Ley de Gauss

- Supongamos una superficie cerrada S que encierra un volumen V

- Se verifica que el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada dentro de S (es decir en el volumen V)

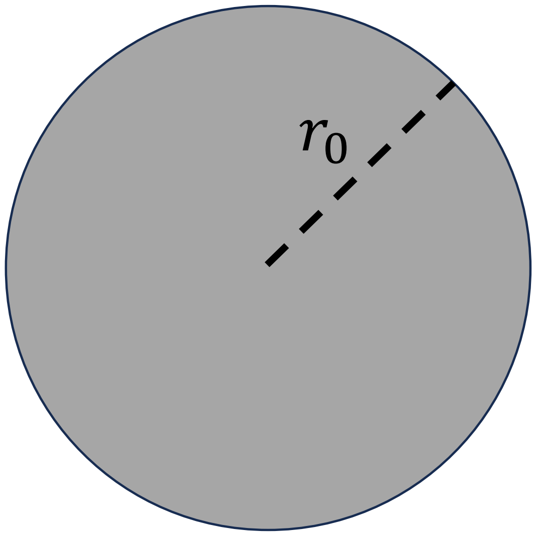
Carl Friederich Gauss
(1777-1855)

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho \, dV$$

Superficie cerrada S

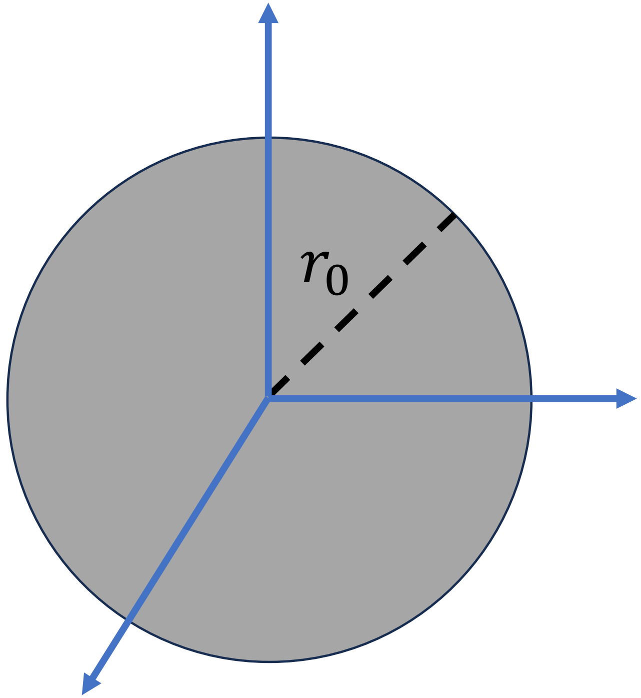
Volumen encerrado por S

Campo de una distribución esférica de carga



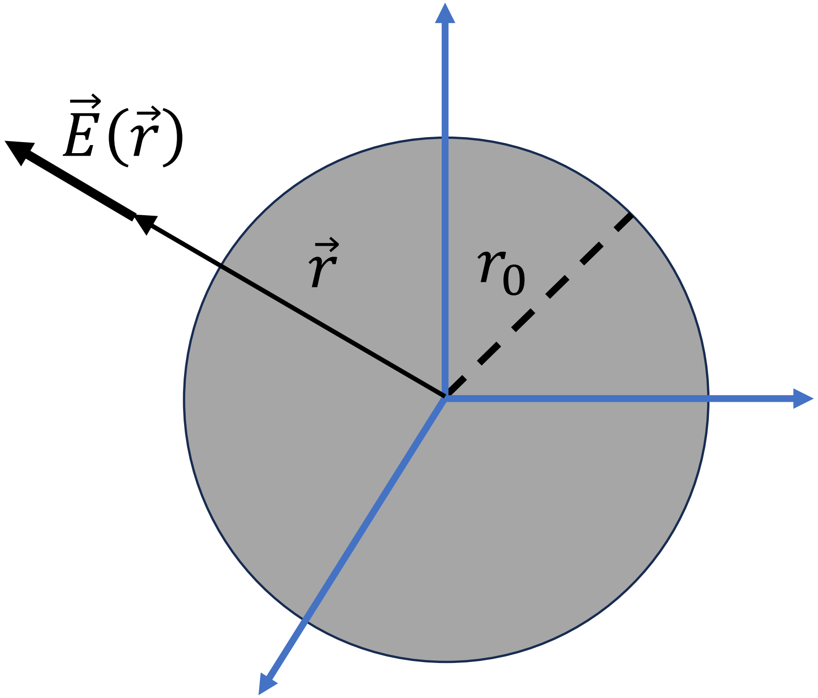
- Supongamos una distribución de carga esférica uniforme de radio r_0.
- Esto quiere decir que la densidad de carga ρ vale lo mismo dentro de la esfera de radio r_0.
- Fuera de la esfera, no hay cargas.
- Vamos a usar la Ley de Gauss para obtener el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio.

Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la esfera alrededor del origen no cambia nada).
- Vamos a elegir un sistema de coordenadas esférico con origen en el centro de la esfera.
- De esta manera ρ es una constante entre $0 < r \leq r_0$ y $\rho = 0$ para $r > r_0$

Campo de una distribución esférica de carga



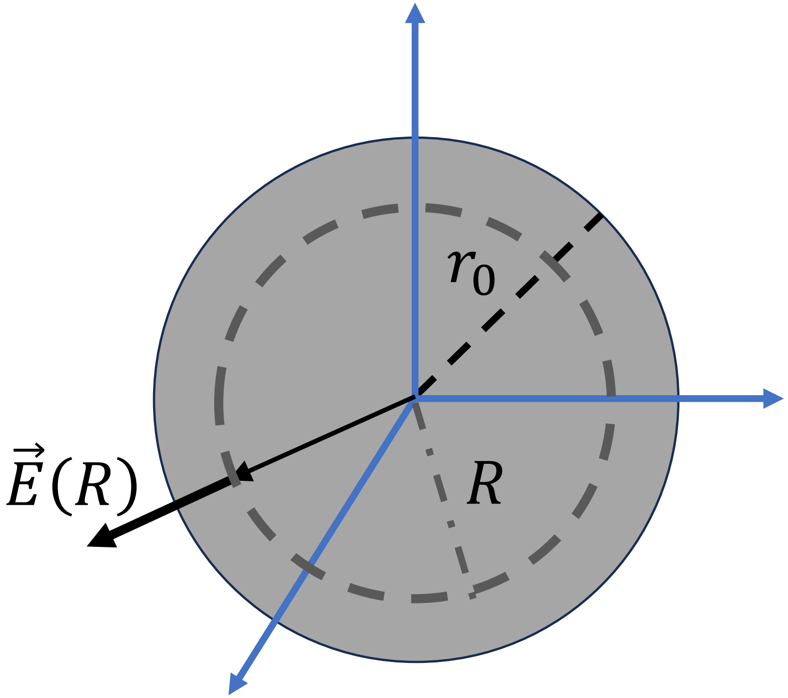
- Con esa simetría, esperamos que el vector campo eléctrico $\vec{E}$ solo tenga componente radial:

$$\vec{E} = E\,\hat{r}$$

- Además, esperamos que $\vec{E}$ solamente de la distancia radial r.

$$\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$$

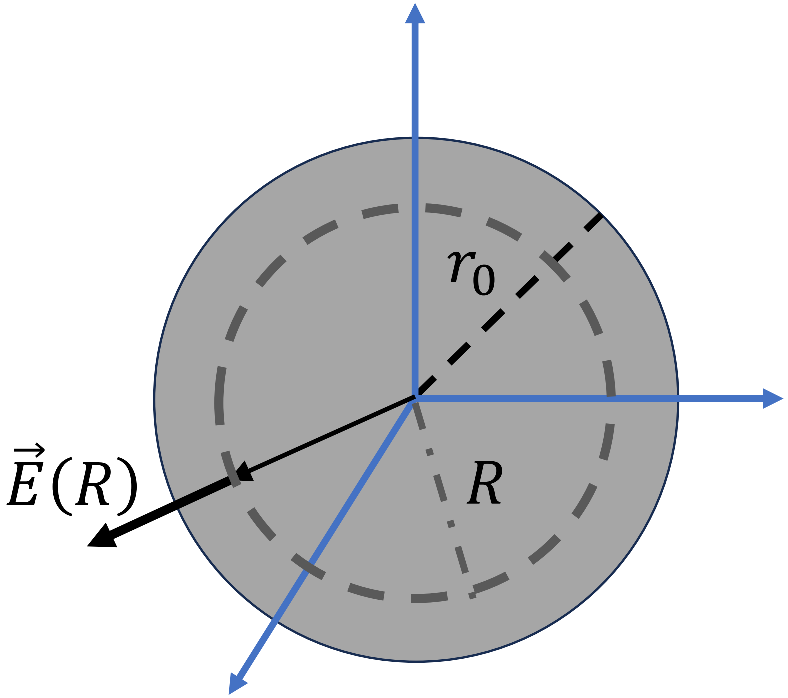
Campo de una distribución esférica de carga



- Separemos el problema en dos regiones: dentro ($0 < r \leq r_0$) y fuera de la esfera de carga ($r > r_0$).
- Planteemos la Ley de Gauss dentro de la esfera ($0 < r \leq r_0$) .
- Tomemos como superficie cerrada una esfera de radio $R < r_0$ que llamaremos $S(R)$.

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen Encerrado por } S(R)} \rho \, dV$$

Campo de una distribución esférica de carga



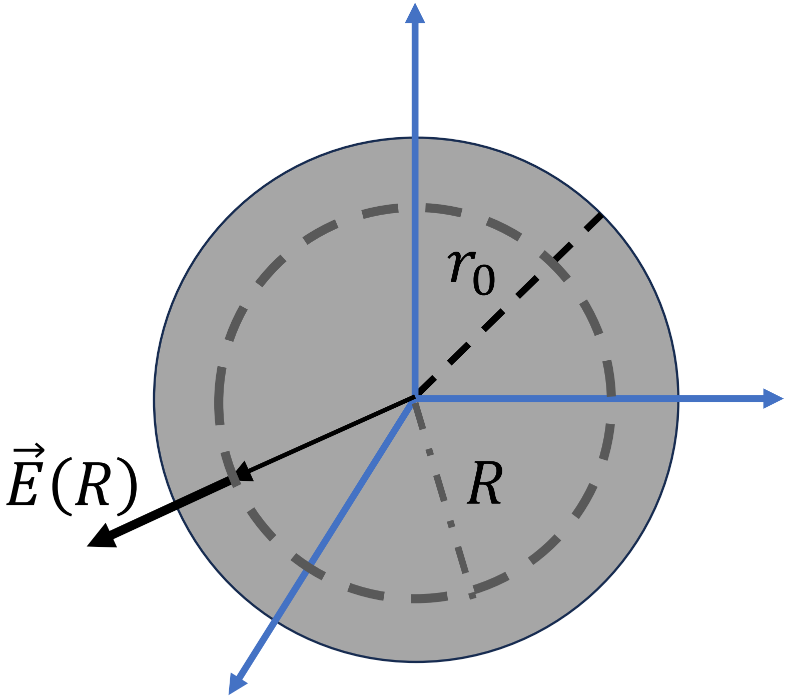
- El segundo miembro es fácil de calcular, ya que ρ dentro de la esfera de radio R es constante.

$$\frac{1}{\epsilon_0}\iiint \rho\, dV = \frac{\rho}{\epsilon_0}\underbrace{\iiint dV}_{\text{Volumen Encerrado por } S(R)} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}R^3$$

- El primer miembro es una integral hecha sobre la esfera de radio R. Sobre la esfera:

$$\vec{E} = E(R)\hat{r}$$
$$\overrightarrow{da} = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, \hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



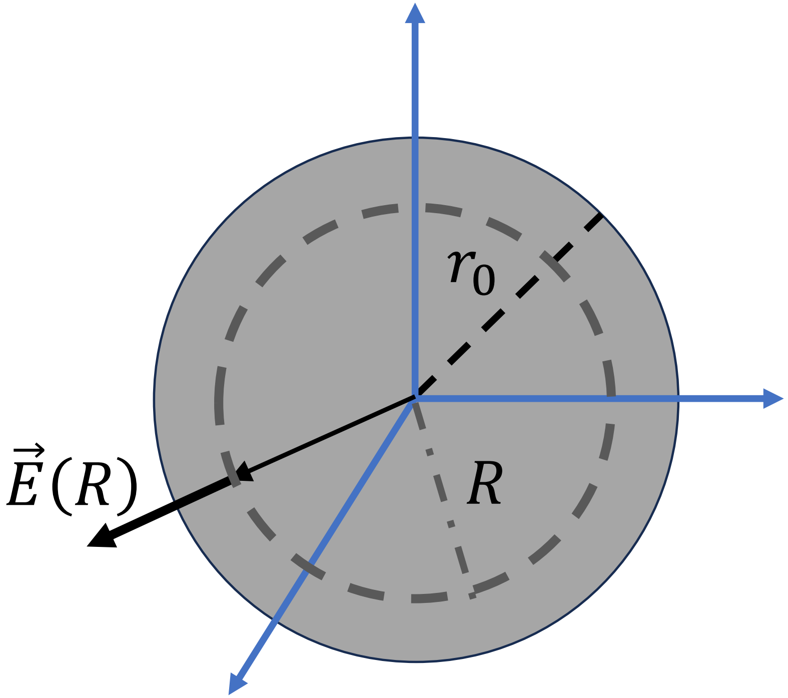
- El segundo miembro es fácil de calcular, ya que ρ dentro de la esfera de radio R es constante.

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(R)\hat{r} \cdot R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

- Como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ tenemos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(R) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

Campo de una distribución esférica de carga



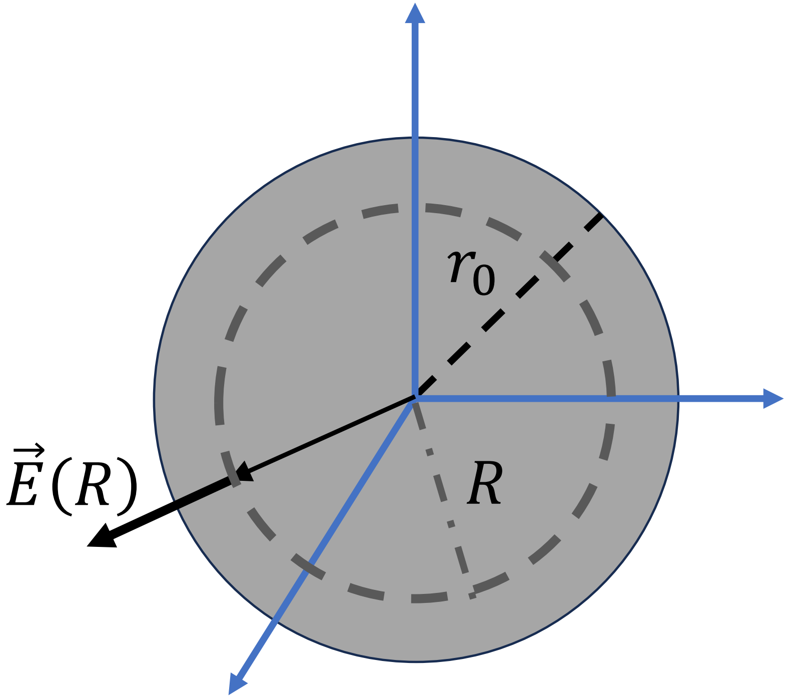
- Lo interesante es que por simetría, $E(R)$ vale lo mismo en toda la esfera. Por eso junto a R^2 salen afuera de la integral

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = E(R)R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

- Como vimos antes, la integral doble da 4π y entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = E(R)4\pi R^2 = E(R)S(R)$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Entonces, juntando primer y segundo miembros:

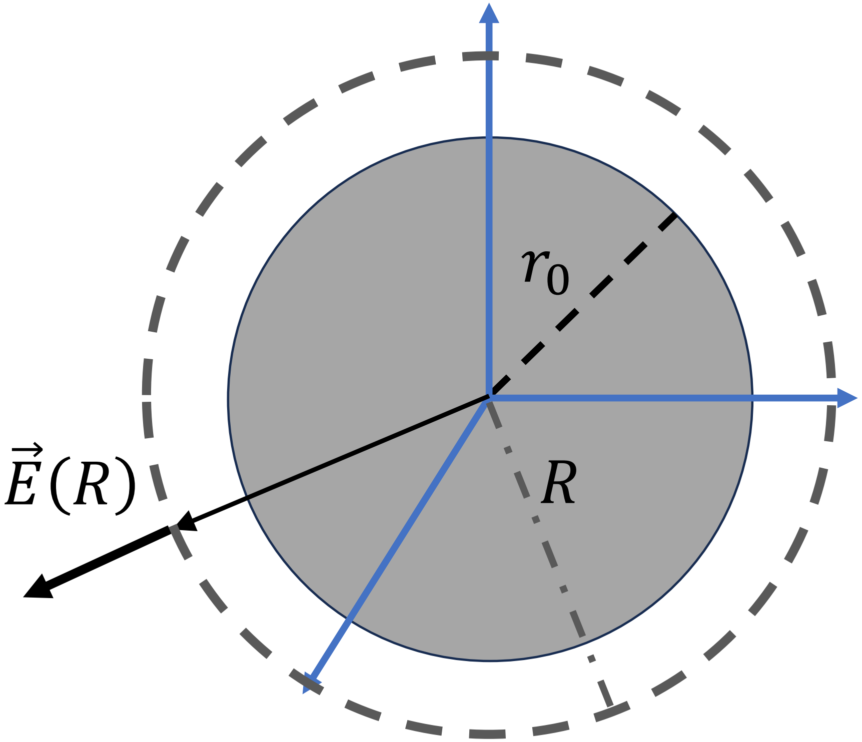
$$E(R)4\pi R^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3}R^3$$

- De aquí despejamos $E(R)$

$$E(R)\cancel{4\pi}\cancel{R^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{\cancel{4\pi}}{3}R^{\cancel{3}}$$

$$E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{R}{3}$$

Campo de una distribución esférica de carga



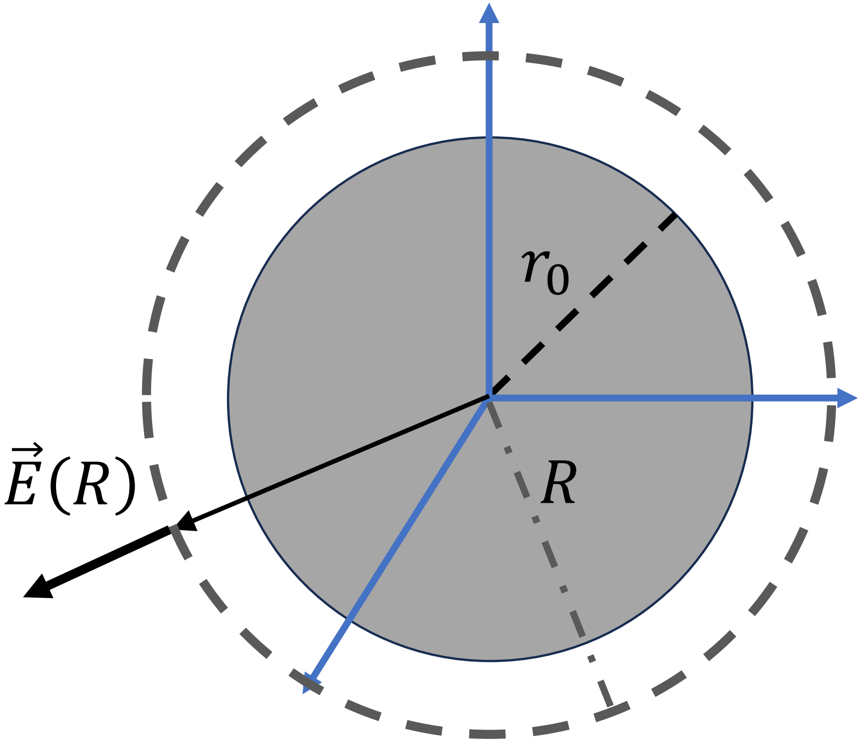
- Entonces, para $0 < r \leq r_0$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r}{3}\hat{r}$$

- Para $r > r_0$ trazamos una esfera una esfera de radio $R > r_0$
- La forma del primer miembro queda igual. Es el módulo del campo por la superficie de la esfera

$$E(R)4\pi R^2$$

Campo de una distribución esférica de carga



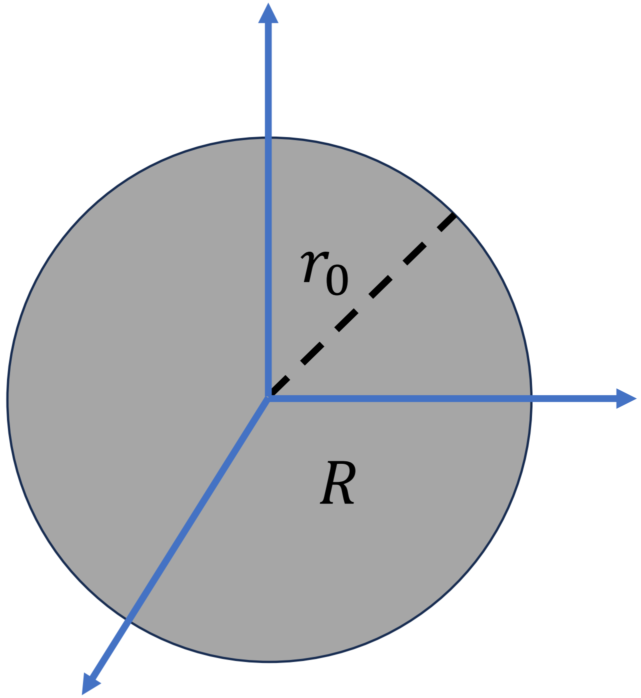
- En el segundo miembro hay que ver que para todo $R > r_0$ la cantidad de carga encerrada permanece igual y es la carga total:

$$\underbrace{\iiint \frac{\rho}{\epsilon_0} dV}_{\substack{\text{Volumen de carga} \\ \text{Encerrado por } S(R)}} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4\pi}{3} r_0^3$$

- Entonces sobre la esfera de radio $R > r_0$:

$$E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r_0^3}{3R^2}$$

Campo de una distribución esférica de carga



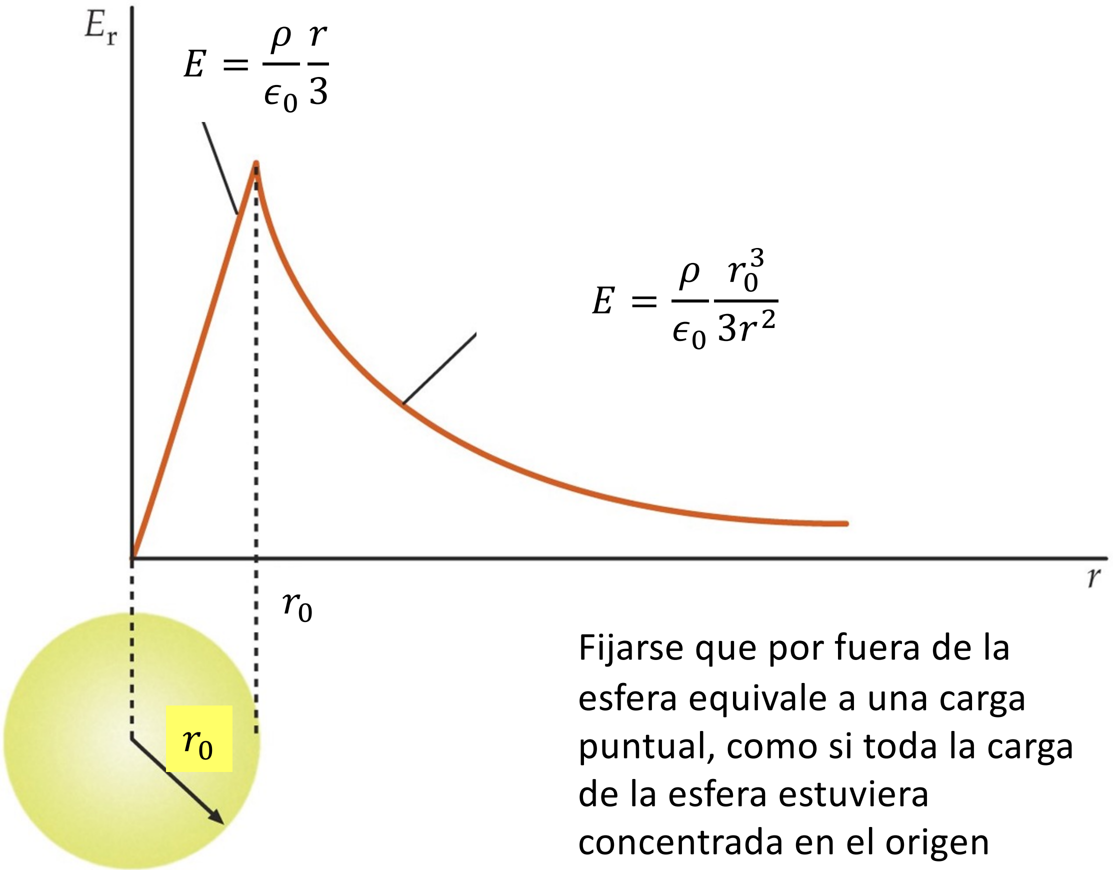
- La solución entonces para $r < r_0$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r}{3}\hat{r}$$

- Y para $r > r_0$

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{r_0^3}{3r^2}\hat{r}$$

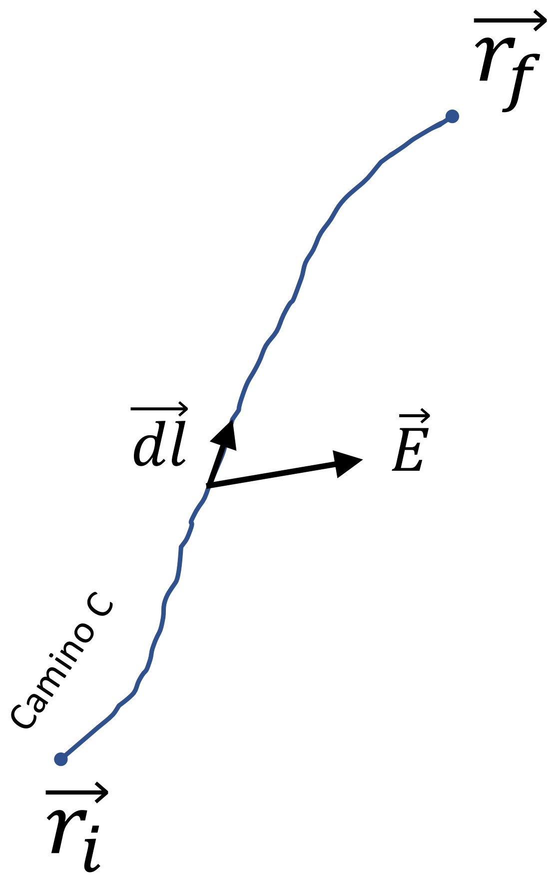
Campo de una distribución esférica de carga



Fijarse que por fuera de la esfera equivale a una carga puntual, como si toda la carga de la esfera estuviera concentrada en el origen

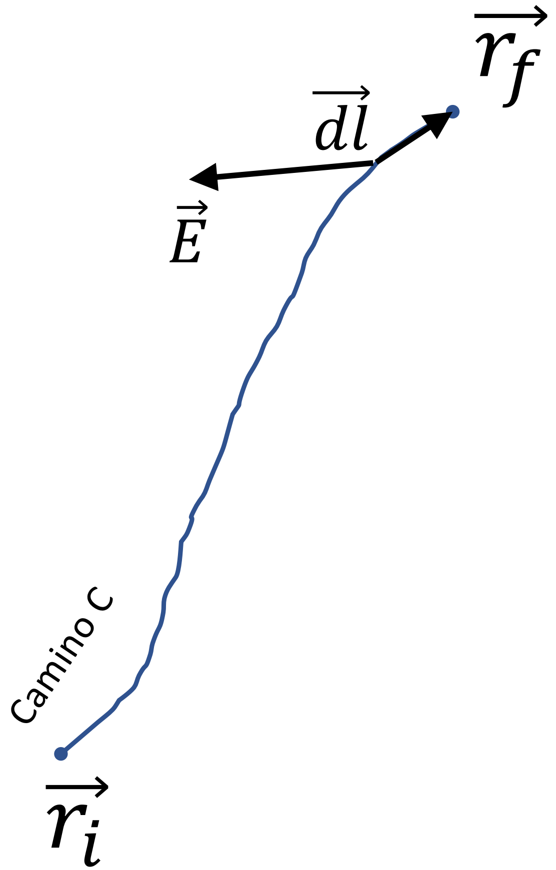
Diferencia de Potencial y función potencial en electrostática

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$.

$$\int_{\overrightarrow{r_i}\atop C}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

Diferencia de potencial entre dos puntos

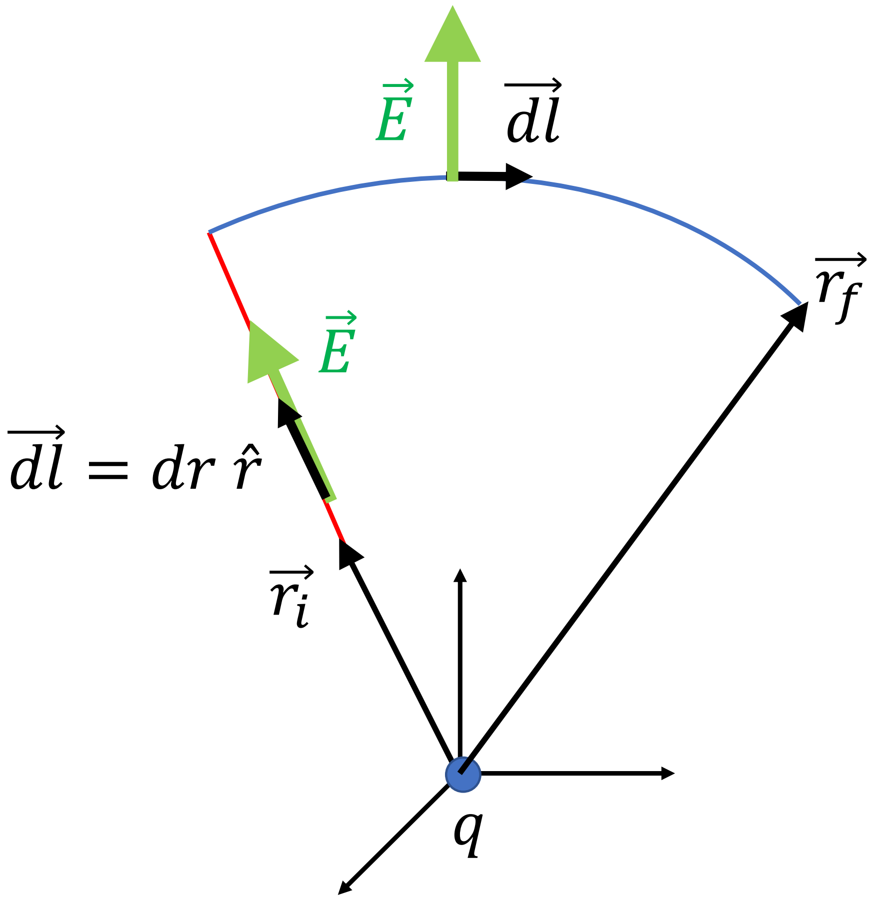
- **Definimos la diferencia de potencial entre** $\overrightarrow{r_i}$ **y** $\overrightarrow{r_f}$ **se define como**:

$$\varphi_{21} = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$
$$C$$

- En campos electrostáticos, **esta integral de línea no depende del camino y sólo de las posiciones de** $\overrightarrow{r_i}$ **y** $\overrightarrow{r_f}$ **:**

$$-\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \varphi(\overrightarrow{r_f}) - \varphi(\overrightarrow{r_i})$$

Ejemplo: carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

- Como puedo elegir cualquier camino, elijo un camino radial desde r_i a r_f + un arco a r_f constante) la integral entre $\vec{r_i}$ y $\vec{r_f}$ da:

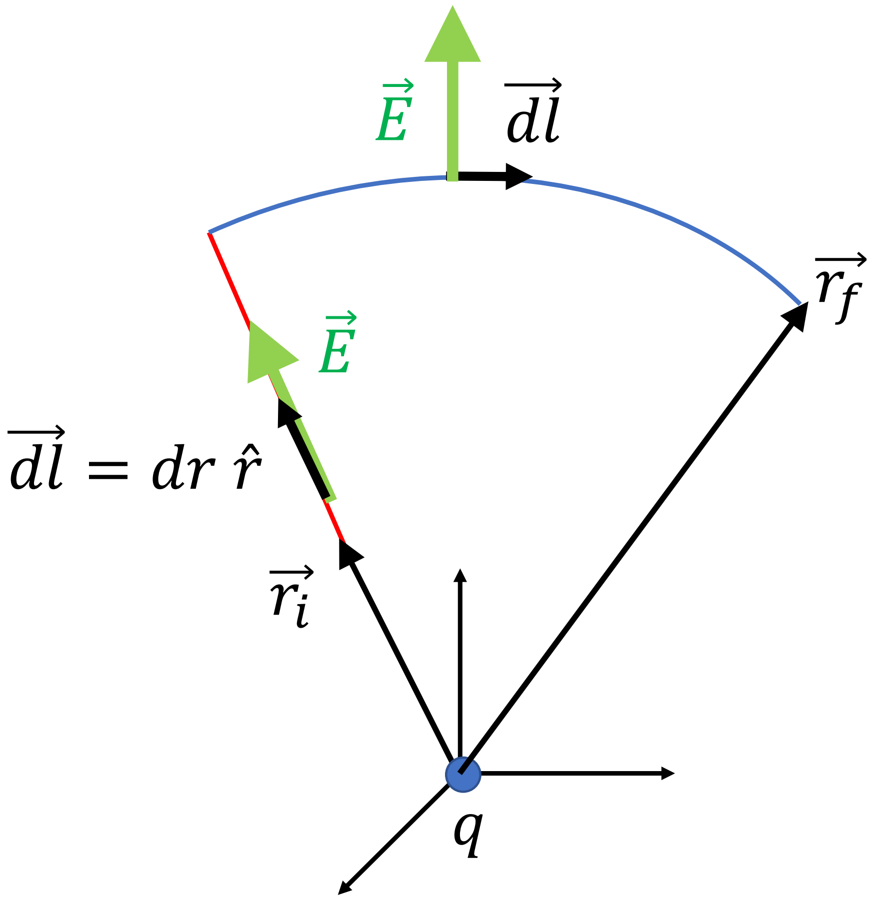
$$\int_{\vec{r_i}}^{\vec{r_f}} \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} = \int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl} + \cancel{\int \vec{E}\cdot\overrightarrow{dl}}$$

Camino radial

Arco

Son perpendiculares!

Ejemplo: carga puntual



- Entonces, como en el primer término $\vec{E}$ *es paralelo a* $\overrightarrow{dl} = r\hat{r}$:

$$\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}\, dr$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right]$$

Ejemplo: carga puntual

- Entonces la diferencia de potencial entre dos puntos $\overrightarrow{r_i}$ y $\overrightarrow{r_f}$ es para este caso:

$$\varphi_{21} = -\int_{\overrightarrow{r_i}}^{\overrightarrow{r_f}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i}\right]$$

- Se puede definir una **función potencial** $\phi(r)$ si coloco un potencial de referencia común para todo el sistema. Podemos hacerlo en $r_i = \infty$ (muy lejos de la distribución) con lo cual:

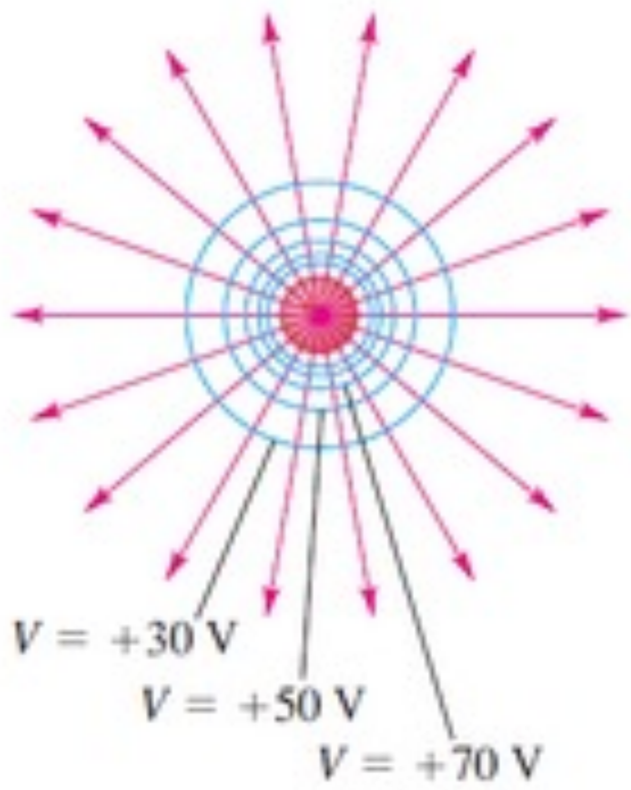
$$\varphi(r) = -\int_{punto\ muy\ lejos}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}$$

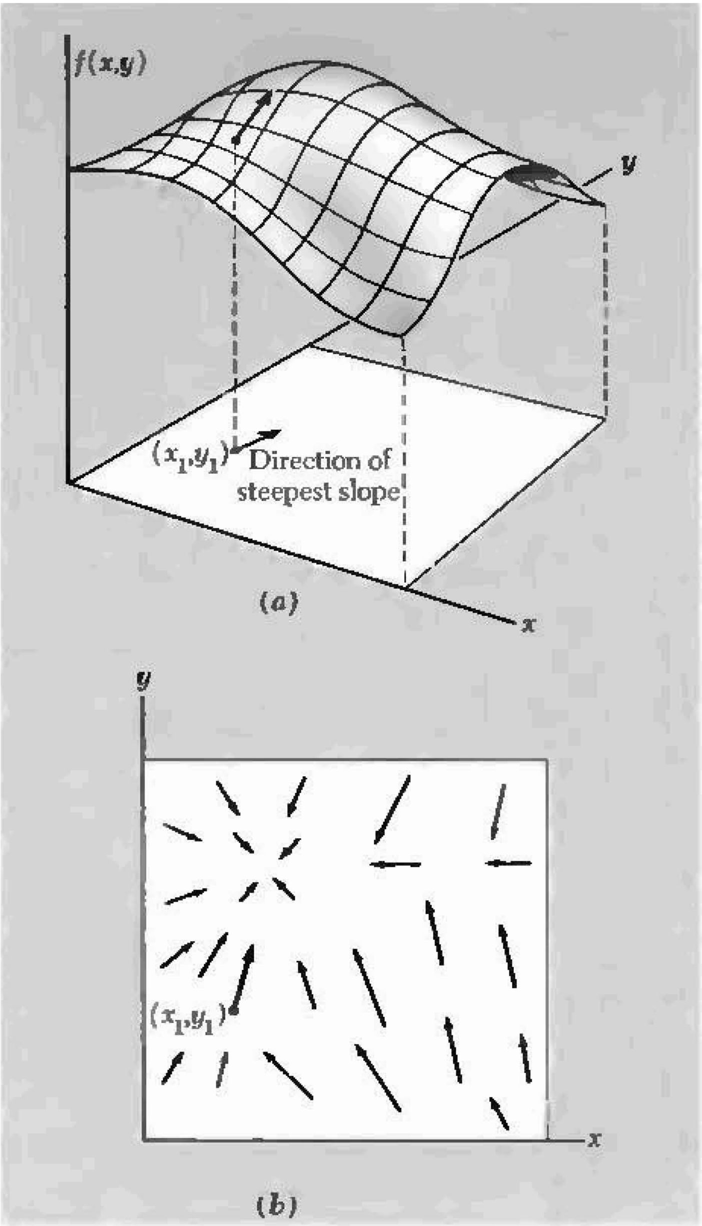
Superficies equipotenciales

- Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial.

- ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso que acabamos de ver?

(a) A single positive charge





Gradiente del potencial

- Dada una función $f(x, y, z)$ derivable, el vector gradiente $\vec{\nabla} f$ nos da la dirección de mayor crecimiento de la función f en el punto (x, y, z).

- En cartesianas

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\hat{z}$$

Gradiente del potencial y campo eléctrico

- La variación de la función potencial en un punto (x, y, z) viene dada por

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

- Por otro lado, sabemos que:

$$d\varphi = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

donde $\overrightarrow{ds}$ es el diferencial de camino

$$\overrightarrow{dl} = dx\, \hat{x} + dy\, \hat{y} + dz\, \hat{z}$$

- Entonces esto implica que:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

En electrostática, el campo eléctrico es conservativo y se define como menos el gradiente del potencial

Potencial de una distribución (acotada) de cargas

Diferencia de potencial para N cargas

- De manera análoga, para un sistema de N cargas $q_1 \ldots q_N$ y por el principio de superposición.

$$\varphi_{21} = -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -\int_{P_1}^{P_2} \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \cdots + \vec{E}_N\right) \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$= -\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_1 \cdot \overrightarrow{dl} - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_2 \cdot \overrightarrow{dl} - \cdots - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E}_N \cdot \overrightarrow{dl}$$

- Centrándonos en cada carga:

$$\varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \left[\frac{1}{r_{2i}} - \frac{1}{r_{1i}}\right]$$

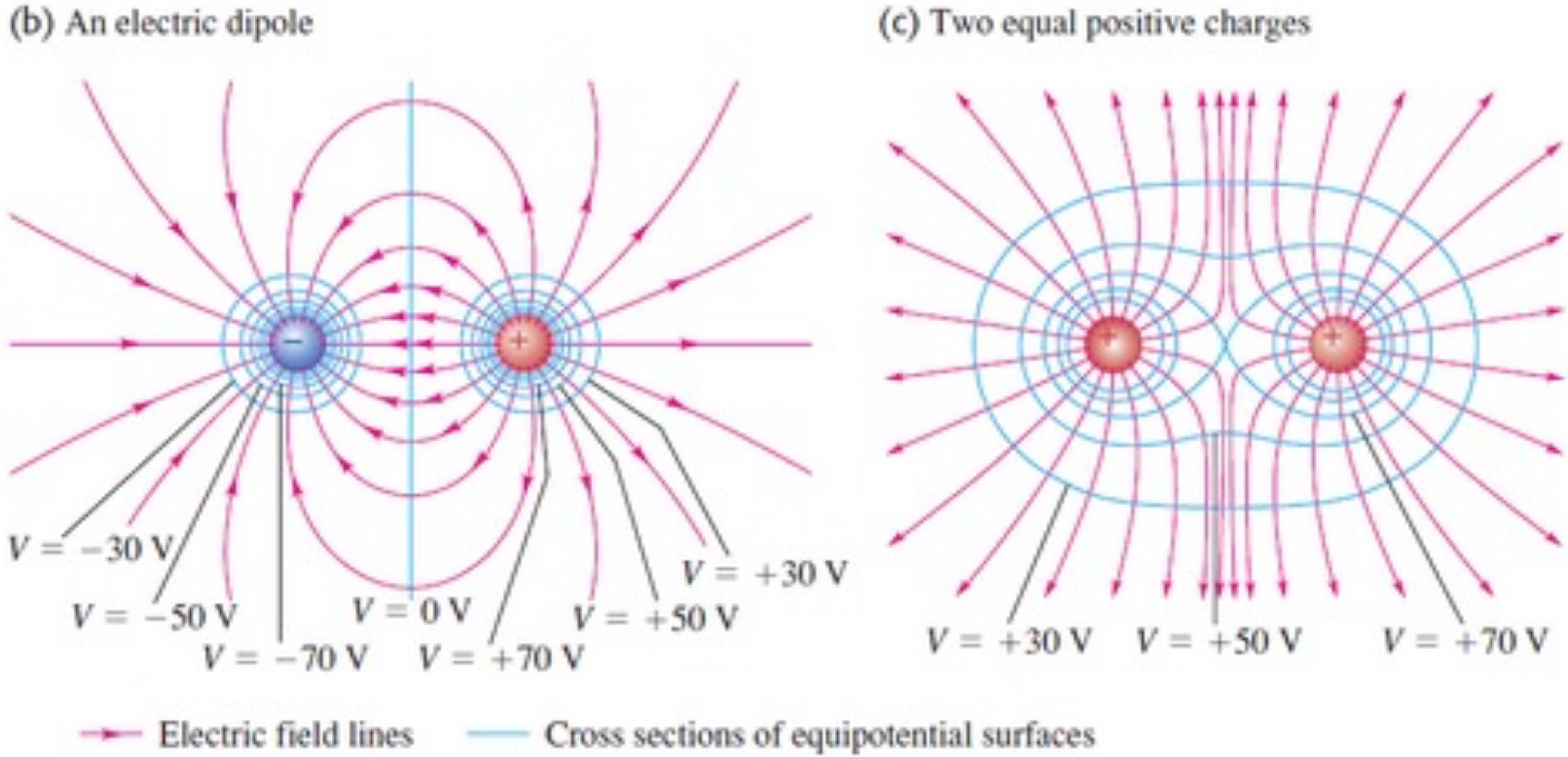
r_{1i}: distancia de q_i a P_1
r_{2i}: distancia de q_i a P_2

Función potencial para N cargas

- Si la distribución es acotada en el espacio puedo poner como punto de potencial cero el infinito y entonces

$$\phi(r_1, \dots, r_N) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_i}$$

r_i: distancia desde cada q_i al punto de evaluación del potencial


(b) An electric dipole
V = −30 V
V = −50 V
V = −70 V
V = 0 V
V = +70 V
V = +50 V
V = +30 V
(c) Two equal positive charges
V = +30 V
V = +50 V
V = +70 V
Electric field lines
Cross sections of equipotential surfaces

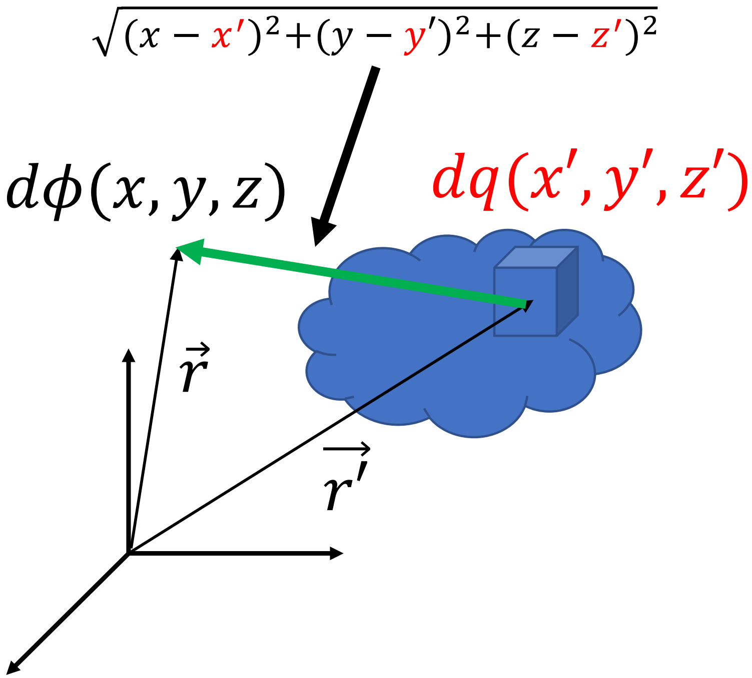
Potencial de una distribución contínua y acotada de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.

- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.

- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

Potencial de una distribución contínua y acotada de carga



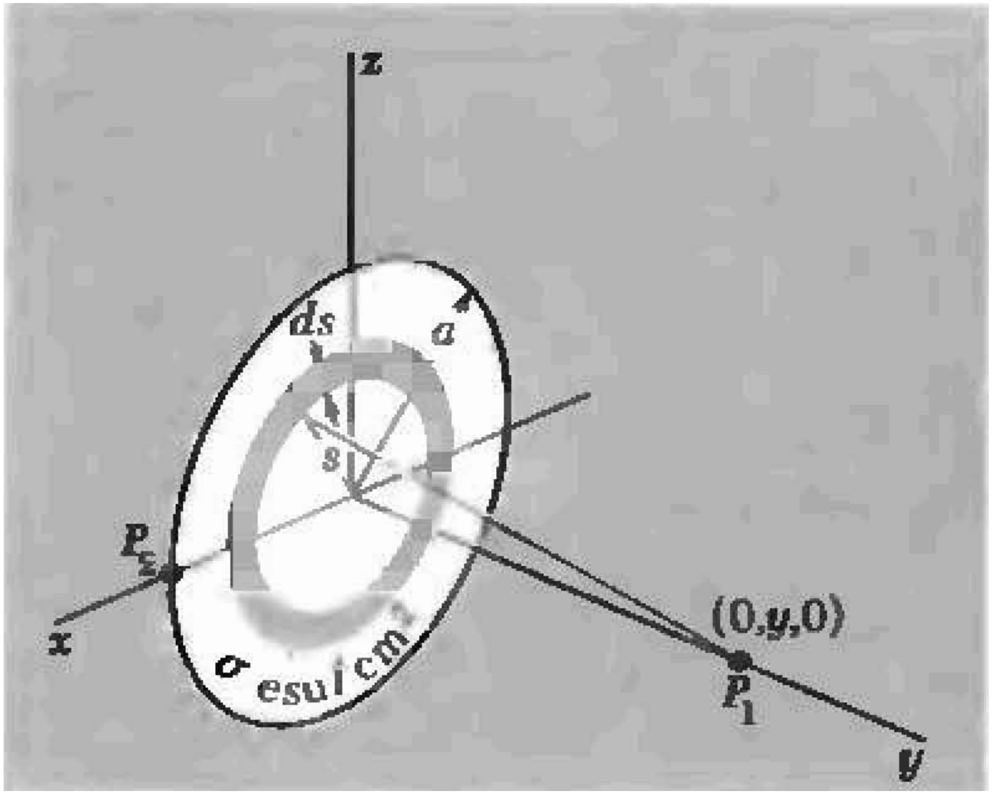
- La contribución de un pedacito de carga $\rho(x',y',z')dx'dy'dz'$ al potencial en x, y, z es:

$$d\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq(x',y',z')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(x',y',z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- Distribución acotada ✓
  - Radio *a*
  - Grosor despreciable
  - $\sigma = constante\ (\frac{C}{m^2})$

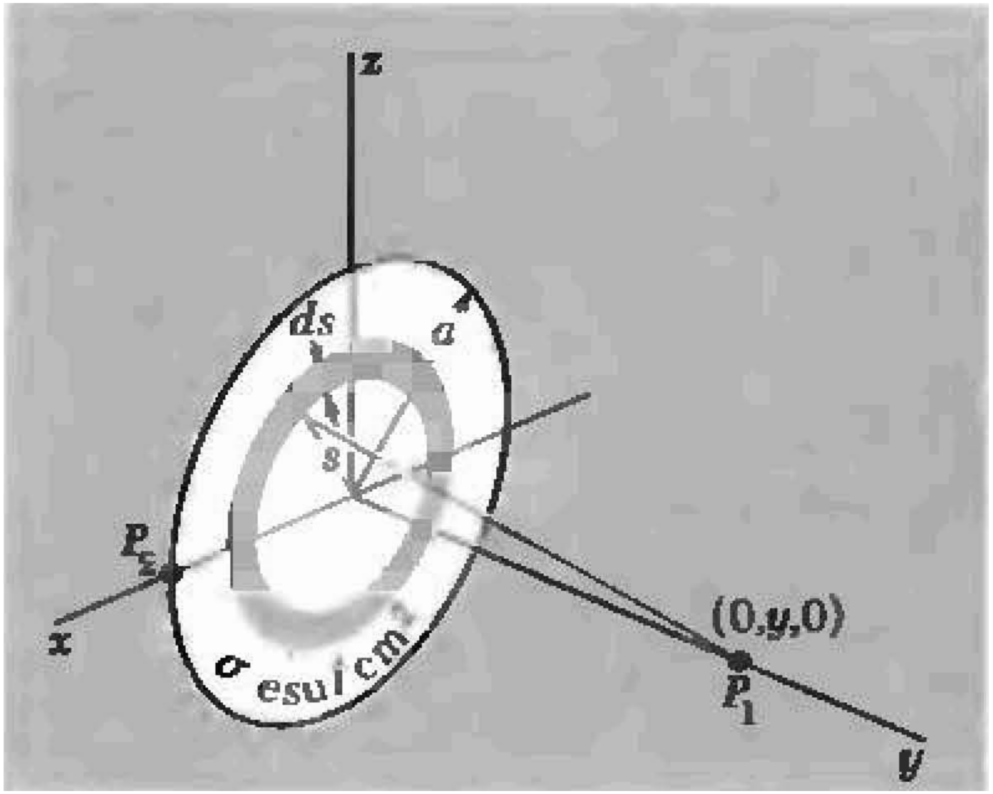
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría *y*.

$$dq = \sigma\, dA$$

$$dA = 2\pi s\, ds$$

(dA área de un anillo de radio s y ancho ds).

Ejemplo: disco cargado uniformemente

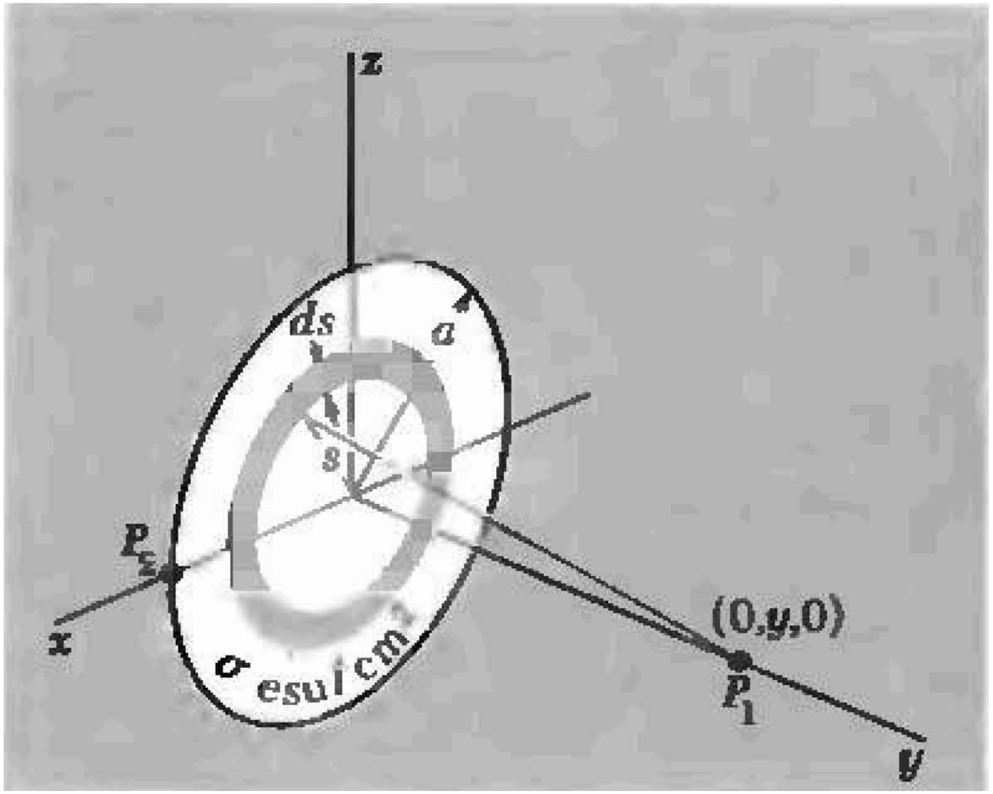


- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:
$$\sqrt{y^2 + s^2}$$
- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^a \frac{\sigma\, 2\pi s\, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\int_0^a \frac{2s\,ds}{\sqrt{y^2+s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left[\sqrt{y^2+a^2} - |y|\right]$$

El problema es simétrico respecto a y = 0

Conductores

Tipos de materiales eléctricos

- Conductores: Alta movilidad de portadores de carga (en sólidos, electrones). Las cargas sobre ellos se pueden mover libremente.

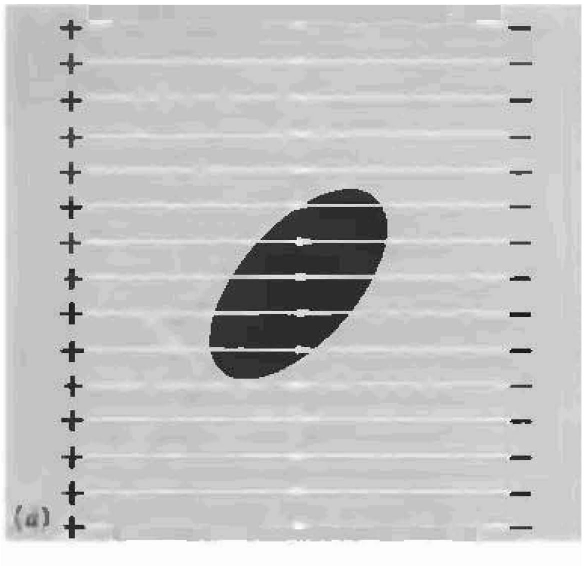
- Aislantes: baja movilidad de portadores de carga. Las cargas no se mueven a través de ellos

Conductores en electrostática

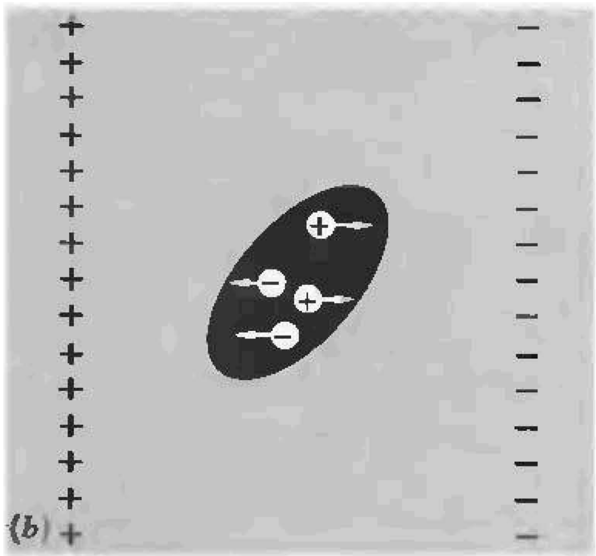
- Las cargas pueden reacomodarse libremente en un conductor.
- Este reacomodamiento se realiza de acuerdo a ciertas reglas.
- En electrostática, vamos a considerar las propiedades de los conductores una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (es decir, cuando las cargas ya se hayan acomodado).

Aislantes y conductores en campo externo

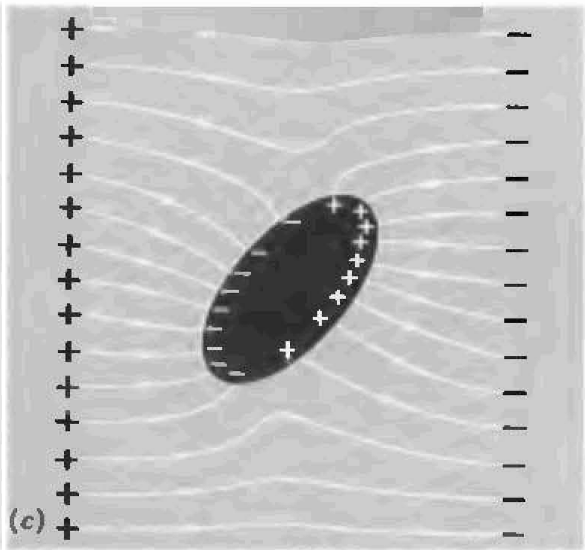
Aislante: el campo en el interior es prácticamente el del exterior



Conductor: las cargas se van a la superficie y dejan campo nulo en el interior

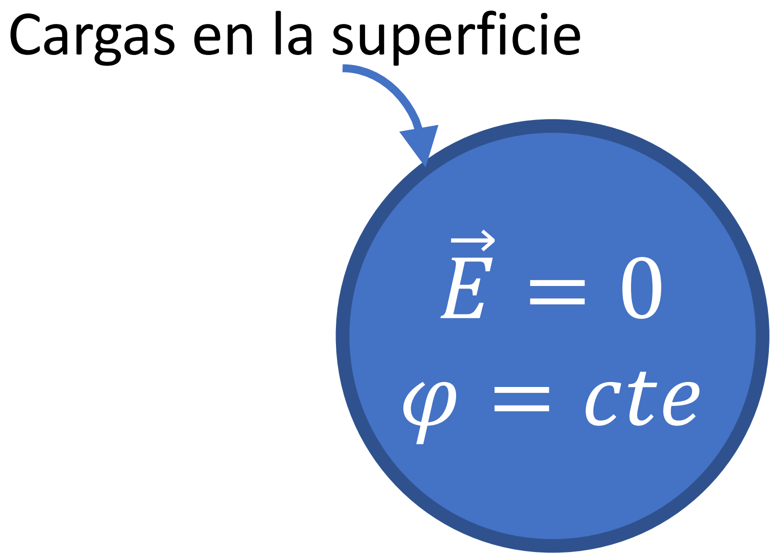


Transitorio



Estacionario

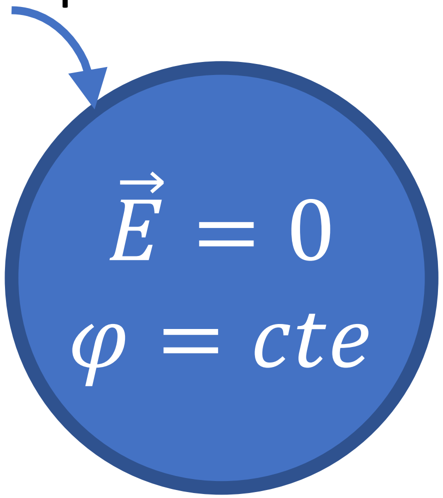
Propiedades de los conductores



- La idea de que todas las cargas van hacia la superficie y que en el interior el campo es nulo es la correcta si se tiene en cuenta que no existe otro tipo fuerza que mueva las cargas.
- Las cargas se mueven hasta llegar al borde del conductor del que no pueden salir

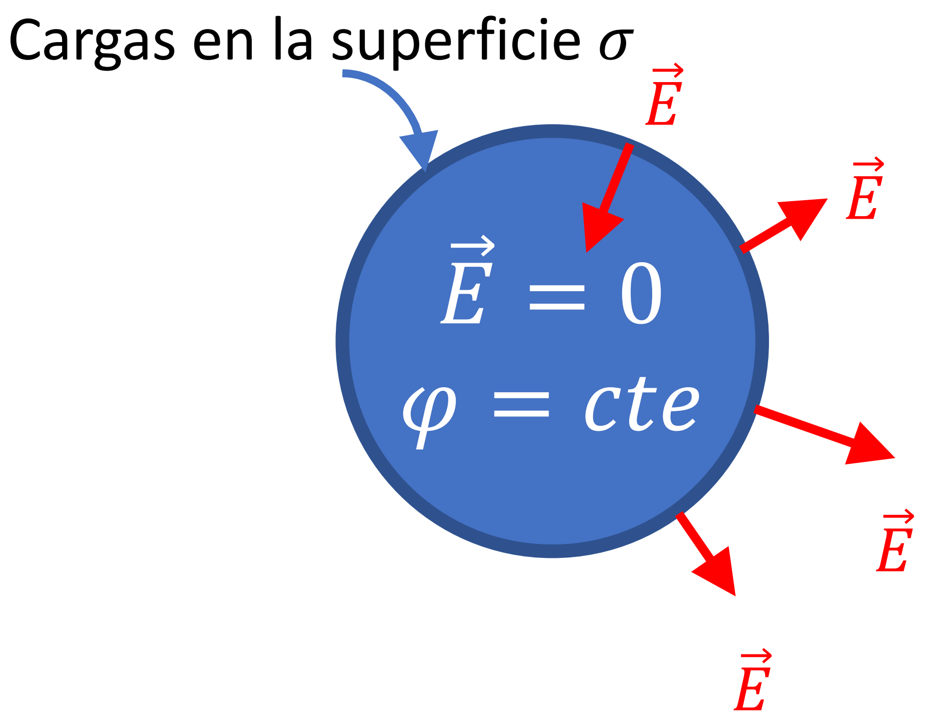
Propiedades de los conductores

Cargas en la superficie σ



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el potencial ahí es constante al igual que en su superficie.

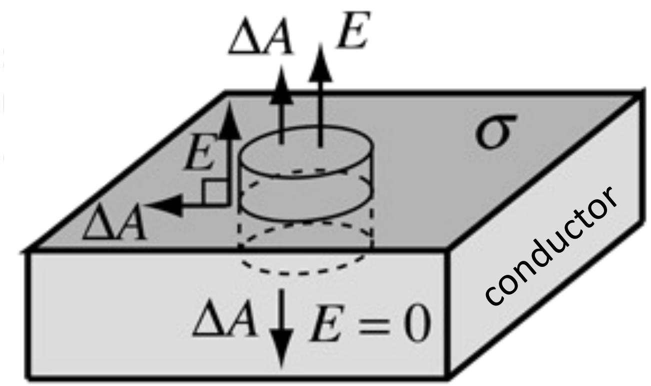
Propiedades de los conductores



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el **potencial ahí es constante al igual que en su superficie**.

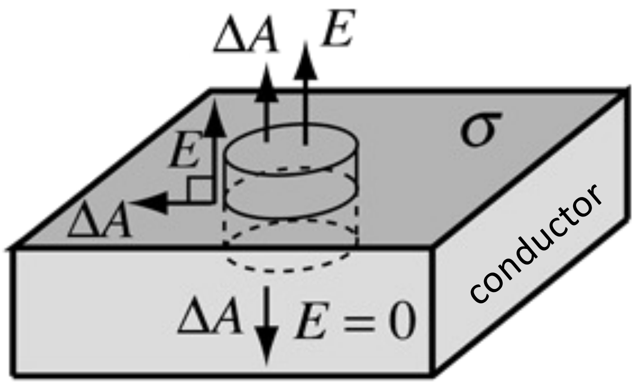
- Como la **superficie es equipotencial**, el **campo en esa superficie sólo puede ser normal a ella**.

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



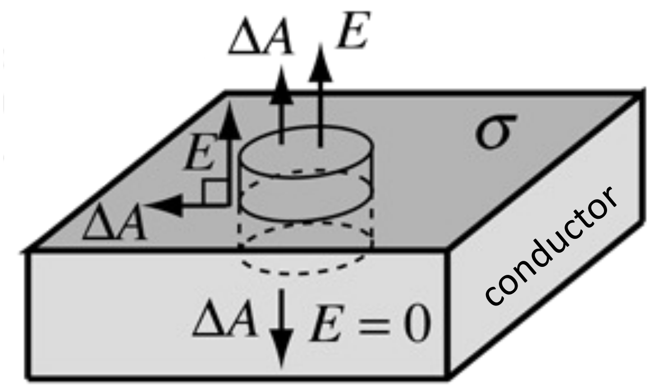
- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.
- Apliquemos la Ley de Gauss en un cilindro alineado con la normal a la superficie de un conductor donde hay una carga superficial de densidad σ (C/m^2)

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El único flujo que sobrevive es el que se da a través de la tapa externa de área ΔA

$$\int_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{carga\ encerrada}{\epsilon_0}$$

$$E\ \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E\ = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Campo eléctrico en conductores

- Cero en su interior
- En la superficie, es normal a ella.
- La intensidad depende de la densidad superficial de carga local