

08. Magnetostática

Fza de Lorentz

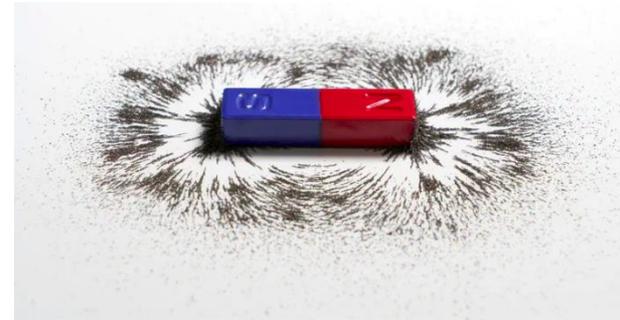
Fuentes de **B**

Intro: experiencia cotidiana

- Tenemos una idea de lo que es un imán



Interactúan con objetos de hierro o acero

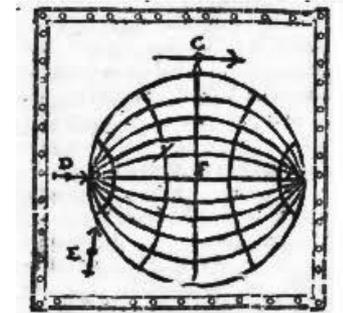


Barras imantadas tienen **dos polos**

Polos iguales se repelen, polos opuestos se atraen

Breve repaso histórico

- Hace 2000 años los griegos conocían un material (*magnetita*) que tenía la propiedad de atraer piezas de hierro.
- En 1269 Petrus Maricourt: Aguja metálica en las cercanías de un imán natural esférico se orienta a lo largo de líneas que lo rodean (meridianos) y parecen provenir de 2ptos opuestos de la esfera.
- En 1600 William Gilbert: Descubre que la Tierra es un imán natural (!) (PN magnetico ~ PS geografico y viceversa)
- En 1820 Hans Christien Oersted: Una corriente eléctrica que circula por un conductor, puede desviar y reorientar la aguja de una brújula.



Corrientes eléctricas (i.e. cargas que se mueven) pueden actuar como los imanes permanentes

Abordaje

Al estudiar electrostática:



Fuerzas sobre cargas de prueba
ubicadas en presencia de las fuentes

Analogamente...para magnetostática

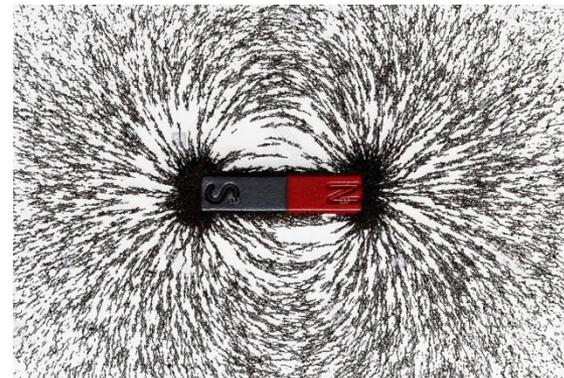
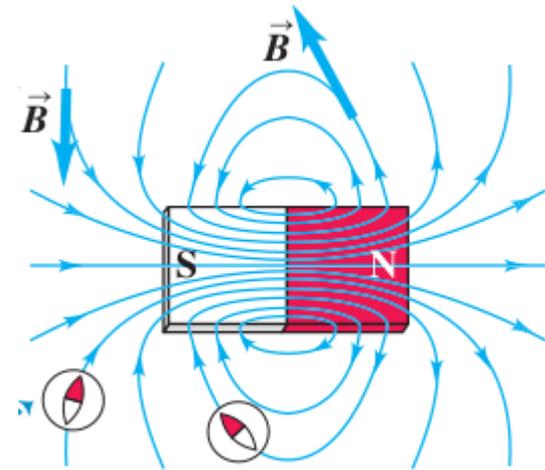


En un caso general, una carga de prueba, en presencia de fuentes de \mathbf{E} y \mathbf{B}

$$\vec{F}_{Lorentz} = q\vec{E}(\vec{r}) + q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

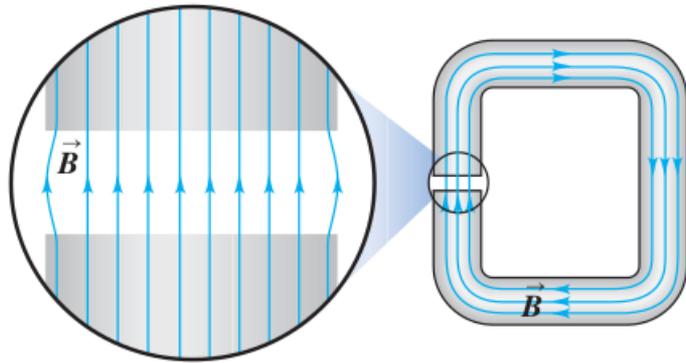
Líneas de campo magnético

- Líneas tangentes al campo \vec{B} en todo punto del espacio
- Hay más densidad de líneas en las regiones donde el campo es más intenso.
- Las líneas de campo magnético siempre son **cerradas** (no tienen principio ni fin, como las del campo eléctrico)
 - Hay campo dentro del imán.
 - Líneas de campo tienen dirección in-out en el **polo norte** del imán y out-in en el **polo sur** del imán

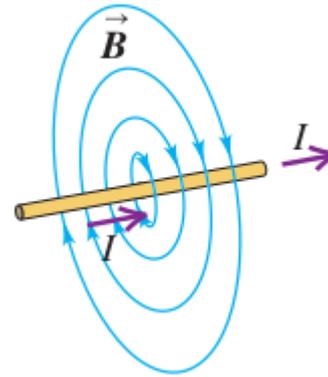


Ejemplos de fuentes de B

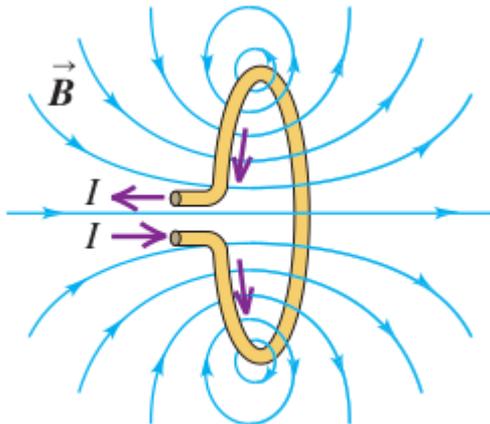
Iman permanente en forma de C



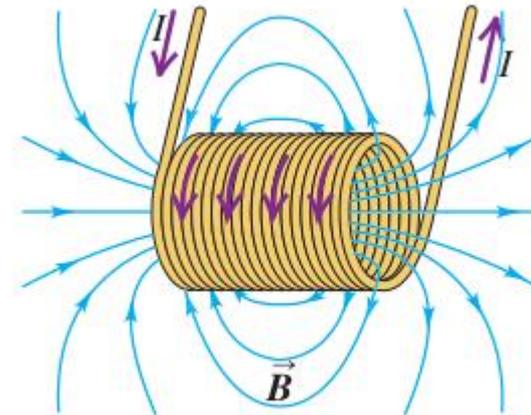
Alambre por el que circula corriente



Espira que conduce corriente

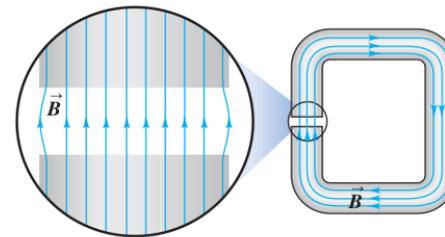


Corriente circulante en bobina (solenoides)



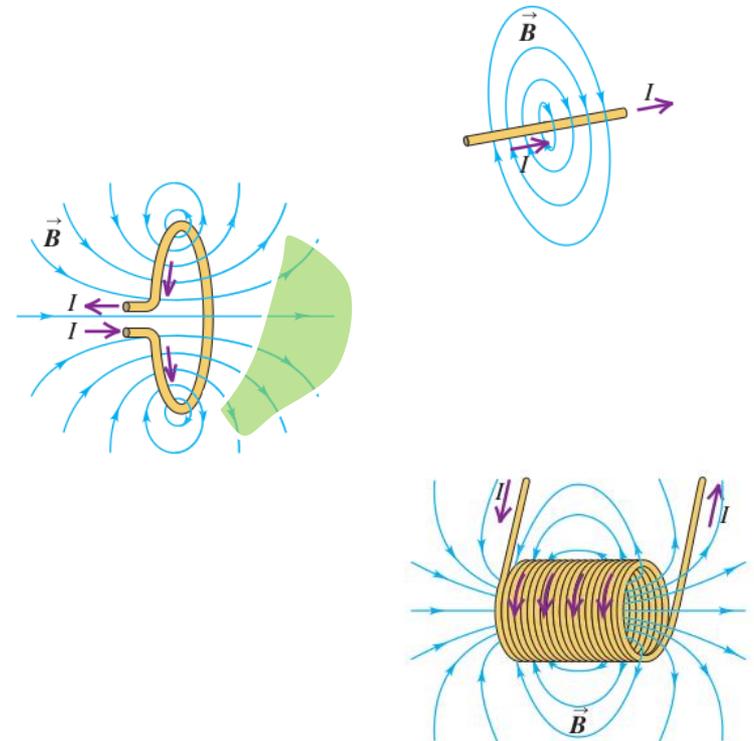
Ejemplos de fuentes de \vec{B}

- Las líneas de campo magnético siempre son **cerradas** (no tienen principio ni fin, como las del campo eléctrico)



- El flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada es siempre igual a cero

$$\oint \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$



- Cuando son producidas por corrientes, las líneas de campo magnético parecen **enrollarse** alrededor de las mismas.

Fuerzas sobre cargas

fuentes
(imanes permanentes
cargas electricas en movimiento)

→ Campo $\vec{B}(\vec{r})$ → $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$



Fuerza magnética sobre una carga

Supongamos una carga de prueba q que se mueve en presencia de fuentes que generan un campo \mathbf{B}

Experimentalmente se verifica que:

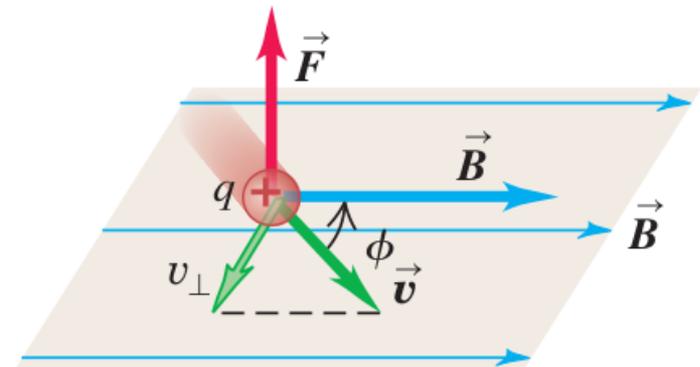
- La magnitud de la fza es proporcional a: q , v y B
- La magnitud de la fza depende del ángulo entre v y B
- La dirección de la fza es perpendicular al plano que incluye a v y B

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$F_B = q v B \sin \phi$$

Notar:

- Si la partícula se desplaza en la dirección de \mathbf{B} no experimenta fuerza
- En todo momento $\vec{F} \perp \vec{v}$ la fza magnética altera la dirección del desplazamiento pero no hace trabajo sobre la partícula



Fuerza magnética sobre una carga

Supongamos una carga de prueba q que se mueve en presencia de fuentes que generan un campo \mathbf{B}

Experimentalmente se verifica que:

- La magnitud de la fza es proporcional a: q , \mathbf{v} y \mathbf{B}
- La magnitud de la fza depende del ángulo entre \mathbf{v} y \mathbf{B}
- La dirección de la fza es perpendicular al plano que incluye a \mathbf{v} y \mathbf{B}

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

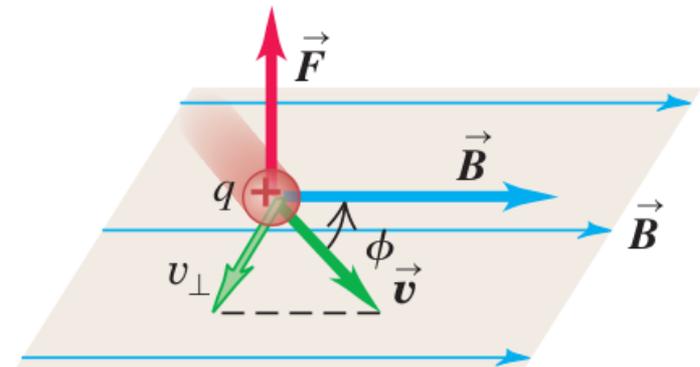
$$F_B = q v B \sin \phi$$

$$[B] = \frac{[F]}{[q][v]} = \frac{N}{C \frac{m}{s}} = \frac{N}{Am} = T \leftarrow \text{Tesla}$$

Tierra: $B_{\text{Terrestre}} \sim 10^{-4} T$ (en la superficie)

Imanes fuertes: $B \sim 0.1 - 0.5 T$

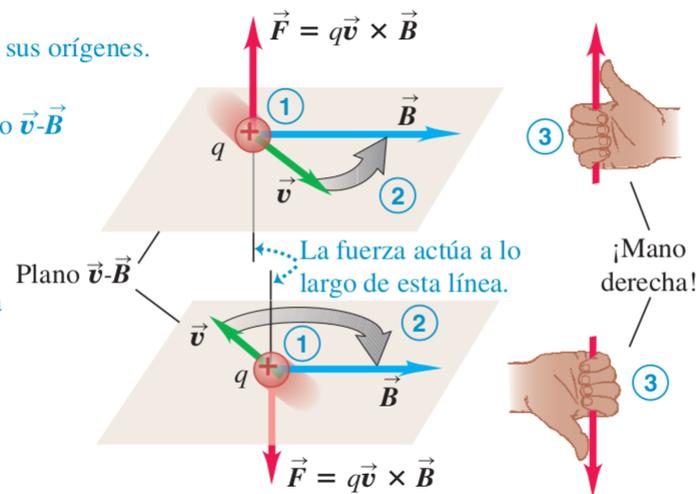
Otra unidad: Gauss $1G = 10^{-4} T$



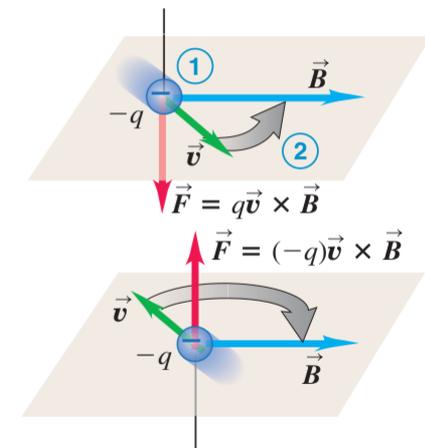
La regla de la mano derecha

Regla de la mano derecha para la dirección de la fuerza magnética sobre una carga **positiva** que se mueve en un campo magnético:

- 1 Coloque los vectores \vec{v} y \vec{B} unidos en sus orígenes.
- 2 Imagine que gira \vec{v} hacia \vec{B} en el plano $\vec{v}\text{-}\vec{B}$ (en el menor ángulo).
- 3 La fuerza actúa a lo largo de una línea perpendicular al plano $\vec{v}\text{-}\vec{B}$. Enrolle los dedos de su mano derecha en torno a esta línea en la misma dirección que giró a \vec{v} . Ahora, su pulgar apunta en la dirección que actúa la fuerza.



Si la carga es negativa, la dirección de la fuerza es **opuesta** a la que da la regla de la mano derecha.



Ejemplo: 1

- En todo momento $\vec{F} \perp \vec{v}$ la fza magnética
- \vec{F} altera la dirección del desplazamiento pero **no hace trabajo** sobre la partícula (no altera su energía cinética)
- Ejemplo: partícula en movimiento en una región de \mathbf{B} uniforme

Vemos que \mathbf{F} actúa como fza centrípeta (provee una aceleración hacia el centro de una circunferencia)

$$|\vec{F}| = m|\vec{a}|$$

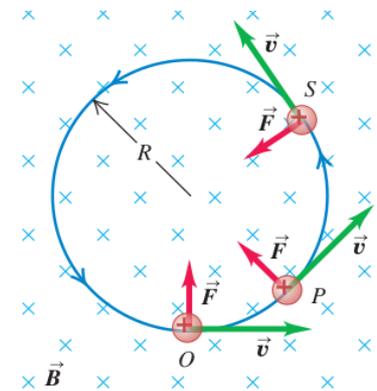
$$q v B = m a_c = m \frac{v^2}{r}$$

El radio de curvatura:

$$r = \frac{m v}{q B}$$

$$\vec{F}_B = q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$F_B = q v B \sin \phi$$



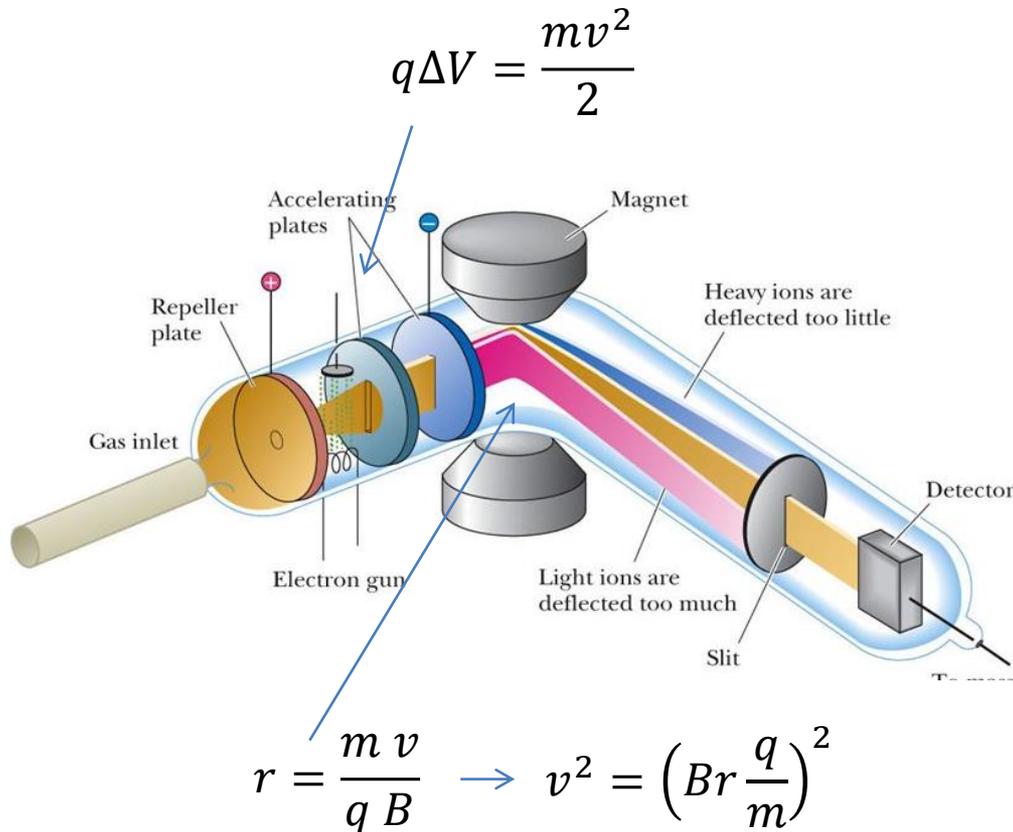
El período de la órbita circular

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

...es independiente de v (!)

Espectrografía de masas

Técnica para medir masa por unidad de carga de iones.



$$q\Delta V = \frac{mv^2}{2}$$

$$= \frac{m \left(Br \frac{q}{m} \right)^2}{2}$$

Se fija

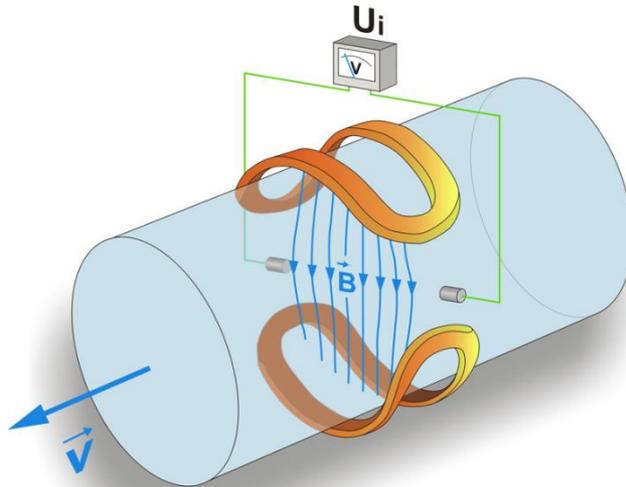
$$\frac{m}{q} = \frac{B^2 r^2}{2\Delta V}$$

Se mide

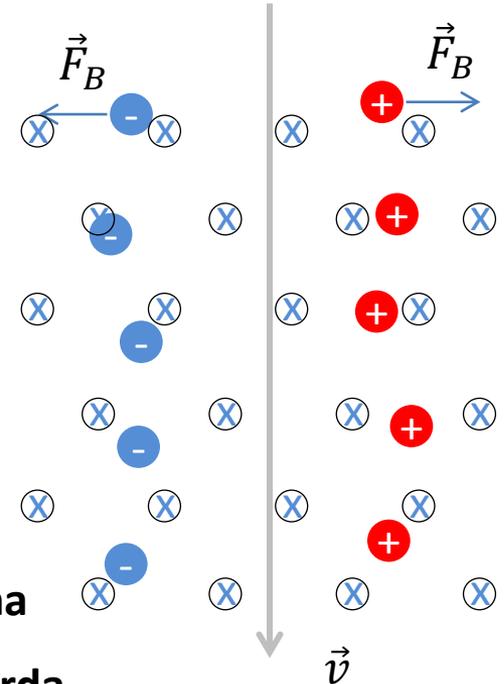
Se fija

Caudalimetro Electromagnetico

A que velocidad se mueve un fluido?



Mirando desde arriba:

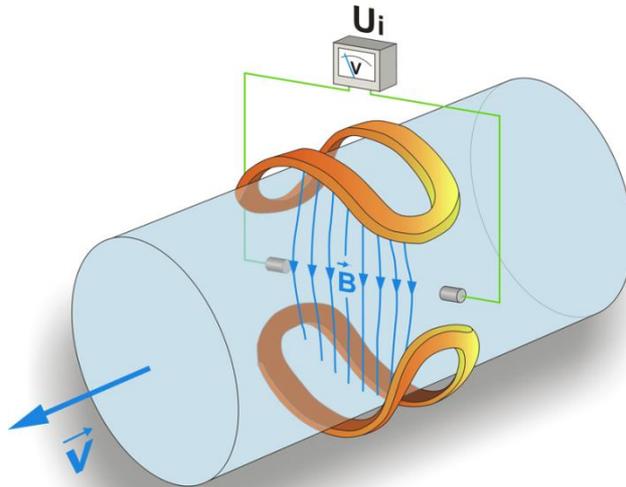


Iones **positivos** experimentan una fza magnética hacia la **derecha**

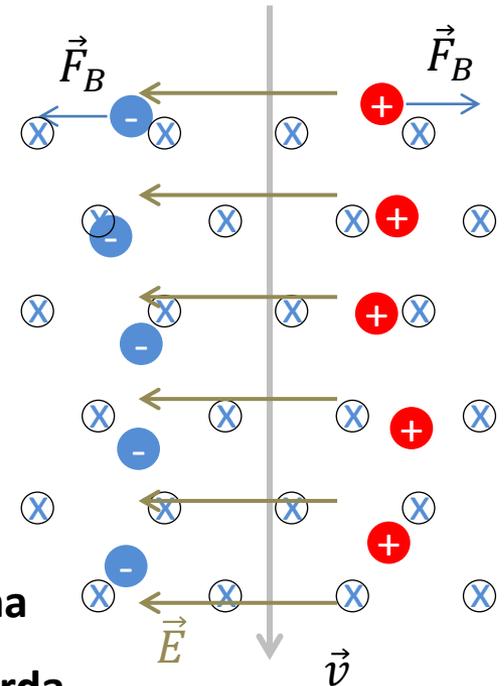
Iones **negativos** experimentan una fza magnética hacia la **izquierda**

Caudalimetro Electromagnetico

A que velocidad se mueve un fluido?



Mirando desde arriba:



Iones **positivos** experimentan una fza magnética hacia la **derecha**

Iones **negativos** experimentan una fza magnética hacia la **izquierda**

Al separarse las cargas aparece un campo **E** que tiende a acercarlas

En el estacionario, la separación será tal que: $qE = qvB \longrightarrow$

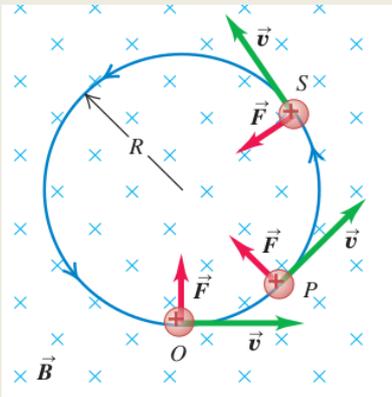
$$v = \frac{E}{B}$$

Se mide

Se fija

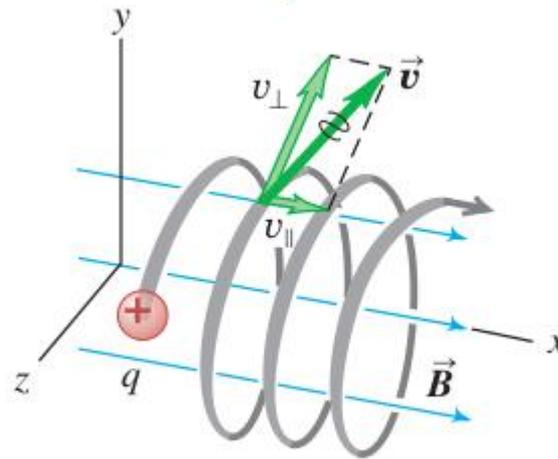
Partícula cargada...caso general

Habíamos visto...



velocidad perpendicular a \vec{B}

Caso más general en campo uniforme:



$$\vec{v} = \vec{v}_{\perp} + \vec{v}_{\parallel}$$

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$F_B = q v B \sin \phi$$

La fza en la dirección **paralela** a \vec{B} siempre es **nula**

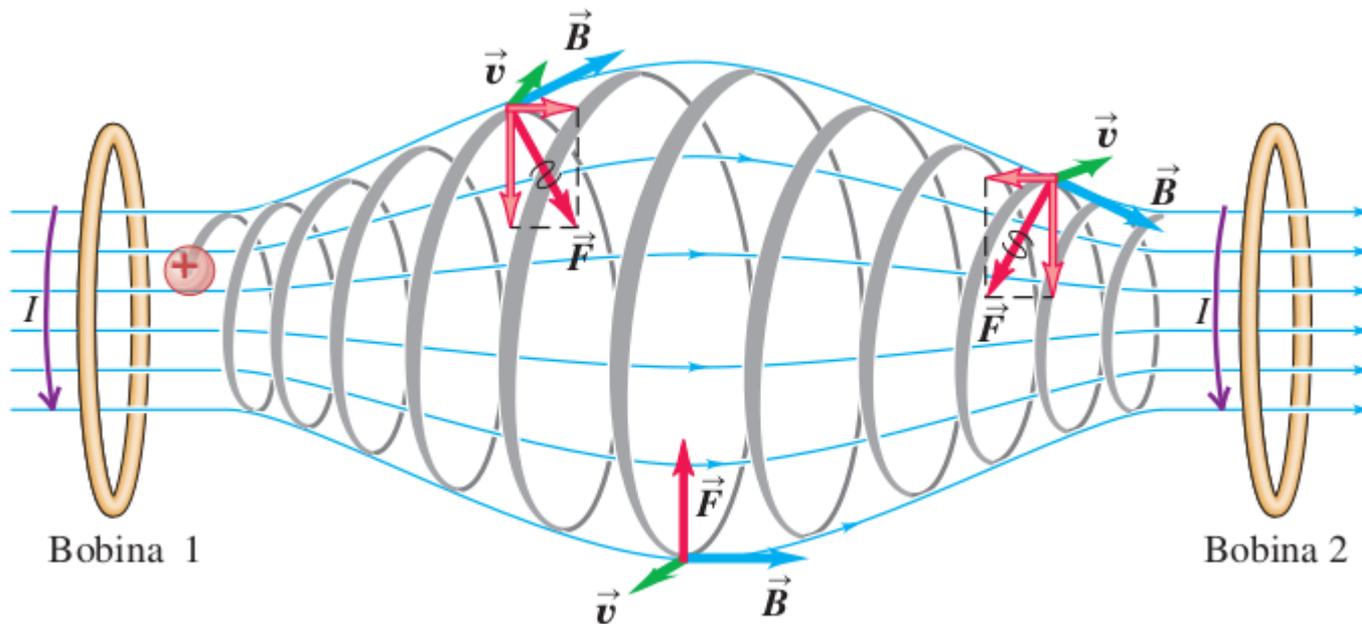
La componente v_{\parallel} se mantiene inalterada (MRU en esa dirección)

\vec{v}_{\perp} es afectada por una fza centrípeta (como en el caso anterior)

La partícula sigue una trayectoria *helicoidal*. El radio de la hélice dependerá de $|\vec{v}_{\perp}|$

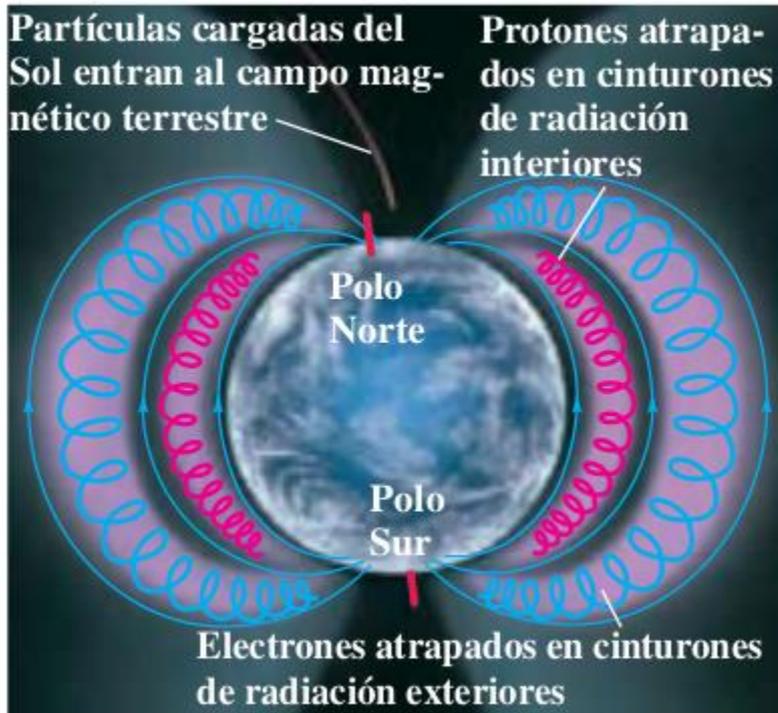
Botella magnética

Técnica para contener un gas ionizado con temperaturas muy altas (10^6K) que vaporizaría cualquier contenedor material



Partículas cerca de los extremos experimentan una fza magnética hacia el centro.

Cinturón de Van Allen



El campo magnético terrestre posee estructuras que *atrapan* a partículas cargadas provenientes del Sol.

Fuerza magnética sobre una corriente

Sobre cada carga

$$\vec{F}_B = q \vec{v}_d \times \vec{B}(\vec{r})$$

Esta fuerza es transmitida a la malla atómica del material resultando en una fuerza neta sobre el cable

Fuerza sobre segmento δl del cable

$$\delta \vec{F}_B = (q \vec{v}_d \times \vec{B}(\vec{r})) n \cdot A \cdot \delta l$$

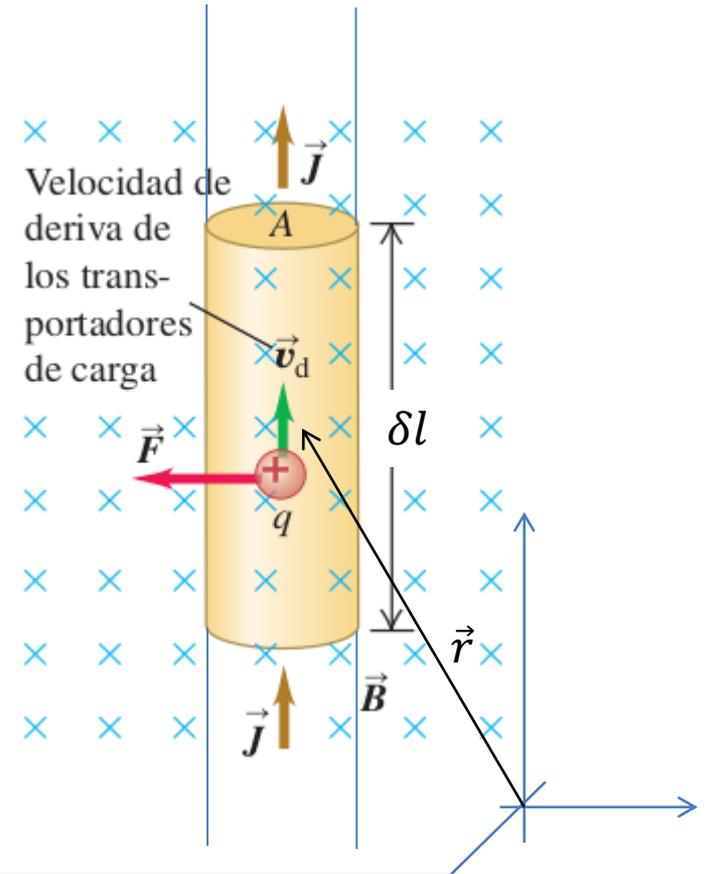
Densidad de portadores de carga

$$\delta \vec{F}_B = q n \cdot A \cdot \vec{v}_d \delta l \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{v}_d \delta l = v_d \vec{\delta l}$$

$$\delta \vec{F}_B = q n A v_d \vec{\delta l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

I



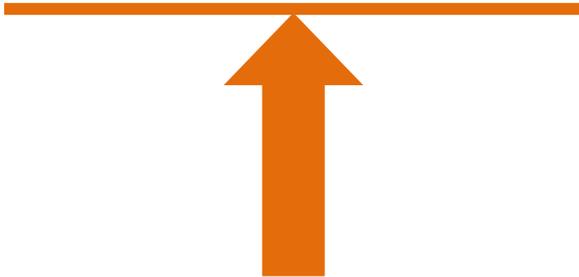
$$\delta \vec{F}_B = I \vec{\delta l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{F}_{Total} = \int_{cable} I \vec{\delta l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Fuentes de campo B

fuentes
(imanes permanentes
cargas electricas en movimiento)

→ Campo $\vec{B}(\vec{r})$ → $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})$



Fuentes de campo B

- Primeras fuentes de B conocidas fueron los imanes permanentes
- Oersted: Brújula se desviaba en presencia de corrientes eléctricas I
- Biot y Savart: dieron una expresión cuantitativa del torque sobre un imán alargado cerca de un cable con corriente I

Cargas en movimiento generan B

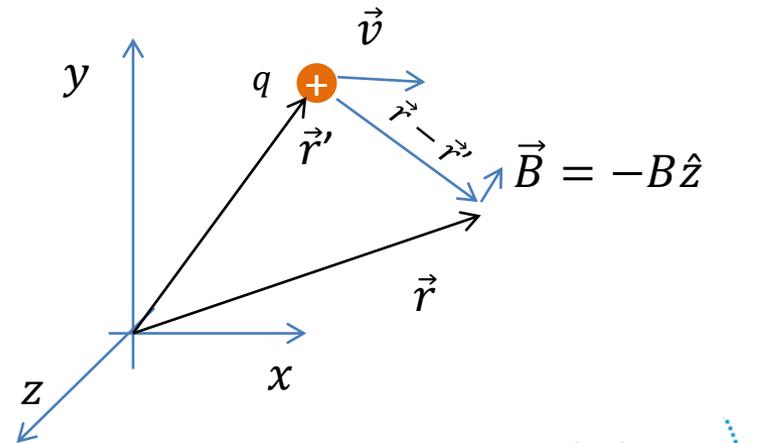


Campo \vec{B} creado por una carga en movimiento

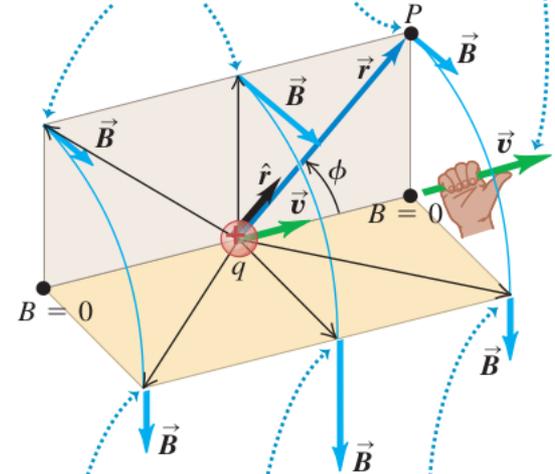
- El campo resulta perpendicular al plano que contiene a $\vec{r} - \vec{r}'$ y a \vec{v}
- Decrece como el cuadrado de la distancia entre la carga y el punto donde lo estoy evaluando

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \frac{Tm}{A}$$



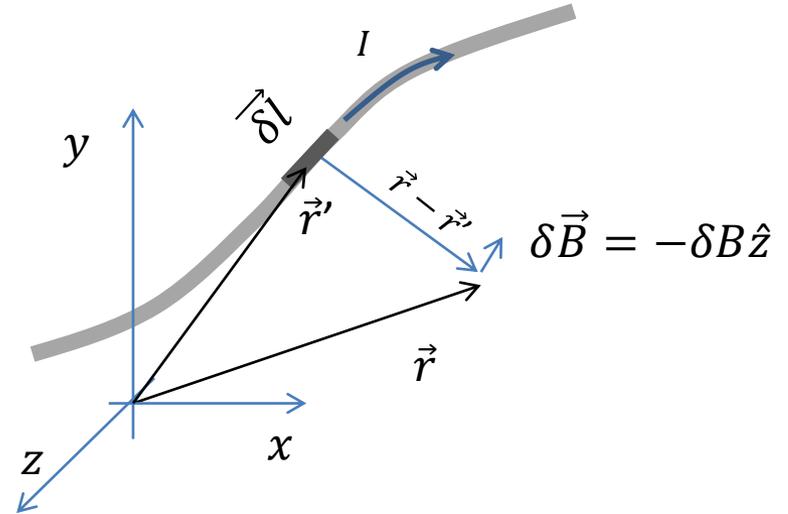
Para estos puntos de campo, \vec{r} y \vec{v} quedan en el plano color beige, y \vec{B} es perpendicular a este plano.



Para estas líneas de campo, \vec{r} y \vec{v} quedan en el plano color dorado, y \vec{B} es perpendicular a este plano.

Campo \mathbf{B} creado por una corriente

- El campo resulta perpendicular al plano que contiene a $\vec{r} - \vec{r}'$ y a \vec{v}
- Decrece como el cuadrado de la distancia entre la carga y el punto donde lo estoy evaluando



Cual es el campo generado por un segmento δl de cable?

Recordemos p/u carga:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\delta \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{\delta l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Dentro del segmento δl tengo δq

$$\delta q = q n A \delta l$$

$$\begin{aligned} \delta q \vec{v} &= q n A \delta l \vec{v} \\ &= q n A v \vec{\delta l} \\ &= I \vec{\delta l} \end{aligned}$$

Ec Biot-Savart

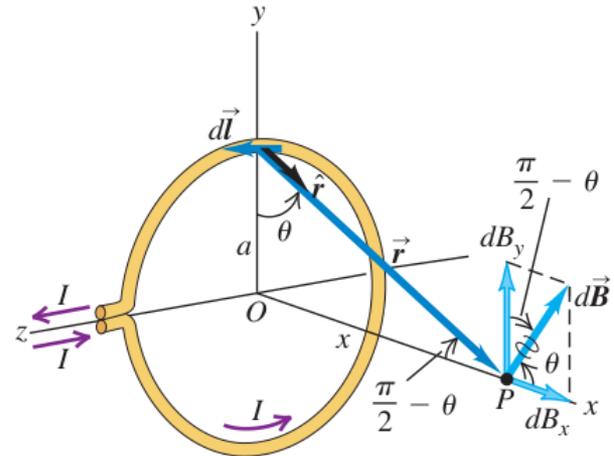
$$\vec{B}(\vec{r}) = \int_{\text{cable}} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \vec{\delta l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Campo \mathbf{B} creado por una espira

Queremos calcular el campo a lo largo del eje \hat{x}

Habíamos visto que el campo $\delta\vec{B}$ generado por un δl de conductor donde circula una corriente I resulta:

$$\delta\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta\vec{l} \times (\widehat{\vec{r} - \vec{r}'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$



Sólo la componente δB_x sobrevive a las contribuciones de todos los δl de la espira (no hay campo neto en el plano paralelo a la espira)

$$\delta B_x = |\delta\vec{B}| \cos \theta$$

$$\delta B_x(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a I \delta l}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

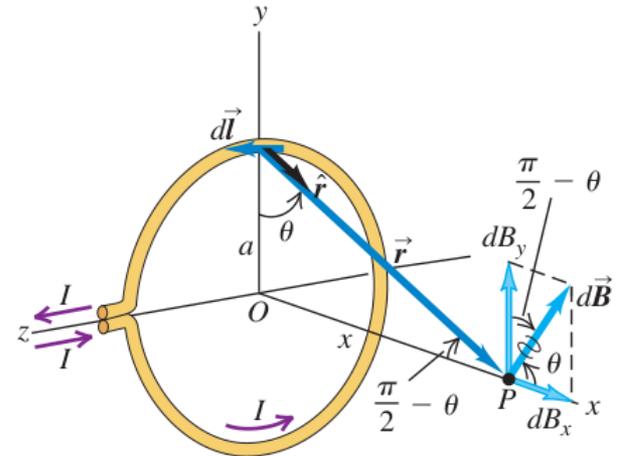
$$\begin{aligned} \delta B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta l}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cos \theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta l}{(a^2 + x^2)} \cos \theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta l}{(a^2 + x^2)} \frac{a}{(a^2 + x^2)^2} \end{aligned}$$

Campo \mathbf{B} creado por una espira

Queremos calcular el campo a lo largo del eje \hat{x}

Habíamos visto que el campo $\delta\vec{B}$ generado por un δl de conductor donde circula una corriente I resulta:

$$\delta\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\delta\vec{l} \times \widehat{(\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2}$$



Sólo la componente δB_x sobrevive a las contribuciones de todos los δl de la espira (no hay campo neto en el plano paralelo a la espira)

$$\delta B_x(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a I \delta l}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B_x(x) = \int_{cable} \delta B_x(x)$$

$$B_x(x) = \int_{cable} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a I \delta l}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$B_x(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a I}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \int_{cable} \delta l$$

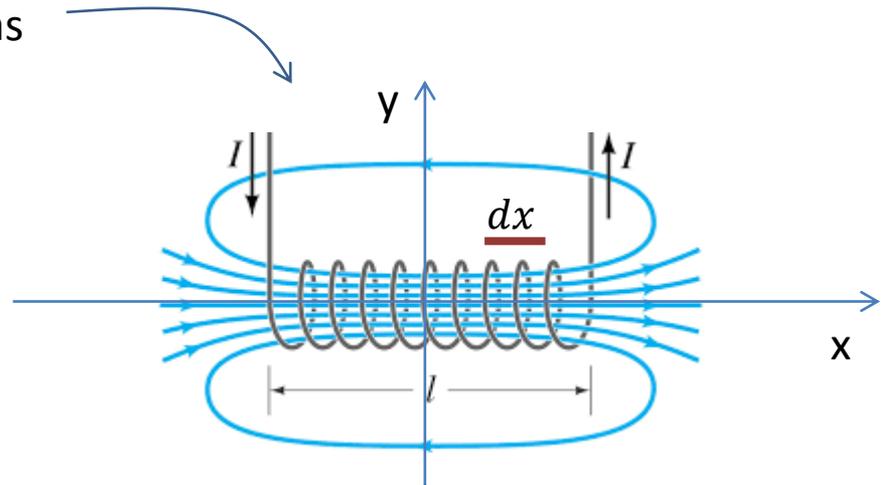
$$B_x(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{a I 2\pi a}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Campo B generado por un solenoide

Solenoides con N vueltas

Densidad de espiras: $n = \frac{N}{l}$

Cuanto vale el campo **en el centro** de la bobina, $\vec{B}(x = 0, y = 0)$?



Usando el resultado de una espira...

$$\delta B_0 = \frac{\mu_0 I n dx}{2} \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

Por cada espira circular I , pero en un cachito dx hay ndx espiras

$$B_0 = \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\mu_0 I n}{4\pi} \frac{a^2 dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I n}{2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{1/2}} \Big|_{-l/2}^{l/2} = \mu_0 I n \frac{l/2}{(a^2 + (l/2)^2)^{1/2}}$$

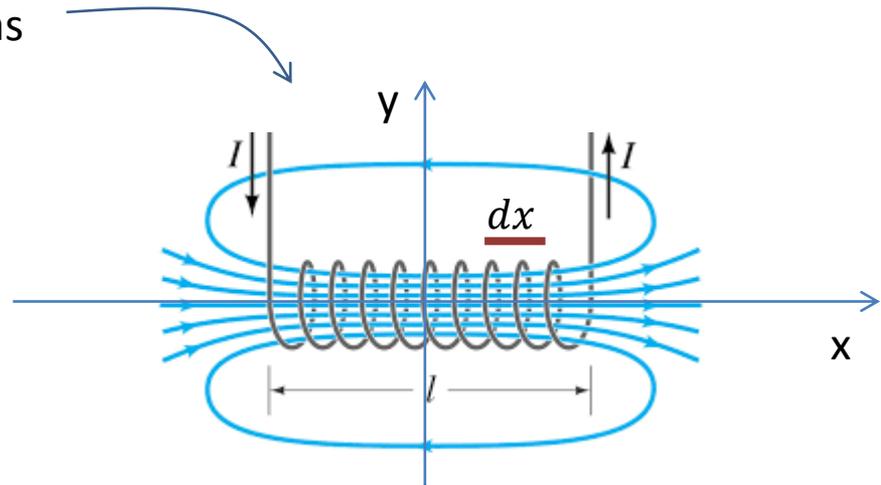
$$B_0 = \mu_0 I n \frac{1}{(1 + (2a/l)^2)^{1/2}}$$

Campo \vec{B} generado por un solenoide

Solenoides con N vueltas

Densidad de espiras: $n = \frac{N}{l}$

Cuanto vale el campo **en el centro** de la bobina, $\vec{B}(x = 0, y = 0)$?



$$\vec{B}_0 = \mu_0 I n \frac{1}{(1 + (2a/l)^2)^{1/2}} \hat{x}$$

Para un solenoide largo (i.e. $a \ll l$)

$$\vec{B}_0 = \mu_0 I n \hat{x}$$