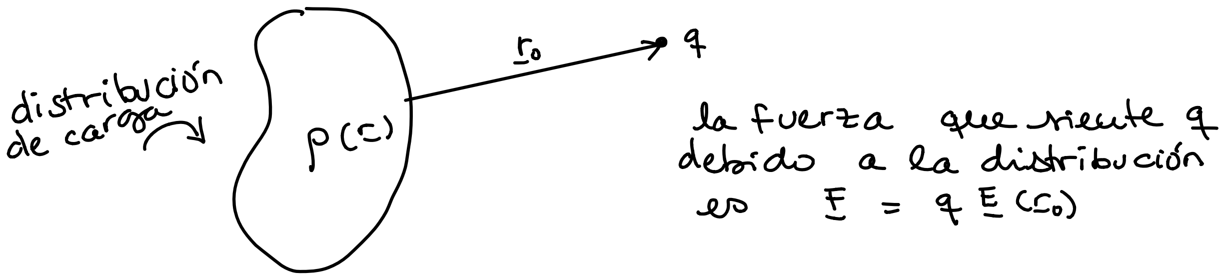
Arrancamos con un repaso de lo que vimos hasta ahora. En la primera clase dijimos que para electrostática, con la ley de Coulomb tenemos todo lo que necesitamos. La ley de Coloumb nos da la fuerza electrostática que siente una carga q2 debido a otra carga q1.

$$\underline{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

Esto describe la interacción entre pares de cargas puntuales. En problemas más complejos, donde por ejemplo tenemos distribuciones continuas de carga, hay infinitas de estas interacciones Coulombianas. En este punto nos conviene avanzar sobre el problema haciendo una abstracción, y calcular el campo eléctrico que genera la distribución de carga, es decir, calcular la fuerza que sentiría una carga unidad debido a esa distribución de carga.

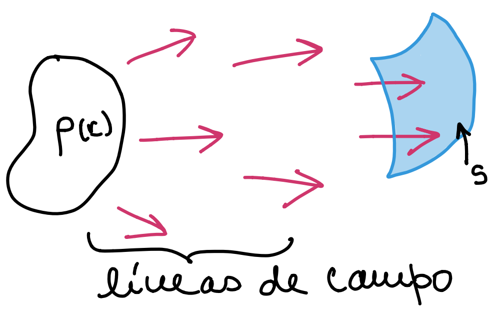


Pensamos al campo eléctrico como una entidad que existe independientemente de si la carga q está o no, y lo visualizamos con las líneas de campo.

¿Qué ventaja hay al usar el campo eléctrico?
Podemos usar la ley de Gauss para calcular el campo eléctrico generado por distribuciones de carga con mucha simetría.

Definimos el flujo de campo eléctrico a través de una superficie como la integral en superficie

$$\Phi = \iint_S \underline{E} \cdot d\underline{A}$$



Podemos pensar el flujo como la cantidad de líneas de campo que “pinchan” la superficie.

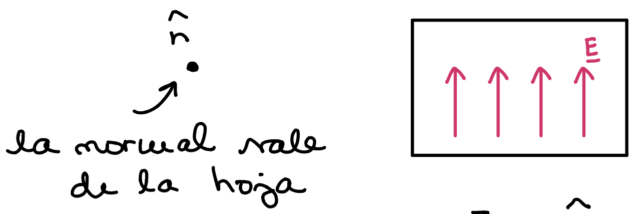
Para poder hacer la integral, en general, tienen que pasar 3 cosas:

i. Tener bien definida la superficie.
ii. Tener bien definida la dirección normal a la superficie (no es lo mismo si el campo está “entrando” o “saliendo” de la superficie).
iii. Tener definido el campo eléctrico en la superficie donde se va a integrar.

O sea que, en general, esta integral no es trivial.

Hay casos particulares en los que la cuenta se vuelve sencilla.

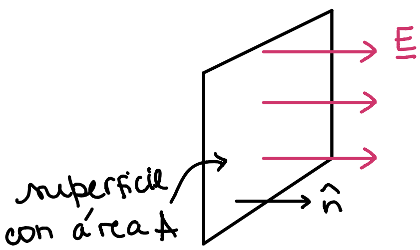
(a)



En este caso, el campo es perpendicular a la dirección normal, y entonces no hay flujo de **E** a través de la superficie.

$$\underline{E} \perp \hat{n} \Rightarrow \Phi = 0$$

(b)



campo constante sobre la superficie y perpendicular a la misma

$$\hookrightarrow \underline{E} \parallel \hat{n} \Rightarrow \Phi = E \cdot A$$

La idea del teorema de Gauss es elegir apropiadamente la superficie en la que calcular el flujo para caer siempre en los casos **(a)** o **(b)**.

GAUSS
$$\Phi = \iint_S \underline{E} \cdot d\underline{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

carga encerrada por la superficie S

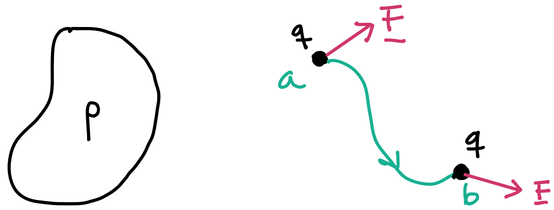
Esto vale para cualquier superficie que sea **cerrada**, pero eso no significa que cualquier superficie cerrada nos sirva para usar el teorema en situaciones prácticas. Justamente, queremos usar el teorema para hallar el valor del campo eléctrico... pero el campo eléctrico está metido adentro de una integral! Lo que vamos a necesitar es que el campo salga de la integral del flujo.
Para eso, tenemos que elegir una superficie que verifique la condición (a) o que verifique la condición (b), sin olvidar que el campo eléctrico tiene que ser constante sobre la superficie.

Esto solo lo podemos saber a priori en configuraciones de carga con alto grado de simetría. En estos casos podemos obtener la dirección del campo y sobre qué superficies es constante.

<u>¿Qué es el potencial eléctrico?</u>

Es una medida del trabajo que se puede sacar del campo eléctrico.
Si tenemos una distribución de carga, que genera un campo eléctrico, y colocamos una carga en alguna región del espacio, ésta va a sentir una fuerza. Como siente una fuerza, va a querer moverse y entonces va a acelerarse. La cantidad de energía cinética que posea la carga va a depender del campo eléctrico.

¿Qué trabajo debe hacerse para mover una carga q unidad desde a hacia b en presencia de la distribución de carga?



El trabajo que hacemos para mover la carga q de a hacia b es en contra de la fuerza electrostática. Como la fuerza es conservativa, solo nos van a importar los extremos del camino; siempre vamos a terminar hablando de diferencias de potencial.

El trabajo que hay que hacer para llevar a la carga q unidad de a hacia b en presencia de la distribución de cargas es igual a la diferencia de potencial entre a y b.

Tener en cuenta que medir el potencial es sencillo, y muchas veces es más fácil calcular el potencial V que calcular el campo eléctrico. Cómo se vincula uno con otro?

$$V_{ab} = -\int_a^b \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

diferencia de potencial entre a y b

integral del campo eléctrico sobre un camino con a y b como extremos

Esto nos dice que si tenemos el campo eléctrico, podemos calcular cuánto vale el potencial V.
De manera inversa, si conocemos el potencial podemos conocer el campo eléctrico derivando V:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} V$$

derivar

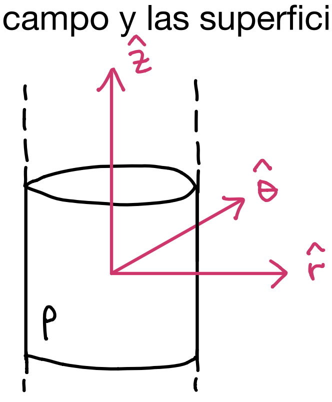
en cartesianas $\quad \underline{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}$

con $\quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Notar que, como para calcular el campo a partir del potencial derivamos, podemos sumarle o restarle al potencial una constante arbitraria y el campo eléctrico que obtenemos es exactamente el mismo. Es decir, el potencial está definido a menos de una constante, y por lo tanto podemos fijar como querramos su valor de referencia. Esto en la práctica no es un problema, porque cuando medimos siempre estamos obteniendo la diferencia de potencial entre dos puntos, o sea que el valor referencia que se haya tomado no importa (esto es lo que sucede cuando usamos un voltímetro).

El potencial se mide en Volts, que se indica con la letra V.

Pasemos ahora a resolver el problema 7f de la guía 1.
Tenemos un cilindro macizo de radio R y longitud infinita con densidad volumétrica de carga uniforme ρ. Nos piden calcular el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio, y dibujar las líneas de campo y las superficies equipotenciales.



¿Qué simetrías tiene este problema?

En primer lugar, ¿qué significa una simetría? Podemos pensarlo como una transformación que se le aplica a un objeto y es como si no se hubiera hecho nada.

Las transformaciones que le podemos aplicar a esta distribución de carga, tal que vemos siempre lo mismo:

(1) Rotarlo sobre su propio eje.
(2) Trasladarlo en el eje.
(3) Rotarlo 180° en torno a $z = 0$.
(4) Reflejarlo por cualquier plano que pase por el eje.

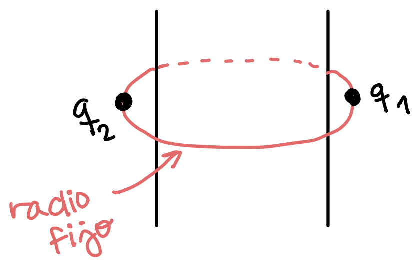
A partir de las simetrías podemos inferir

- de qué depende el campo **E**.
- en qué dirección apunta el campo.

- De la simetría (2), sacamos que el campo no depende de z.

- Si se varía r, nos estamos alejando de la fuente de carga. Con las simetrías no podemos asegurar que el campo sea el mismo para dos radios distintos.

- Nos paramos en un radio fijo y movemos el ángulo:



Las cargas q1 y q2 ven el mismo cilindro
⇒ E no depende del ángulo θ

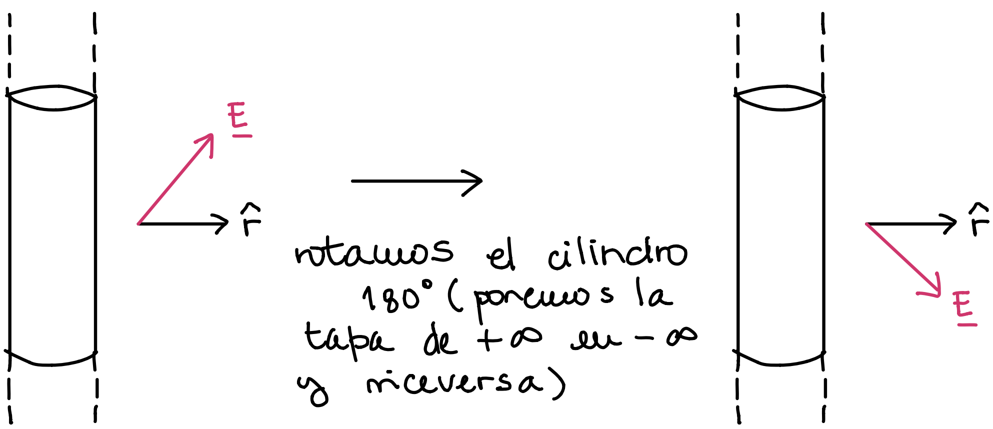
Finalmente, juntando esto tenemos que la intensidad del campo E puede ser solamente una función del radio

$$E = E(r)$$

Entonces, todas las superficies con r = constante tienen un valor de campo constante. Estas superficies son cilindros concéntricos con el cilindro cargado.

Con esto tenemos la dependencia de la magnitud del campo. ¿Qué podemos decir sobre la dirección del campo?

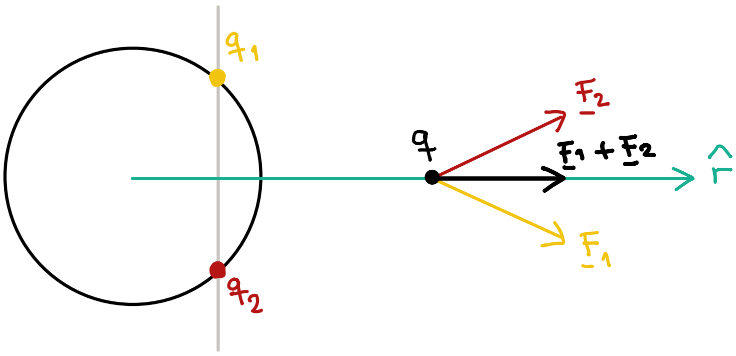
- Pensamos primero que el campo puede tener una componente que apunta en la dirección z. ¿Es compatible esto con las simetrías?



Cuando rotamos, la distribución de carga es la misma, pero el campo se reflejó en z. Esto no tiene sentido, porque si la distribución de carga es la misma en un caso que en otro, el campo tiene que ser el mismo.

⇒ **E** no apunta en la dir. z.

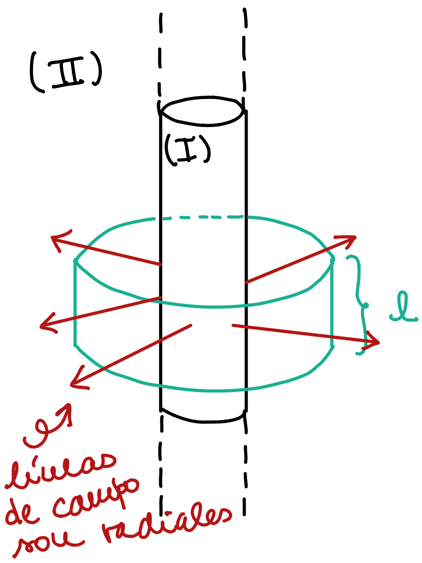
- Miremos el cilindro desde arriba para una altura fija. Pensemos ahora a la distribución continua de carga como formada por infinitas cargas puntuales.



Pensamos una carga q en alguna posición radial cualquiera, y vemos qué fuerza total le ejercen dos cargas q1 y q2 (de igual valor) ubicadas simétricamente respecto de la carga q. Las componentes de las fuerzas que no son radiales tienen la misma magnitud pero distinto sentido, entonces se cancelan. Así, la fuerza resultante sobre q debido a q1 y q2 apunta en la dirección radial, por lo que entonces el campo eléctrico también apunta en la dirección radial.

Este razonamiento lo podemos aplicar para todos los puntos del cilindro, siempre tengo un par simétrico de forma tal que las componentes no radiales del campo eléctrico se compensan.

Con esto, ya tenemos todo lo que necesitamos para usar el teorema de Gauss.
Vamos a tomar cilindros concéntricos al cilindro cargado como superficie de Gauss. Tenemos dos regiones: (I) r < R, adentro del cilindro, (II) r > R, afuera del cilindro.
Tomamos primero una superficie de Gauss cilíndrica con radio r > R y altura ℓ. Notar que aunque la distribución de carga se extiene hasta infinito, la superficie de Gauss es finita.



La superficie de Gauss está conformada por las tapas y el contorno del cilindro.

- Tapa de arriba $\quad \underline{E} \perp \hat{n}$
- Tapa de abajo $\quad \underline{E} \perp \hat{n}$
- Contorno $\quad \underline{E} \parallel \hat{n}$ y constante

$$\Rightarrow \Phi = \underbrace{\cancel{\Phi_{\substack{tapa\\arriba}}}}_{=0} + \underbrace{\cancel{\Phi_{\substack{tapa\\abajo}}}}_{=0} + \underbrace{\Phi_{contorno}}_{E \times A_{contorno}}$$

$$\Rightarrow \Phi = E\, 2\pi r \ell \underset{\text{Gauss}}{=} \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

¿Cuánto vale la carga encerrada? Para cualquier cilindro de radio r > R y altura ℓ, la carga encerrada es exactamente la misma, porque la distribución de carga se extiende solamente hasta radios r menores o iguales que R.

$$\Rightarrow Q_{enc} = \rho \times \text{volumen} = \rho \pi R^2 \ell$$

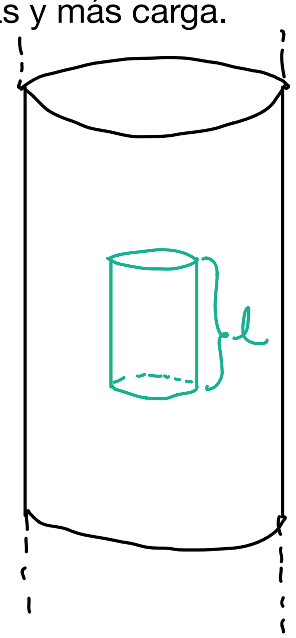
$$\Rightarrow E\, 2\cancel{\pi} r \cancel{\ell} = \frac{\rho \cancel{\pi} R^2 \cancel{\ell}}{\epsilon_0}$$

notar que la altura ℓ del cilindro de Gauss es arbitraria, el resultado no depende de ℓ

magnitud del campo afuera $\left\{ \Rightarrow E = \dfrac{R^2 \rho}{2\epsilon_0} \dfrac{1}{r} \right.$

$$\Rightarrow \qquad \underline{E} = \frac{R^2\rho}{2\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\,\hat{r} \qquad \text{si } r > R$$

Nos paramos ahora adentro del cilindro. Tomamos una superficie de Gauss cilíndrica con radio r < R y altura ℓ. Como el campo tiene exactamente las mismas simetrías que afuera, la expresión para el flujo no cambia. Lo que sí cambia ahora es la carga encerrada, dependiendo del radio r que estemos mirando. A medida que r aumenta (siempre que sea menor a R), la superficie de Gauss va encerrando más y más carga.



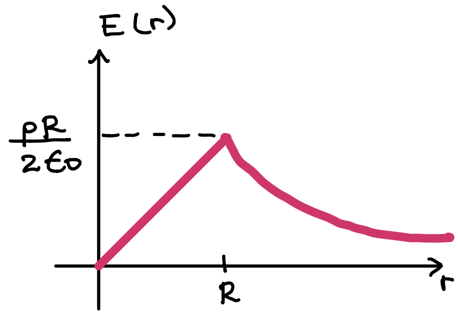
$$Q_{enc} = \rho \times \text{volumen} = \rho\,\pi r^2 \ell$$

$$\Phi = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} \Rightarrow E\,2\pi r \ell = \frac{\rho \pi r^2 \ell}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$$

Escribimos finalmente cómo es el campo eléctrico en todo el espacio

$$\underline{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\epsilon_0}\,\hat{r} & r < R \\[2ex] \dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0}\,\dfrac{1}{r}\,\hat{r} & r > R \end{cases}$$



Ahora que tenemos el campo, queremos encontrar cómo es el potencial.

$$V_{ab} = -\int_a^b \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

Esto es la diferencia de potencial entre dos puntos. Queremos hallar cómo es V(r) en todo el espacio, por lo que en algún lado vamos a tener que fijar un valor de referencia. En general, poner el 0 de potencial en infinito funciona cuando tenemos distribuciones localizadas de carga, que no es el caso del cilindro infinito.

$$\Rightarrow V(r) = -\int_a^r \underline{E} \cdot d\underline{l}$$

fijamos $b = r$ porque queremos el potencial en un radio genérico.

Para hacer esta integral tenemos que tomar un camino que una el punto a con el punto r. Como el campo eléctrico es una función partida, el integrando va a cambiar según si el camino incluye puntos con r < R o r > R. Para simplificar las cuentas, el punto a de referencia - que es arbitrario- vamos a elegirlo afuera del cilindro.

Comenzamos entonces viendo cómo es el potencial cuando r > R.

solo importa el desplazamiento radial

- $r > R$

$$V(r) = -\int_a^r \underline{E} \cdot d\underline{l} = -\int_a^r E(r)\, dr = -\int_a^r \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{r}\, dr$$

$$= -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r) \Big|_a^r = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(\ln(r) - \ln(a) \right)$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r/a)$$

A partir de acá podemos ver que fijar la referencia de potencial en el infinito no parece ser una buena elección, porque el logaritmo natural diverge en +∞.
Qué punto tomamos entonces como referencia? Como acá hicimos la cuenta asumiendo que el punto a estaba fuera del cilindro, podemos tomar cualquier punto a mayor o igual a R. Es razonable elegir a = R, ya que es la única longitud característica del problema.

Ahora tenemos que calcular cómo es el potencial adentro. Como ya fijamos el punto de referencia del potencial en R, tenemos que ser consistentes y tomar la misma referencia para hacer la integral adentro.

- $r < R$

$$V(r) = -\int_R^r E\, dr = -\int_R^r \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\, dr = -\frac{\rho}{2\epsilon_0} \frac{r^2}{2} \Big|_R^r$$

$$= -\frac{\rho}{4\epsilon_0} \left(r^2 - R^2 \right)$$

Notemos acá que si hubiéramos elegido la referencia en un punto a > R, esta integral nos habría quedado partida. De forma equivalente, si tomábamos un punto adentro del cilindro, por ejemplo, r = 0 , la integral afuera también deberíamos haberla hecho partida. Les proponemos que intenten resolver el problema tomando el punto de referencia en r = 0.

Finalmente, el potencial en todo el espacio queda

$$V = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0} \left(r^2 - R^2 \right) & r < R \\[2ex] -\dfrac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r/R) & r > R \end{cases}$$

Por último, veamos que el potencial nada más depende de la distancia radial, por lo que es constante sobre superficies cilíndricas; estas son las superficies equipotenciales, y son una forma que tenemos de visualizar al potencial. Si miramos a la configuración desde arriba