Ejercicio 10 (Guía 6)

Para resolver este ejercicio vamos a hacerlo para dos grupos, la gente que le gusta usar la intuición física que se ganó haciendo otros ejercicios y la gente que además prefiere la rigurosidad matemática. Con esto se pretende dar dos formas de resolverlo, ninguna está mal vista y no se espera que se sepa, por ejemplo, hacer las cuentas que pueden ser un poquito tediosas.

Empecemos con la intuición:

a)

Nos dan como dato la polarización incidente a una lámina de cuarto de onda que tiene la forma $\boldsymbol{E} = E_0 sen(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + E_0 sen(kz - wt - \pi/2)\hat{\boldsymbol{y}}$. Como las amplitudes son iguales y la diferencia de fase relativa es $\Delta\Phi = \alpha - \beta = -\pi/2$, donde consideramos $\alpha = 0$ la fase de la componente x y $\beta = -\pi/2$ la fase de la componente y, la polarización es circular.

Aunque no nos pida y no nos interese (ya vamos a verlo) si es circular derecha o izquierda, recordemos que para ver esto:

- nos debemos parar en un z fijo, como $z = 0$;
- luego se puede mirar para dos tiempos distintos los valores de las componentes, por ejemplo $t = 0$ y un tiempo que haga que $\omega t = \pi/2 \Rightarrow t = \pi/2\omega$, y de esta manera se obtiene:

  1. $\boldsymbol{E}(t=0, z=0) = E_0(\underbrace{sen(0)}_{=0}\hat{\boldsymbol{x}} + \underbrace{sen(-\pi/2)}_{=-1}\hat{\boldsymbol{y}}) = -E_0\hat{\boldsymbol{y}}$
  2. $\boldsymbol{E}(t=\pi/2\omega, z=0) = E_0(sen(\underbrace{-\omega\pi/2\omega}_{=-\pi/2})\hat{\boldsymbol{x}} + sen(\underbrace{-\omega\pi/2\omega - \pi/2}_{=-\pi})\hat{\boldsymbol{y}}) = -E_0\hat{\boldsymbol{x}}$

Así se puede ver que el vector campo eléctrico gira en el sentido horario, es decir que es polarización circular a derecha.

Una vez que entendemos que la polarización es circular, debemos ver cómo queda al atravesar la lámina de $\lambda/4$. Al intentar de no hacer cuentas, podemos notar que como es circular, es simétrica respecto de todos los sistemas de referencia (SR) con algún cambio de fase. Es decir que mirando los dos sistemas cartesianos de la Figura 1, (x,y) y (x',y'), la circunferencia que realice el vector $\boldsymbol{E}$ se puede escribir indistintamente en un sistema u otro sin mayores cambios que un θ de fase en ambas componentes. De esta manera la fase relativa sigue siendo la misma para ambos SR, por lo que podemos elegir por conveniencia que los ejes rápido y lento de la lámina coincidan con $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ respectivamente. Luego solo resta agregarle una fase $\pi/2$ a la oscilación de la componente E_y.

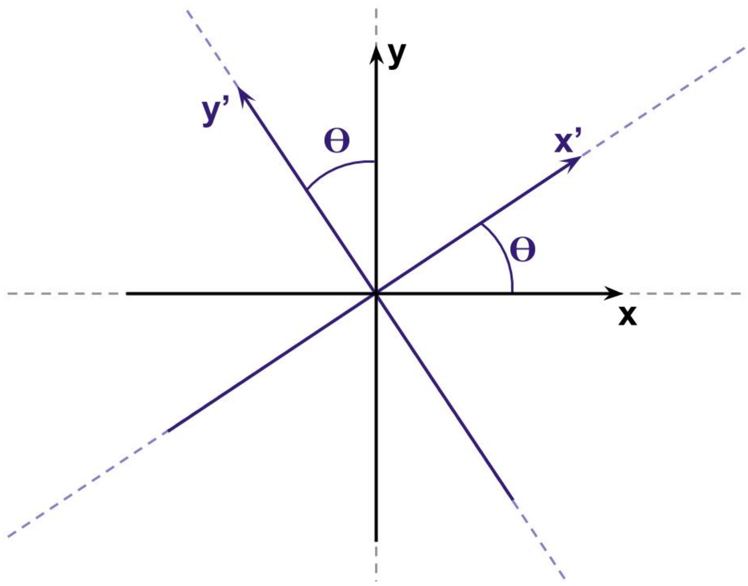

Figura 1: *Dos sistemas de referencia (x,y) y (x',y')*

Ahora la polarización del campo emergente $\boldsymbol{E_2}$ queda

$$\boldsymbol{E_2} = E_0[sen(kz-\omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + sen(kz-\omega t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\hat{\boldsymbol{y}})] \ \Rightarrow \ \boldsymbol{E_2} = E_0 sen(kz-\omega t)[\hat{\boldsymbol{x}} + \hat{\boldsymbol{y}}]. \quad (1)$$

Queda una polarización lineal que en particular está a 45º o $\pi/4$ respecto de los ejes de la lámina. Esto se puede demostrar que pasará siempre sin importar si los ejes no coincidían con las componentes iniciales del campo como ya mencionamos, solo que seguirá estando a 45º de los ejes de la lámina, pero no de los ejes cartesianos (x,y).

Por último, resta pensar qué pasará al hacerla incidir sobre un polarizador, girarlo y medir la salida. Al ser polarización lineal, solo queda ver que la intensidad medida cumple la ley de Malus con el ángulo de giro θ, $I_{out} = I_{in}cos^2(\theta)$. Entonces deberíamos ver ceros de intensidad y máximos al girar el polarizador.

b)

En este inciso, la polarización del campo $\boldsymbol{E_2}$ se modifica por una lámina de cuarto de onda posicionada a 45º de los ejes de la primera. Como vimos que la polarización saliente era lineal y a 45º de los ejes de la primer lámina, se puede deducir que esta lámina no le producirá nada si cae en el eje rápido de la segunda lámina, o le agregará una fase global de $\pi/2$ pero la fase relativa seguirá siendo nula. Luego se concluye que sigue siendo LP y seguiremos midiendo lo mismo al atravesar un polarizador.

Hagamos cuentas:

Esto se puede tomar casi como un anexo, incluso puede servir para ver las cuentas una vez, recrearlas y convencerse luego. Recomiendo en este caso prestar atención a los pasos y quizás ir resolviéndolo a la par, ya que son cosas muy parecidas, no complicadas, pero eso puede llevar a confusiones rápido.

a)

Teniendo la polarización incidente $\boldsymbol{E} = E_0 sen(kz - \omega t)\hat{\boldsymbol{x}} + E_0 sen(kz - \omega t - \pi/2)\hat{\boldsymbol{y}}$, vamos a escribirla en los ejes de la lámina y pensemos que el eje rápido es $\hat{\boldsymbol{y}}'$ y el rápido es $\hat{\boldsymbol{x}}'$ de la Figura 1. Es distinto al caso anterior solo porque ya tenía las cuentas hechas así y para no pifiarle.

Primero es útil ver como se descomponen los distintos versores en función de los otros usando el ángulo entre ellos θ. Si se mira con cuidado se puede ver que:

$$\hat{\boldsymbol{x}}' = cos(\theta)\hat{\boldsymbol{x}} + sen(\theta)\hat{\boldsymbol{y}} \tag{2}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}' = -sen(\theta)\hat{\boldsymbol{x}} + cos(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}, \tag{3}$$

y además podemos escribir los versores sin primar en componentes de los primados como

$$\hat{\boldsymbol{x}} = cos(\theta)\hat{\boldsymbol{x}}' - sen(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}' \tag{4}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} = sen(\theta)\hat{\boldsymbol{x}}' + cos(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}'. \tag{5}$$

Esta descomposición se puede ver con cuidado, una vez hecha si somos coherentes al elegir los ejes, se puede usar siempre.

Entonces escribamos el campo incidente en las coordenadas primadas y llamemos $\phi = kz - \omega t$ para llenar todo y sea mas fácil la notación, también usaré que $sen(\alpha)$ lo escribiré como $s(\alpha)$ y lo mismo con $cos(\alpha) = c(\alpha)$.

Ahora si reemplazamos los versores $\hat{\boldsymbol{x}}$ e $\hat{\boldsymbol{y}}$ escritos en sus componentes primadas:
$\boldsymbol{E} = E_0[s(\phi)(c(\theta)\hat{\boldsymbol{x}}' - s(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}') + s(\phi - \pi/2)(s(\theta)\hat{\boldsymbol{x}}' + c(\theta)\hat{\boldsymbol{y}}')]$. Luego juntando lo que acompaña a $\hat{\boldsymbol{x}}'$ y lo mismo para $\hat{\boldsymbol{y}}'$, queda

$\boldsymbol{E} = E_0[s(\phi)c(\theta) + s(\phi - \pi/2)s(\theta)]\hat{\boldsymbol{x}}' + E_0[-s(\phi)s(\theta) + s(\phi - \pi/2)c(\theta)]\hat{\boldsymbol{y}}'$

y usando que $s(\alpha \pm \pi/2) = \pm c(\alpha)$ y $c(\alpha \pm \pi/2) = \mp s(\alpha)$; así como además $c(\alpha \pm \beta) = c(\alpha)c(\beta) \mp s(\alpha)s(\beta)$ y $s(\alpha \pm \beta) = s(\alpha)c(\beta) \pm c(\alpha)s(\beta)$

se llega a $\boldsymbol{E} = E_0[s(\phi-\theta)\hat{\boldsymbol{x}}' - c(\phi-\theta)\hat{\boldsymbol{y}}']$ (hice varias cuentas juntas y saqué factores comunes, OJO!)

Ahora si, al pasar por la lámina de $\lambda/4$ se le agrega una fase de $\pi/2$ solo a la componente de $\hat{\boldsymbol{x}}'$ y tenemos el nuevo campo saliente $\boldsymbol{E_2}$ de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{E_2} = E_0 \underbrace{s(\phi-\theta+\pi/2)}_{c(\phi-\theta)} \hat{\boldsymbol{x}}' - E_0 c(\phi-\theta)\hat{\boldsymbol{y}}' = E_0 c(\phi-\theta)[\hat{\boldsymbol{x}}' - \hat{\boldsymbol{y}}']$$

Si quisieramos volver al sistema sin primar tendríamos que reemplazar las Ec. () y () en la expresión anterior. Pero puedo mirar la polarización resultante en cualquier SR y lo que vemos es que la fase relativa entre las componentes es nula, entonces es polarización lineal sin importar cuánto vale θ. Además podemos ver que la amplitud es igual para ambas componentes, esto me dice que oscila linealmente a 45º de los ejes de la lámina.

Luego solo queda pensar que al pasar por el polarizador lineal la intensidad resultante en función del ángulo de giro (llamemoslo δ) tiene que cumplir la ley de Malus y es $I_2 = I_0 cos^2(\delta)$.

b)

Para este inciso usemos la expresión para $\boldsymbol{E_2}$ obtenida en el anterior, y nuevamente hay que pasar a los ejes de la lámina que se agrega a 45º de la anterior. Llamemos al ángulo de 45º γ y hagamoslo en general, pero más rápido que antes ya que es exactamente igual que la descomposición respecto de θ pero ahora para γ y los versores nuevos.

Llamemos a $\hat{\boldsymbol{x}}' = \hat{\boldsymbol{l}}$ y a $\hat{\boldsymbol{x}}' = \hat{\boldsymbol{r}}$ y los ejes de la segunda lámina serán $\hat{\boldsymbol{l}}'$ y $\hat{\boldsymbol{r}}'$. Entonces tenía $\boldsymbol{E_2} = E_0 c(\phi-\theta)[\hat{\boldsymbol{l}}' - \hat{\boldsymbol{r}}']$ y usando una descomposición parecida a la que ya veníamos usando:

$$\hat{\boldsymbol{l}}' = cos(\gamma)\hat{\boldsymbol{l}} + sen(\gamma)\hat{\boldsymbol{r}}$$
$$\hat{\boldsymbol{r}}' = -sen(\gamma)\hat{\boldsymbol{l}} + cos(\gamma)\hat{\boldsymbol{r}},$$

$$\hat{\boldsymbol{l}} = cos(\gamma)\hat{\boldsymbol{l}}' - sen(\gamma)\hat{\boldsymbol{r}}'$$
$$\hat{\boldsymbol{r}} = sen(\gamma)\hat{\boldsymbol{l}}' + cos(\gamma)\hat{\boldsymbol{r}}'.$$

Se llega a $\boldsymbol{E_2} = E_0 c(\phi-\theta)[(c(\gamma)-s(\gamma))\hat{\boldsymbol{l}}' - (s(\gamma)+c(\gamma))\hat{\boldsymbol{r}}']$ y notemos que si $\gamma = \pi/4 \Rightarrow c(\pi/4) = s(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \Rightarrow$ solo queda la componente en $\hat{\boldsymbol{r}}'$. Esto me dice que si el ángulo es 45º la lámina no me agrega una fase ya que está toda la polarización en el eje rápido y sigue siendo lineal y queda $\boldsymbol{E_3} = -E_0 c(\phi-\theta)[s(\pi/4) + c(\pi/4)]\hat{\boldsymbol{r}}' = -\sqrt{2}E_0 c(\phi-\theta)\hat{\boldsymbol{r}}'$.

Luego de pasar por un polarizador sigo teniendo que recuperar la ley de Malus.

Notar que si el ángulo no fuese 45º entonces tendría una polarización distinta, pero no es lo que pedía