

Repaso de propagación de incertezas

Se puede obtener en forma indirecta la magnitud W , midiendo en forma directa las magnitudes x, y, z , etc. independientes entre sí, mediante una función $f(x, y, z, \dots)$ que las relacione tal que $W = f(x, y, z, \dots)$.

Entonces a partir de las mediciones directas, conocemos los valores:

$$x_o \pm \Delta x$$

$$y_o \pm \Delta y$$

$$z_o \pm \Delta z$$

...

se puede obtener en forma indirecta la magnitud $W_o \pm \Delta W$ siendo:

$$W_o = f(x_o, y_o, z_o, \dots) \quad (1)$$

$$\Delta W = \left\{ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, \dots) \cdot \Delta x \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, \dots) \cdot \Delta y \right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x_o, y_o, z_o, \dots) \cdot \Delta z \right]^2 + \dots \right\}^{1/2} \quad (2)$$

Donde $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o, z_o, \dots)$ es la derivada parcial de f con respecto a x , que se obtiene considerando a x como la única variable y al resto (y, z, \dots) como constantes. Notar que recién después de calcular la derivada parcial de la función, se evalúa dicha expresión en los valores medios (x_o, y_o, z_o, \dots). De la misma forma, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o, z_o, \dots)$ es la derivada de f con respecto a la variable y , considerando al resto (x, z, \dots) constantes, etc.

La expresión (2) se conoce como *fórmula de propagación de errores*. Es válida siempre que las mediciones de x, y, z, \dots sean independientes (*independencia* significa que conocer la incerteza de la magnitud x no nos da ninguna información acerca de la incerteza de la magnitud y ; y es lo que ocurre siempre que medimos ambas magnitudes realizando experimentos independientes). La expresión (2) es una fórmula aproximada

para ΔW , que es válida cuando las derivadas parciales de f de orden superior son despreciables frente a la primer derivada parcial (en general, estaremos dentro de las hipótesis de validez de esta aproximación).

Ejemplos

a) Si se quiere medir el área S de una mesa rectangular de lados $A_o \pm \Delta A$ y $B_o \pm \Delta B$.

El resultado de la medición indirecta de esta magnitud será $S_o \pm \Delta S$.

El valor medio del área de la mesa se obtiene como:

$$S_o = A_o \cdot B_o$$

Y su incerteza

$$\Delta S = \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial S}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [B_o \cdot \Delta A]^2 + [A_o \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

donde $\frac{\partial S}{\partial A}(A_o, B_o) = B_o$ y $\frac{\partial S}{\partial B}(A_o, B_o) = A_o$.

b) ¿y si se quiere medir el perímetro $P_o \pm \Delta P$ de la misma mesa?

En este caso se puede usar que $P = 2 \cdot A + 2 \cdot B$

Entonces $P_o = 2 \cdot A_o + 2 \cdot B_o$

$$\Delta P = \left\{ \left[\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) \cdot \Delta A \right]^2 + \left[\frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) \cdot \Delta B \right]^2 \right\}^{1/2} = \left\{ [2 \cdot \Delta A]^2 + [2 \cdot \Delta B]^2 \right\}^{1/2}$$

ya que $\frac{\partial P}{\partial A}(A_o, B_o) = \frac{\partial P}{\partial B}(A_o, B_o) = 2$

c) Para pensar: ¿y si quisiéramos obtener el volumen $V_o \pm \Delta V$ de un cuerpo esférico a partir de la medición de su diámetro $D_o \pm \Delta D$, usando $V = \frac{4}{3}\pi \cdot D^3$? ¿Qué valor le asignarían a π ? ¿ π tiene incerteza? ¿Por qué?

d) Para pensar (un poco más...): si medimos N veces una misma magnitud, siempre con la misma incerteza, es decir, obtenemos como resultado los rangos: $x_1 \pm \Delta x$, $x_2 \pm \Delta x$, ..., $x_N \pm \Delta x$, y queremos obtener el promedio de las mediciones: $\bar{x} = \left(\sum_{i=1}^N x_i \right) / N$. ¿Cuál será la incerteza de \bar{x} ?