

- La teoría clásica del campo electromagnético surgió en forma más o menos completa en 1873 en el Tratado sobre electricidad y magnetismo de James Clerk Maxwell.
- Maxwell basó su teoría en gran parte en las ideas intuitivas de Michael Faraday.
- La amplia aceptación de la teoría de Maxwell ha provocado un cambio fundamental en nuestra comprensión de la realidad física.
- En esta teoría, los campos electromagnéticos son los mediadores de la interacción entre objetos materiales.



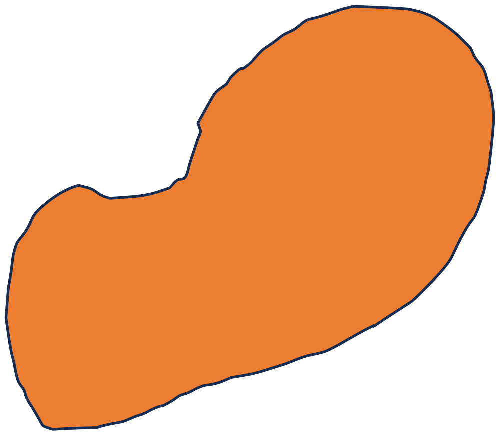
James Clerk Maxwell



Michael Faraday

¿Qué es una teoría de campos?

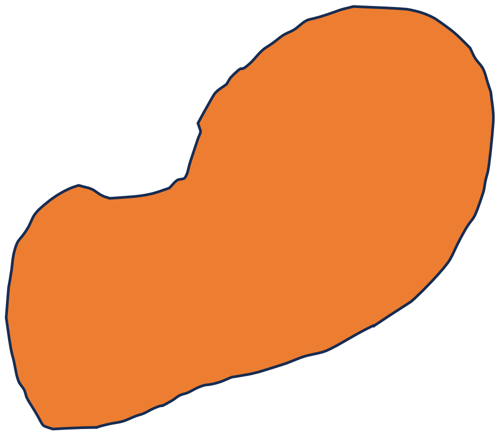
1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos ‘campo’.



CAMPO

¿Qué es una teoría de campos?

1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos ‘campo’.
2. Ese campo tiene un valor y una dirección y sentido que depende de la carga del cuerpo y cuán lejos está de este.



CAMPO

¿Qué es una teoría de campos?

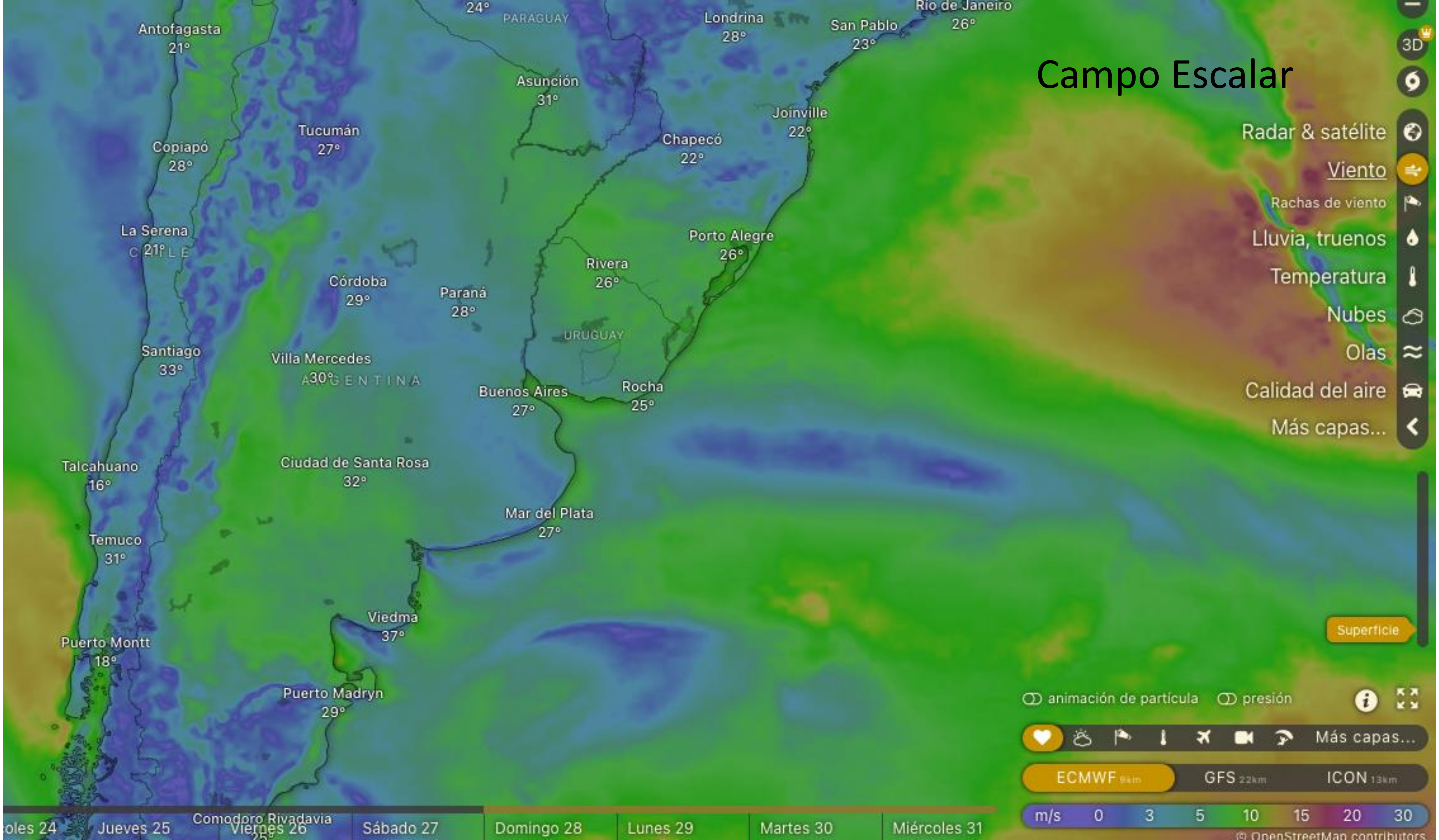
1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos ‘campo’.
2. Ese campo tiene un valor y una dirección y sentido que depende del cuerpo que lo genera y cuán lejos está de este.
3. La presencia de un segundo cuerpo (azul) en el espacio ocupado por el campo del primero genera una fuerza en el segundo que es producto de la interacción de este con el campo generado por el primero

¿Qué es una teoría de campos?

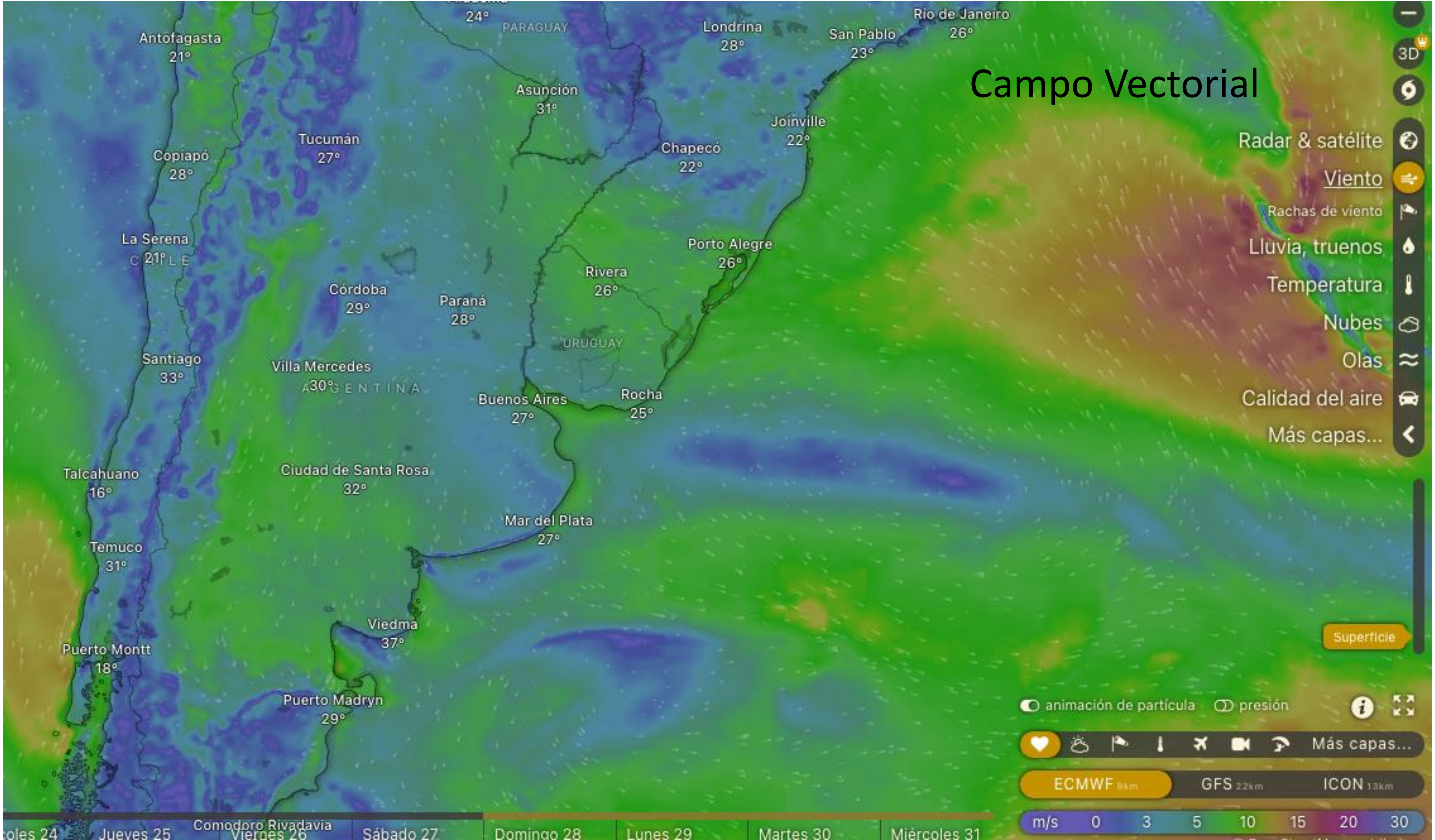
1. Un cuerpo genera en el espacio que lo rodea y en su interior, una propiedad que llamaremos ‘campo’.
2. Ese campo tiene un valor y una dirección y sentido que depende del cuerpo que lo genera y cuán lejos está de este.
3. La presencia de un segundo cuerpo (azul) en el espacio ocupado por el campo del primero genera una fuerza en el segundo que es producto de la interacción de este con el campo generado por el primero

4. En una teoría de campos, las fuerzas son resultantes de la interacción de un cuerpo (en este caso el azul) con el campo generado en todo el espacio por el naranja.

Campo Escalar

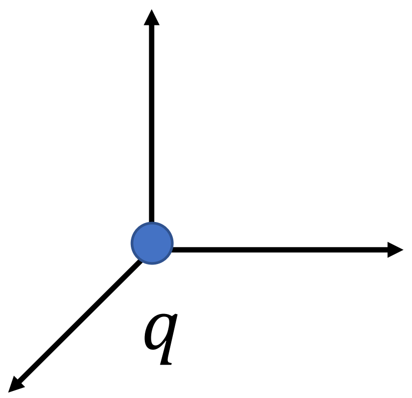


Campo Vectorial



El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

- El campo eléctrico es el medio a través del cual podemos calcular la fuerza de Coulomb
- ¿Cómo definimos el campo eléctrico?
- Veamos un caso simple, el de una sola carga eléctrica q.
- Para mayor comodidad, colocamos el origen del sistema de coordenadas sobre ella.



El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

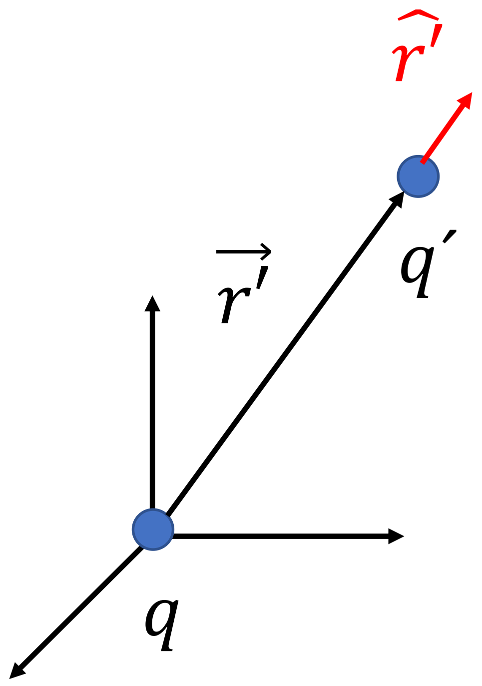
- Imaginemos ahora una segunda carga hipotética 'de prueba' $q' > 0$ en una posición arbitraria que llamaremos $\overrightarrow{r'}$.
- La fuerza que sufre q' por la presencia de q es

$$\vec{F}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq'}{r'^2}\widehat{r'}$$

- Ahora bien, el vector

$$\vec{E}\left(\overrightarrow{r'}\right) = \frac{\overrightarrow{F'}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r'^2}\widehat{r'}$$

No depende de q' pero sí de la posición $\overrightarrow{r'}$.



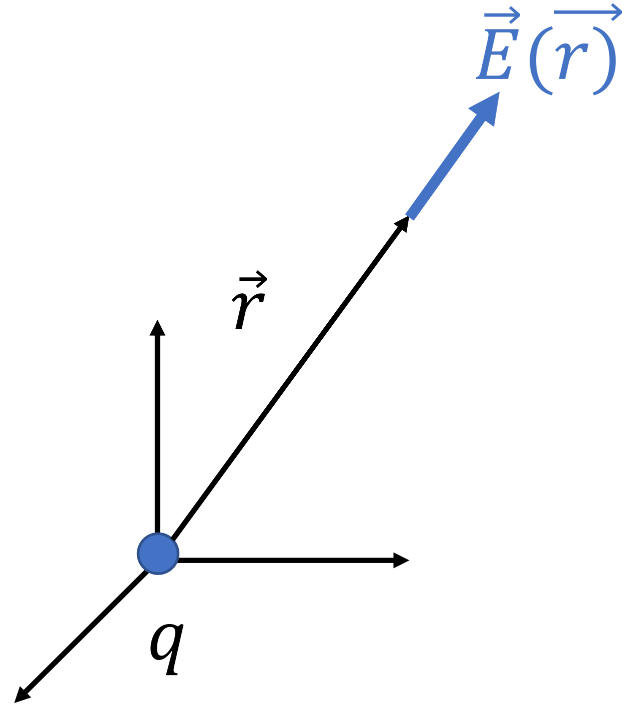
El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

- Como el punto $\overrightarrow{r'}$ es un punto cualquiera, la expresión anterior puede escribirse como un vector dependiente de la posición $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- **Este es el campo eléctrico creado por la carga puntual q en el punto $\vec{r}$**

- Es un vector dibujado en el extremo del vector posición $\vec{r}$



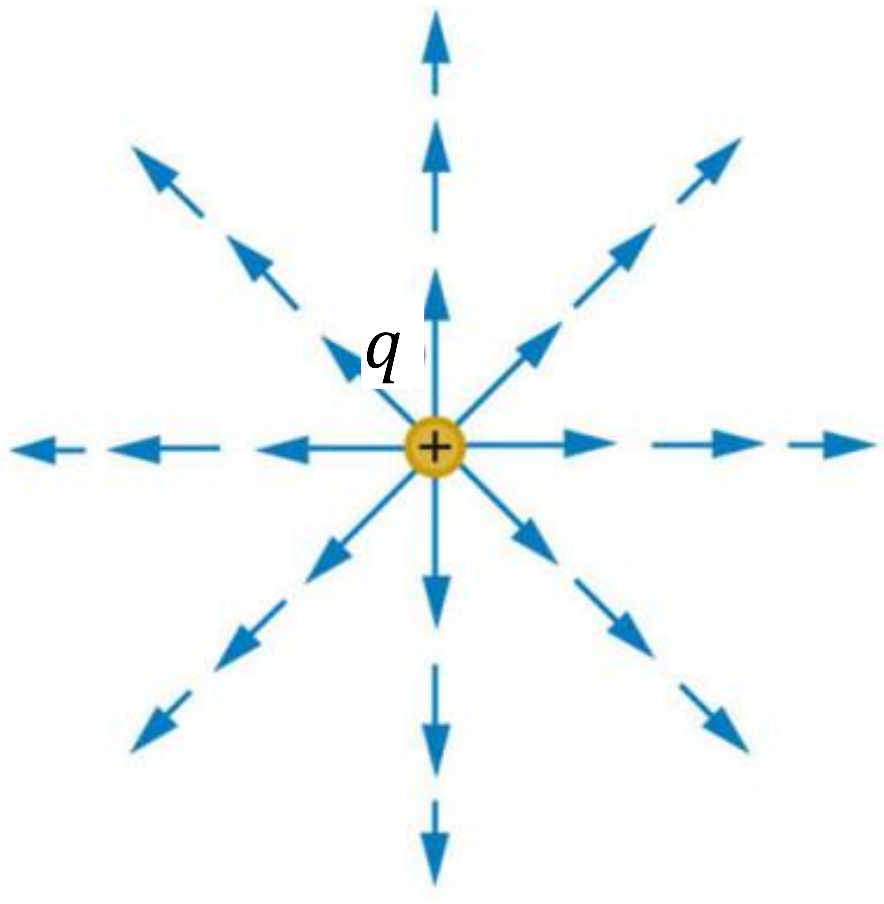
El campo eléctrico $\vec{E}$ de una carga puntual

- Es un vector $\vec{E}$ definido en cada punto del espacio. A cada posición $\vec{r}$ le asignamos una flecha $\vec{E}(\vec{r})$ (vector).

- El vector $\vec{E}(\vec{r})$ apunta hacia afuera si $q > 0$ y hacia adentro si $q < 0$

- La intensidad dependerá de la posición.

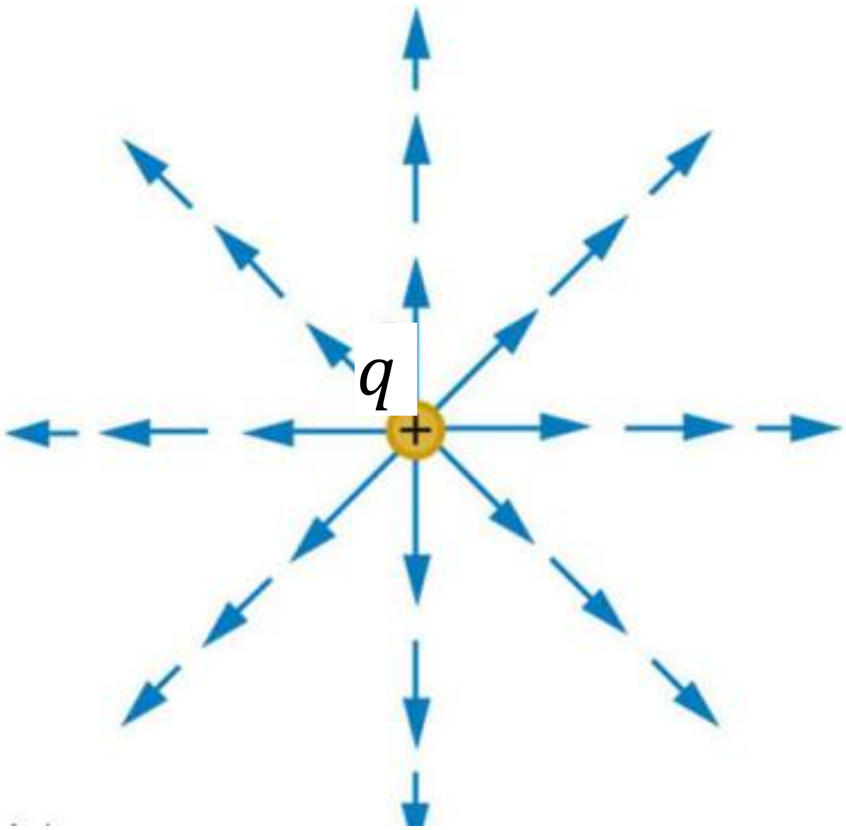
- Su intensidad se mide en N/C o como veremos más adelante en Volt /m

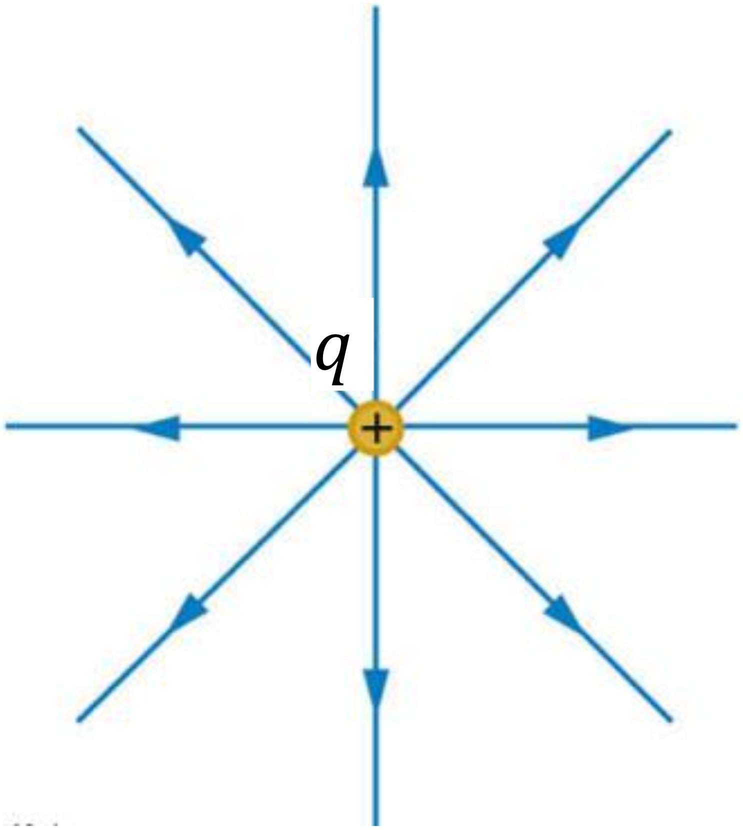


$q > 0$

Líneas de campo de una carga q

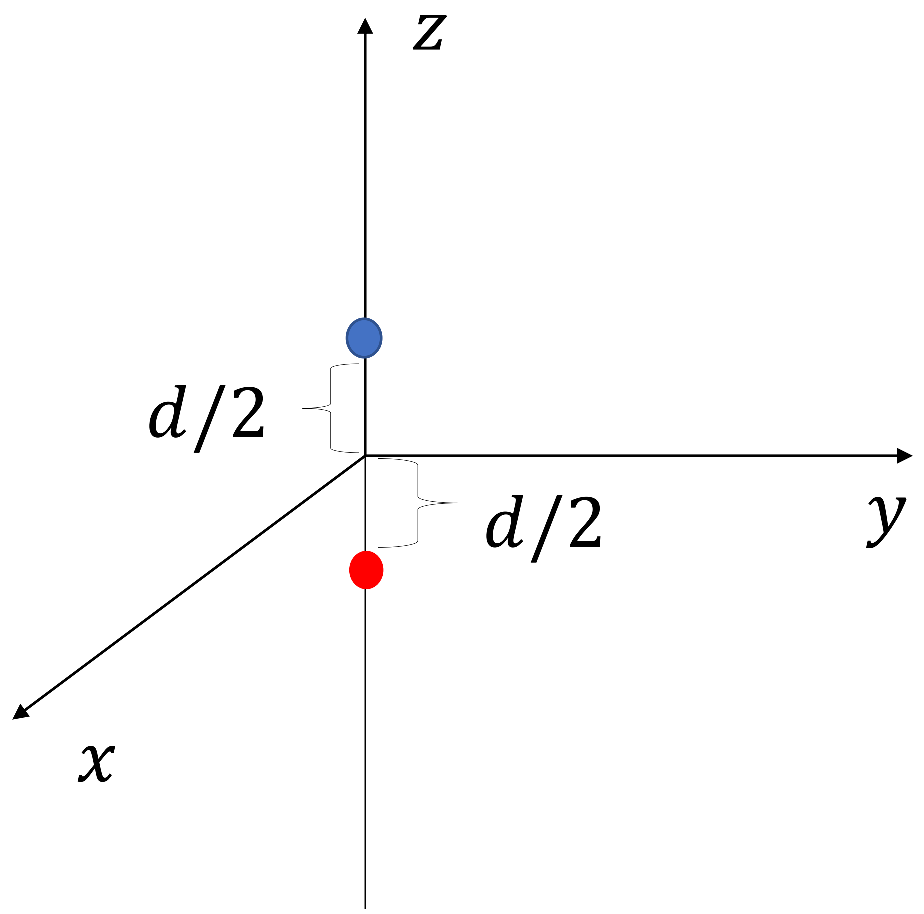
- Son líneas que tienen al campo $\vec{E}$ como vectores tangentes.
- Densidad de líneas indica intensidad.





Campo eléctrico de dos cargas puntuales de signo opuesto

- Supongamos dos cargas q y $-q$ separadas una distancia d. Este arreglo se llama **'dipolo'**
- Queremos calcular el campo eléctrico generado por ellas en todo el espacio.
- Elijamos el sistema de coordenadas tal que ambas cagas quedan sobre el eje z equidistantes del origen

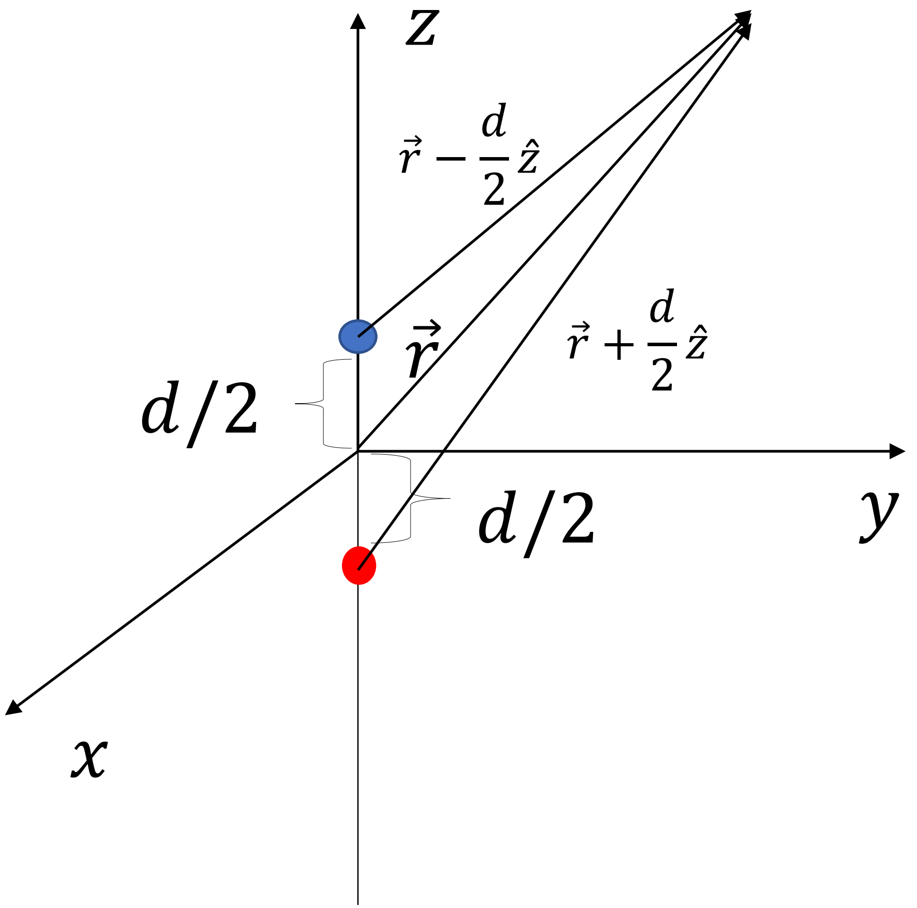


Campo eléctrico de dos cargas puntuales de signo opuesto

- Los campos eléctricos de cada una son:

$$\overrightarrow{E^+} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|^2}\frac{\left(\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|^3}$$

$$\overrightarrow{E^-} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(-q)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|^2}\frac{\left(\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\left(\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|^3}$$



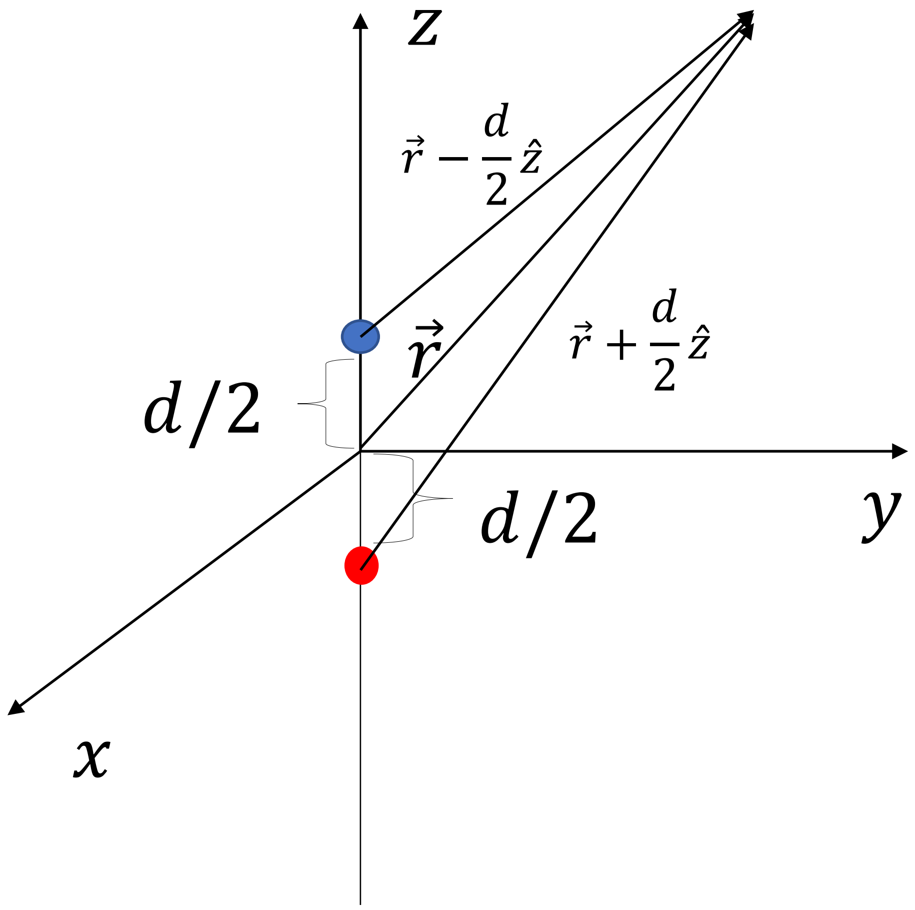
- La posición $\vec{r}$ se mide desde el origen

Campo eléctrico de dos cargas puntuales de signo opuesto

- De la misma manera que con las fuerzas de Coulomb podemos aplicar el **principio de superposición**.
- En consecuencia, el campo en el punto $\vec{r}$ es la suma vectorial de los campos de cada carga en ese punto del espacio.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \overrightarrow{E^+} + \overrightarrow{E^-} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\left(\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}-\frac{d}{2}\hat{z}\right|^3} - \frac{\left(\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right)}{\left|\vec{r}+\frac{d}{2}\hat{z}\right|^3}\right\}$$

- ¿Alcanzan a ver qué ocurre con la intensidad del campo a medida que nos alejamos del dipolo?

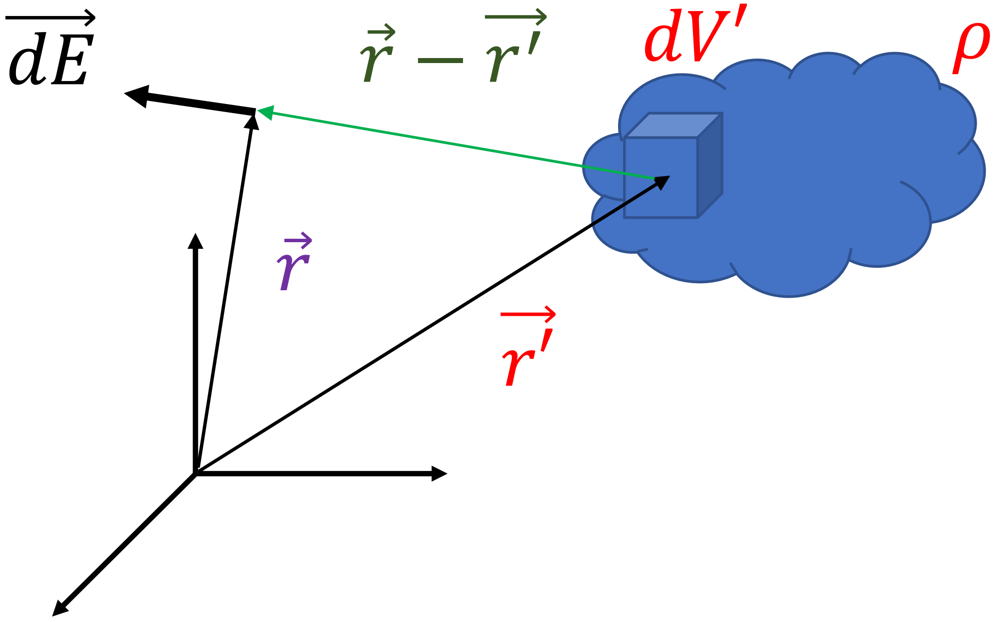


Campo eléctrico de una distribución

- Pensemos en un diferencial de carga $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right) dV'$ en el punto $\overrightarrow{r'}$ como parte de una distribución volumétrica ρ dentro de un cuerpo de volumen V.

- La contribución de $\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'$ al campo eléctrico $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ es:

$$\overrightarrow{dE}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)dV'\,(\vec{r} - \overrightarrow{r'})}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3}$$



Campo eléctrico de una distribución

- El campo total $\vec{E}$ en el punto $\vec{r}$ se obtiene integrando sobre todo el volumen de la distribución de carga.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho\left(\overrightarrow{r'}\right)\,\left(\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right)}{\left|\vec{r} - \overrightarrow{r'}\right|^3} dV'$$

- En cartesianas $\overrightarrow{r'} = (x', y', z')$ y $\vec{r} = (x, y, z)$:

$$E_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(x - x')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} dx'dy'dz'$$

$$E_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(y - y')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} dx'dy'dz'$$

$$E_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(x', y', z')\,(z - z')}{\left(\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}\right)^3} dx'dy'dz'$$

¿Hay una manera más fácil de calcular el campo eléctrico para distribuciones de carga simétricas?

Ley de Gauss

Ley de Gauss

Carl Friederich Gauss
(1777-1855)

- Supongamos una superficie cerrada S que encierra un volumen V

- Se verifica que el flujo del campo eléctrico $\vec{\mathrm{E}}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada dentro de S (es decir en el volumen V)

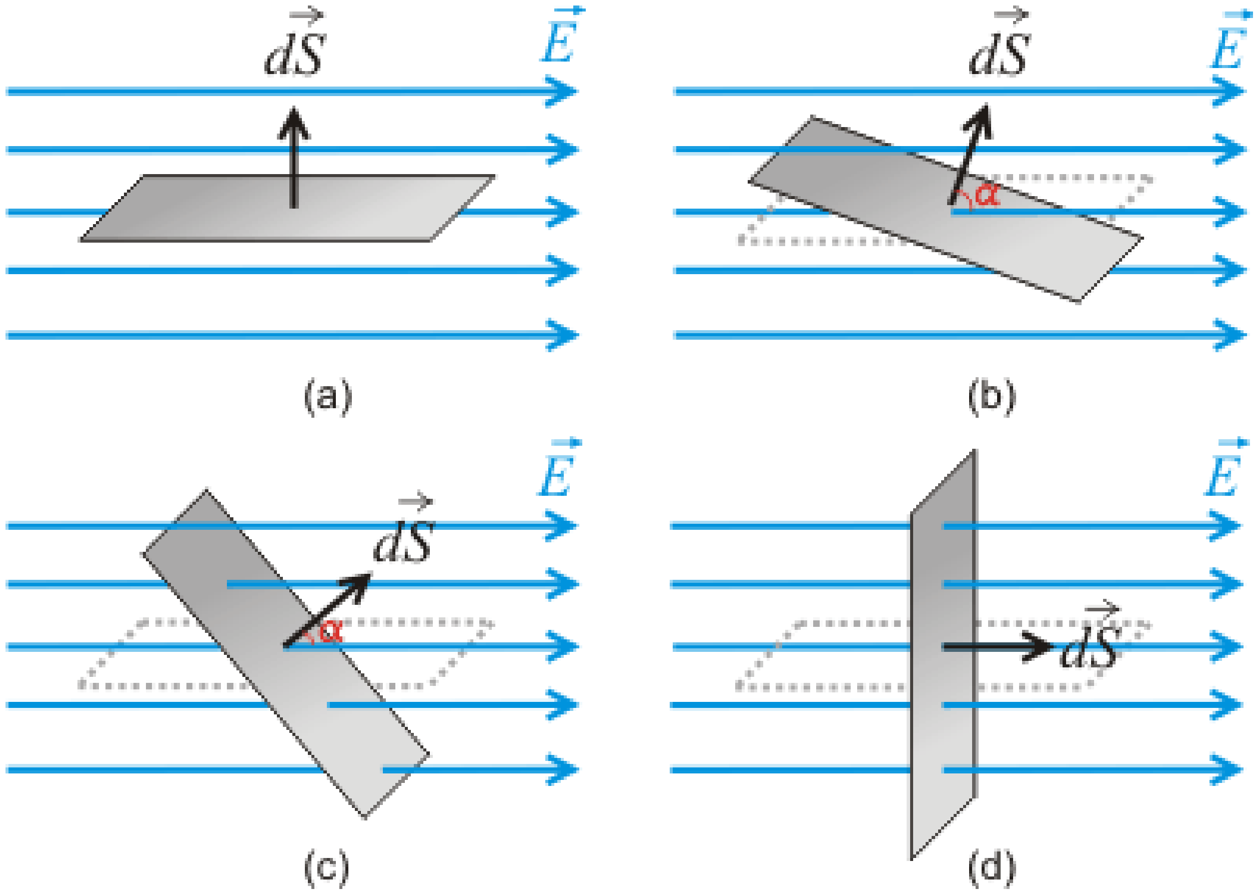
$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV$$

Superficie cerrada S

Volumen encerrado por S

Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el **producto de un campo por el área transversal** que atraviesa

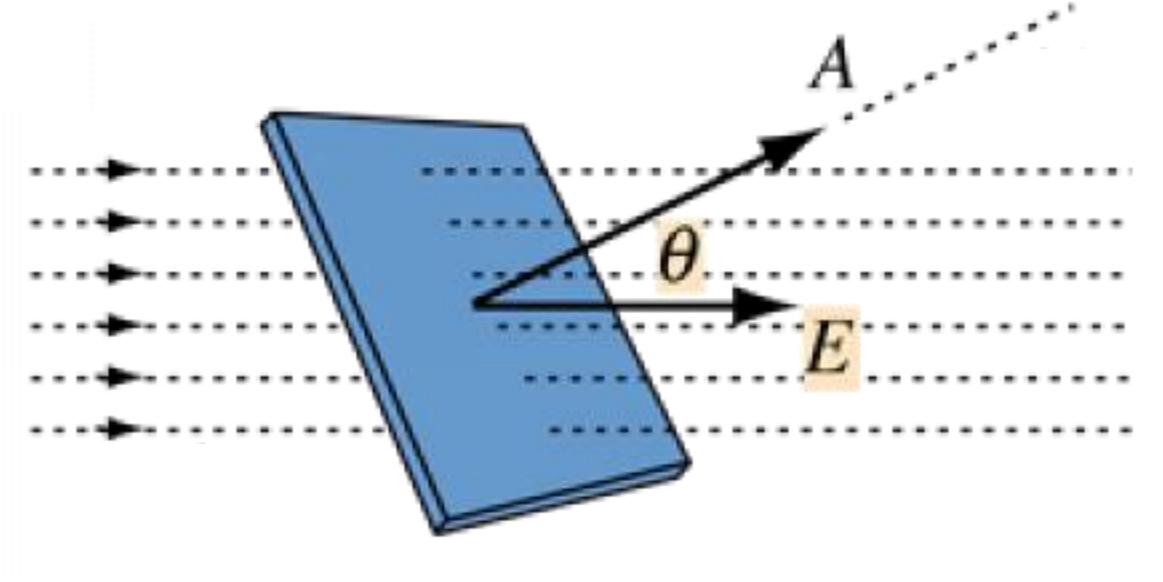


Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

Superficie plana de área A, $\vec{E}$ uniforme

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \ \cos\theta$$



Flujo de campo eléctrico

- Superficie compuestas de facetas de área $\overrightarrow{A_i}$ atravesadas por campos $\overrightarrow{E_i}$.

$$\Phi = \sum_{todos\ los\ i} \overrightarrow{E_i} \cdot \overrightarrow{A_i} = \sum_{todos\ los\ i} E_i A_i \cos\theta_i$$

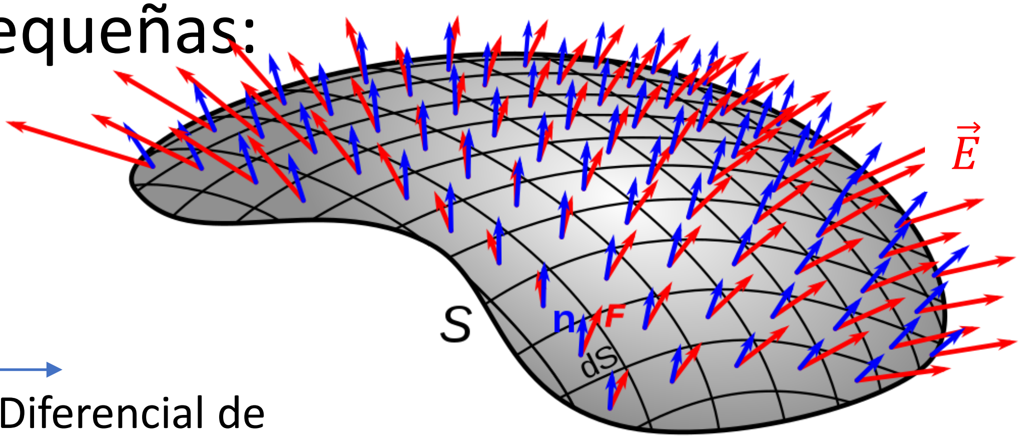
- Si las facetas son infinitesimalmente pequeñas:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n}\, ds$$

Campo en la faceta infinitesimal

Normal a la faceta infinitesimal

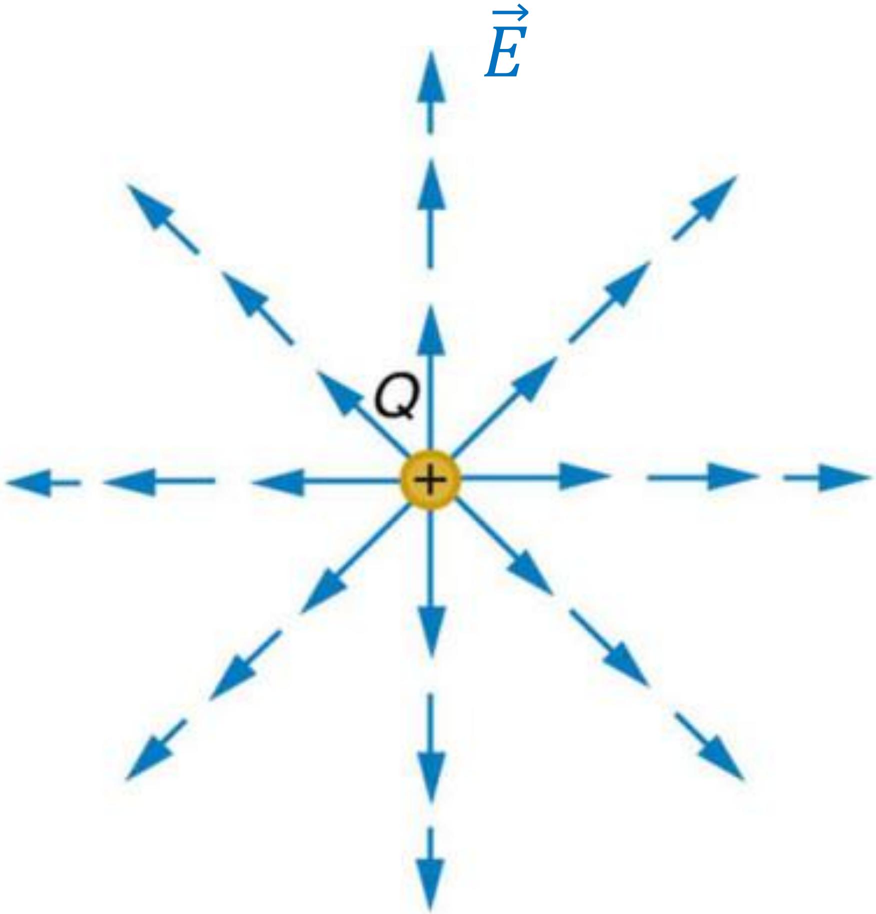
Diferencial de área



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r es siempre radial y vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}$$

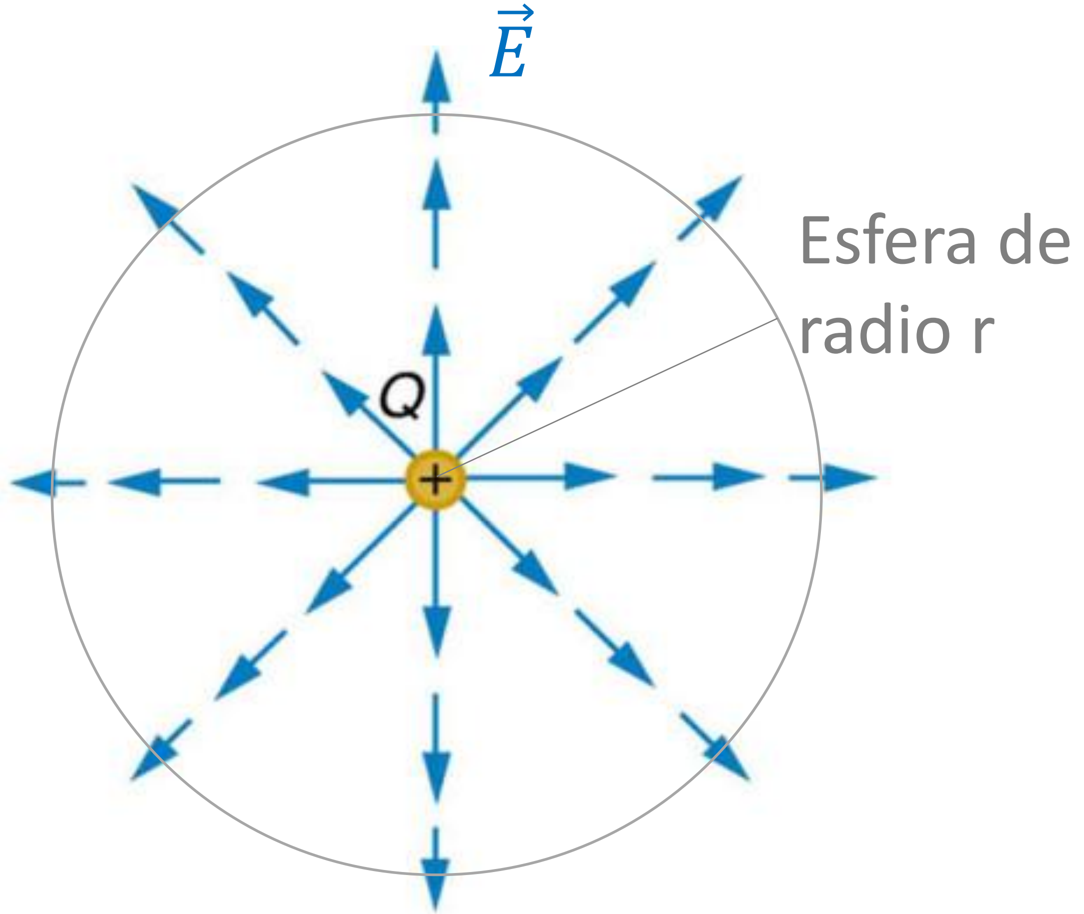


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- El flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio r vale:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Superficie de
la esfera

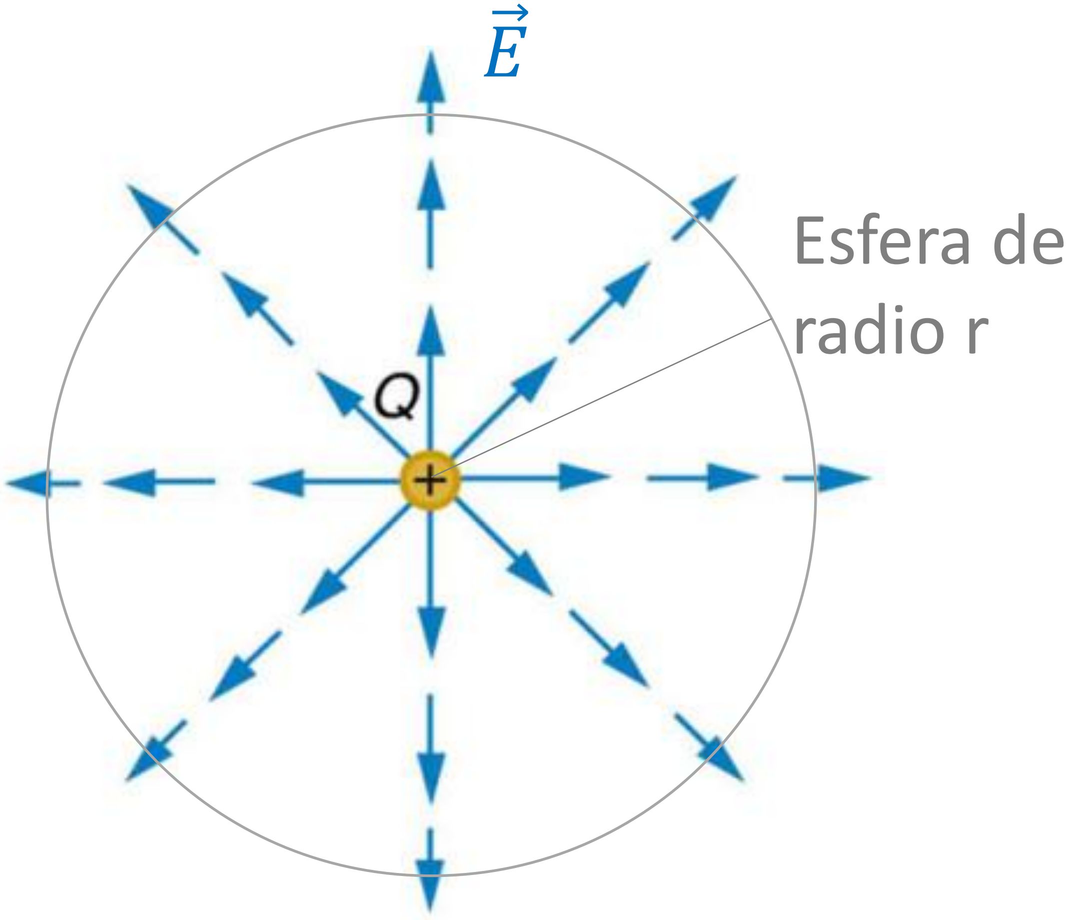


Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- Sobre la esfera, $\vec{E}$ apunta siempre radialmente y vale lo mismo

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot\overrightarrow{ds}$$

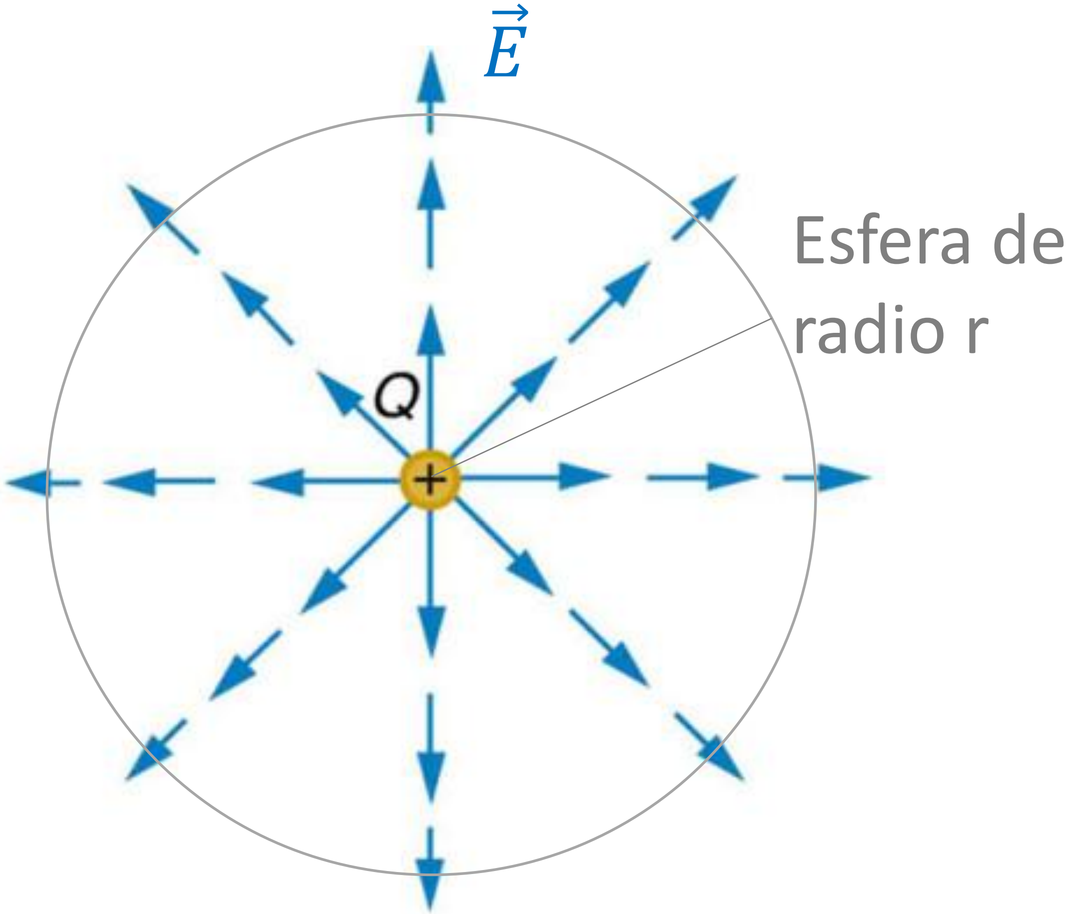
Superficie de la esfera



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\Phi = \int_{\substack{\text{Superficie de} \\ \text{la esfera}}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$



Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- Partiendo de:

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r}\cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

Superficie de
la esfera

- Reorganizamos los factores y tachamos los r^2

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\cancel{r^2}}\cancel{r^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}\cdot\hat{r}$$

Superficie de
la esfera

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- Luego, sabemos que por definición $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sin\theta \; d\theta \; d\varphi$$

Superficie de
la esfera

- Ponemos ahora los límites de integración y Q sale afuera

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi} \sin\theta \; d\theta \; \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- La primera integral da 2, mientras que la segunda vale 2π, entonces

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q\ \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Vemos que el resultado no depende del radio de la esfera, o sea que es <u>el mismo para cualquier valor de r</u>.