# Guía 1 - Problema 14: la célula como un capacitor esférico

El enunciado nos dice que en el interior de una célula hay un exceso de iones negativos sobre los positivos. Es decir que **el interior de la célula tiene una carga neta negativa**. A su vez, un número igual de iones positivos en exceso se encuentra en el exterior de la célula (en el líquido intersticial). Entonces, **el exterior tiene una carga neta de igual valor que la carga del interior, pero con signo positivo**. Las cargas (los iones) se ubican a cada lado de la membrana celular, que tiene un espesor de 10 nm, y su constante dieléctrica es $\varepsilon = 8\varepsilon_0$. La diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana es 70 mV.

### (a) Capacidad por unidad de área de la membrana

Si consideramos que la célula es esférica, lo que tenemos es carga negativa ubicada sobre la superficie de una esfera de radio $R$, y luego la misma cantidad de carga positiva distribuida en una esfera concéntrica de radio $R + \delta R$, donde $\delta R = 10$ nm. La región entre ambas esferas está compuesta por un medio con constante dieléctrica $\varepsilon$, y está sometido a una diferencia de potencial de 70 mV. El ítem nos pide calcular la capacidad (por unidad de área) de este capacitor.

Para resolver esto, vamos a usar el resultado del problema 10 de la guía 1. En este ejercicio se pedía calcular el campo eléctrico en todo el espacio generado por dos cascarones esféricos concéntricos de radio $R_1$ y $R_2$ (con $R_1 < R_2$) con cargas $Q_1$ y $Q_2$. En particular, pedía considerar el caso en que $Q_1 = Q$ y $Q_2 = -Q$. Este es el caso que nos interesa para este problema, porque sabemos que las cargas positivas son las mismas que las cargas negativas.
El campo eléctrico era, en este caso, :

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\hat{r} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & \text{si } r > R_2 \text{ ó } r < R_1 \end{cases} \tag{1}$$

Noten que en el ejercicio 10 entre las esferas hay vacío: es por esto que aparece $\varepsilon_0$. En este problema, tenemos un medio dieléctrico, por lo que simplemente tenemos que cambiar la constante $\varepsilon_0$ por $\varepsilon$. También es importante notar que en el caso de la célula, la carga negativa se ubica en la parte interior y la positiva en la parte exterior de la membrana, por lo que si consideramos que la carga $Q > 0$, el campo eléctrico debe apuntar en $-\hat{r}$. Con todas estas consideraciones, el campo eléctrico en la región de interés $R_1 < r < R_2$ resulta

$$\mathbf{E} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{r}\,. \tag{2}$$

Para calcular la capacidad $C$ precisamos conocer cómo es la expresión para la diferencia de potencial $V$ entre $R_1$ y $R_2$.

$$V_{12} = -\int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E}\cdot\mathbf{d}\ell = -\int_{R_1}^{R_2} -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{1}{r^2}\,dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{1}{r}\bigg|_{R_1}^{R_2} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{12} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\,\frac{R_2 - R_1}{R_1\,R_2}}. \tag{3}$$

La capacidad $C$ será

$$C = \frac{Q}{V_{12}} = \frac{4\pi\varepsilon\,R_1\,R_2}{R_2 - R_1}.$$

Esto es *casi* lo que nos pide el ítem (a). Queremos la capacidad por unidad de área. Esencialmente, tenemos que dividir la capacidad por la superficie de la esfera. Acá tenemos 2 esferas: la de radio $R_1$ y la de radio $R_2$. ¿Cuál de las dos tomamos? Para decidir, hay que notar 2 cosas. La primera, $R_2 = R_1 + \delta R$, con $\delta R = 10$ nm. La segunda, las dimensiones características de una célula son del orden de los $\mu$m, por lo menos 100 veces más grande que $\delta R$. Podemos considerar entonces que $R_2 \approx R_1$, y que que el área es $A = 4\pi\, R_1 R_2$. Entonces, la capacidad por unidad de área $c$ es

$$\boxed{c = C/A = \frac{\varepsilon}{\delta R}},$$

donde ya está explicitado que $R_2 - R_1 = \delta R$. Esto es equivalente a la capacidad por unidad de área de un capacitor de placas planas paralelas con un medio dieléctrico entre las placas; $\delta R$ es el equivalente a la distancia $d$ que separa a las placas. Reemplazando por los valores de $\varepsilon$ y $\delta R$, tenemos que $c = 0.00708\,F/m^2$.

**(b) Campo eléctrico en el interior de la membrana**

En la ecuación (2) ya tenemos una expresión para el campo eléctrico dentro de la membrana. Como estamos considerando que la membrana es delgada, no hay variación significativa en la intensidad del campo cuando $r = R_1$ y $r = R_2$. Tomando un radio característico $R$ (i.e., $R_{1,2} \approx R$), el campo eléctrico dentro de la membrana es constante y vale

$$\mathbf{E} = -\frac{Q}{4\pi\,\varepsilon}\frac{1}{R^2}\hat{r}\,.$$

Necesitamos conocer cuánto vale la carga $Q$; podemos despejarlo a partir de la expresión del potencial (3), que en la aproximación de radio constante vale

$$V_{12} = \frac{Q}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\delta R}{R^2}\,.$$

Luego, el campo se escribe $\mathbf{E} = -V_{12}/\delta R\,\hat{r}$, que es exactamente lo que ocurre en un condensador de caras paralelas.

**(c) Trabajo necesario para transportar iones a través de la membrana**

Para transportar un ion desde el interior de la membrana hacia el exterior, el campo eléctrico ejerce una fuerza sobre el ion. Como la fuerza es conservativa, el trabajo que haga solamente va a depender de los extremos de la trayectoria. Hay que recordar que la diferencia de potencial entre dos puntos $\Delta V_{ab}$ es precisamente la diferencia de energía $U$ que sentiría una carga unidad al desplazarse desde a hacia b en el campo eléctrico: $\Delta U_{ab} = q\Delta V_{ab}$. El trabajo que haga la fuerza electrostática entre a y b será entonces $W_{a\to b} = -\Delta U_{ab}$. Y por lo tanto, como una fuerza externa tiene que hacer trabajo en contra del campo eléctrico $W^{ext}_{a\to b} = \Delta U_{ab}$.

Este ítem en particular pregunta por el trabajo para transportar iones positivos o negativos desde el interior hacia el exterior de la membrana. La carga es $+q_e$ o $-q_e$, según si el ion está cargado positiva o negativamente, donde $q_e$ es el valor de la carga del electrón. Entonces, si se quiere transportar un ion de $Na^+$ o de $K^+$, que poseen carga $+q_e$, el trabajo realizado por una fuerza externa en contra del campo será

$$W^{ext}_{R_1\to R_2} = q_e V_{12}\,.$$

Una unidad equivalente para expresar energía (en lugar de Joules) es el electron volt (eV), que representa el cambio de energía potencial electrostática al mover una carga de valor $q_e$ en una diferencia de potencial de 1 V: $1\,eV = 1.6\times 10^{-19}$ J. Así que, el trabajo realizado para mover iones con carga $+q_e$ es $W^{ext}_{R_1\to R_2} = 70$ meV. Para mover un ion positivo desde una región de menor potencial (el interior de la membrana) hacia una región de mayor potencial (el exterior) es necesario aplicar una fuerza que haga un trabajo opuesto al que realiza el campo eléctrico.

Por otro lado, el trabajo realizado por el campo al mover un ion con carga $-q_e$, como un ion de $Cl^-$, será $W_{1\to 2} = 70$ meV y entonces $W^{ext}_{1\to 2} = -70$ meV. Para mover un ion negativo desde una región de menor potencial hacia una región de mayor potencial no necesitamos en realidad aplicar una fuerza externa, porque el ion se está desplazando por efecto de la fuerza electrostática a la región donde se minimiza su energía potencial eléctrica.