B y simetrías

O por qué asumimos que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{\varphi}$ en el problema del hilo infinito

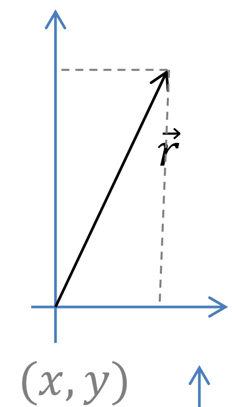
Que era un vector?

Vector:

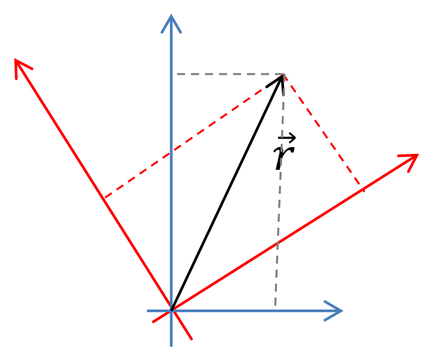
- Entidad que posee Magnitud, Dirección, Sentido

- En d-dim: d escalares que se transforman ante rotaciones , traslaciones, reflexiones, etc, de manera muy específica

Vector posición



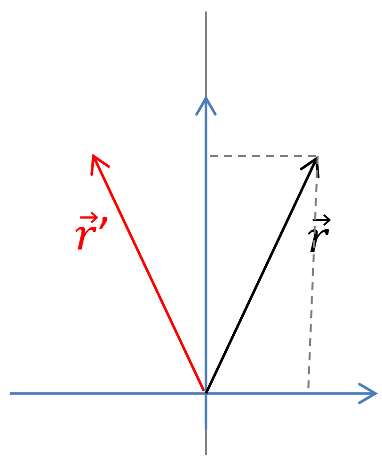
Ejemplos



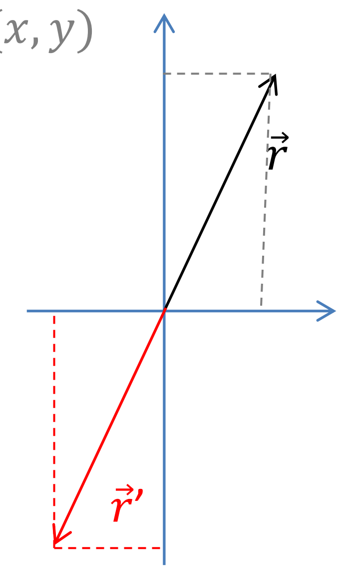
$$(x, y) \xrightarrow{\text{rotacion}} (x', y')$$

$$x' = \cos\theta\, x - \sin\theta\, y$$

$$y' = \sin\theta\, x + \cos\theta\, y$$



$$(x, y) \xrightarrow{\text{reflexión}} (x' = -x, y' = y)$$



$$(x, y) \xrightarrow{\text{inversión}} (x' = -x, y' = -y)$$

(edad papa, edad mama) es un vector?

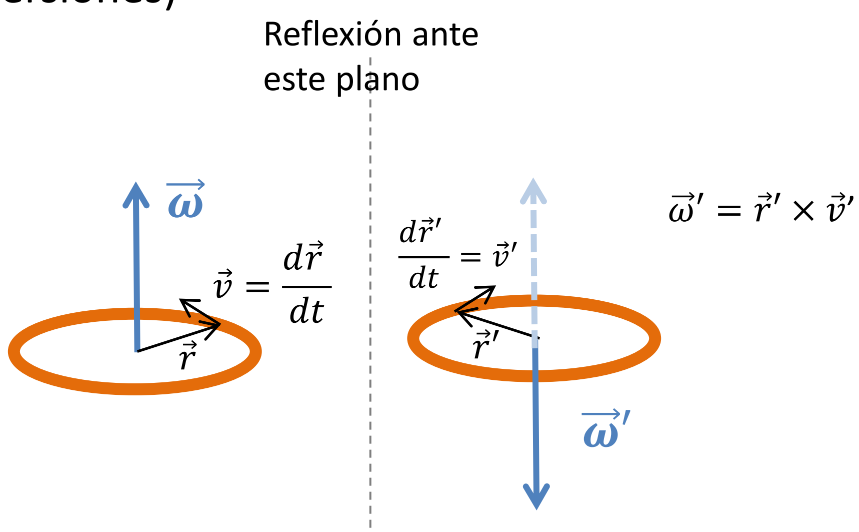
Qué es un pseudo-vector?

Pseudo-Vector:

- Entidad que posee
  - Magnitud
  - Dirección
  - Sentido
- En d-dim: d escalares que se transforman **como vectores ante algunas** transformaciones (rotaciones y traslaciones) pero tienen un **cambio de signo adicional ante otras** (reflexiones e inversiones)

Ante una reflexión…como transforma la velocidad angular $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$?

(ya se que $\vec{r}$ y $\vec{v}$ son vectores)



$\vec{\omega}$ se transfomra como pseudo-vector (!)

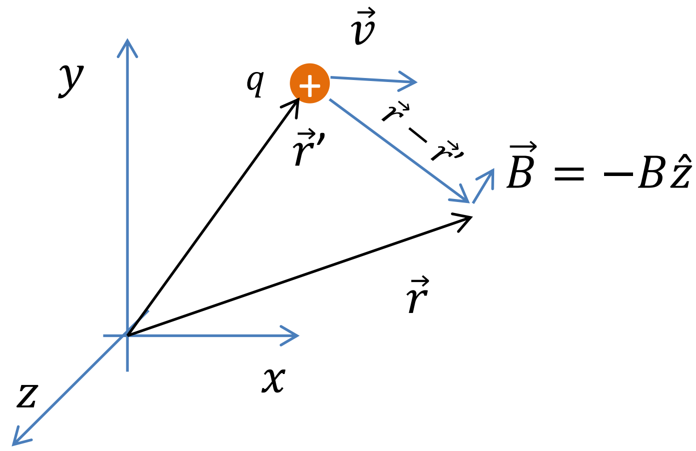
En general, si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores, $\vec{P} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es pseudovector

Entonces…

En general, si $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son vectores, $\vec{P} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es pseudovector

Por qué nos debería importar esto?

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

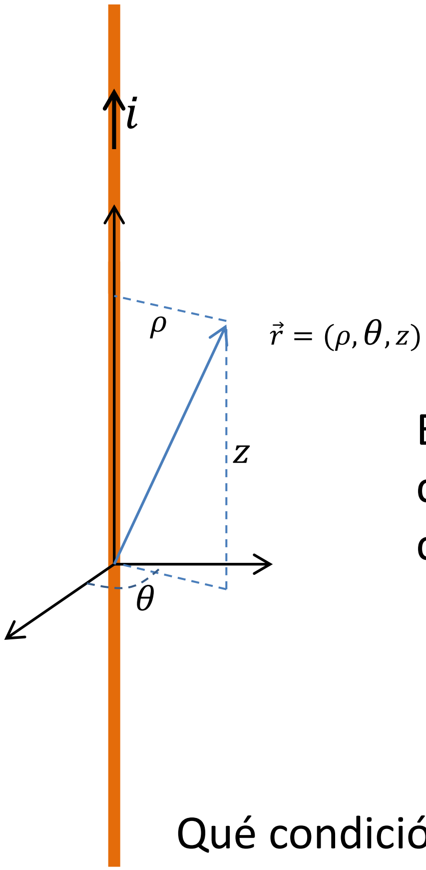


$\vec{B}$ es en realidad un **pseudo-vector** (!)

- se transforma **como vector ante algunas** transformaciones (rotaciones y traslaciones) pero tiene un **cambio de signo adicional ante otras** (reflexiones e inversiones)

Volvamos al problema

Qué simetría debe respetar el ***B*** generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente *I ?*



Utilizamos coordenadas cilíndricas

Podemos escribir en forma muy general que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho\,(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta\,(\vec{r})\hat{\theta} + B_z\,(\vec{r})\hat{z}$$

El campo $\vec{B}(\vec{r})$ generado por la corriente que circula por el cable tiene que ser compatible con las simetrías que cumple dicha fuente:

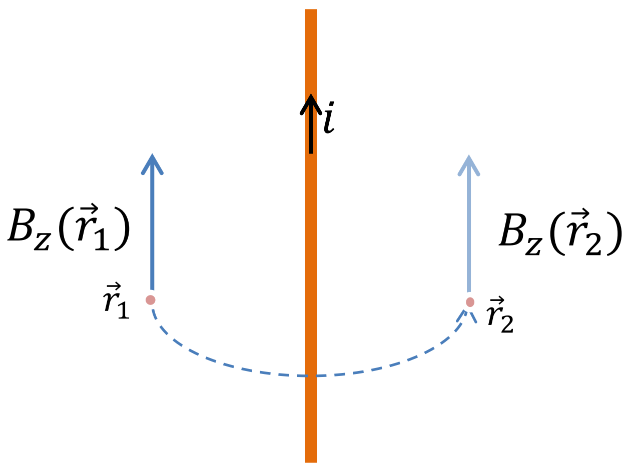
- Rotación alrededor del eje del cable
- Simetrías de reflexión sobre cualquier plano que contenga al cable

Qué condición impone esto sobre la forma funcional de $B_\rho(\vec{r}), B_\theta(\vec{r})\ y\ B_z(\vec{r})$?

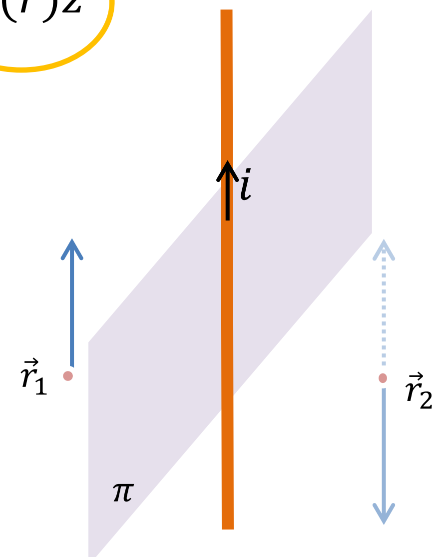
Campo en $\hat{z}$

Qué simetría debe respetar el ***B*** generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente *I* ?

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho\,(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta\,(\vec{r})\hat{\theta} + B_z\,(\vec{r})\hat{z}$$



pero también…



Para respetar la simetría de la fuente frente a rotaciones $B_z(\vec{r}_2)$ debe ser $B_z(\vec{r}_1)$ **rotado**

Para respetar la simetría de la fuente frente a reflexiones sobre planos que contengan al cable $B_z(\vec{r}_2)$ debe ser $B_z(\vec{r}_1)$ **reflejado** sobre el plano π

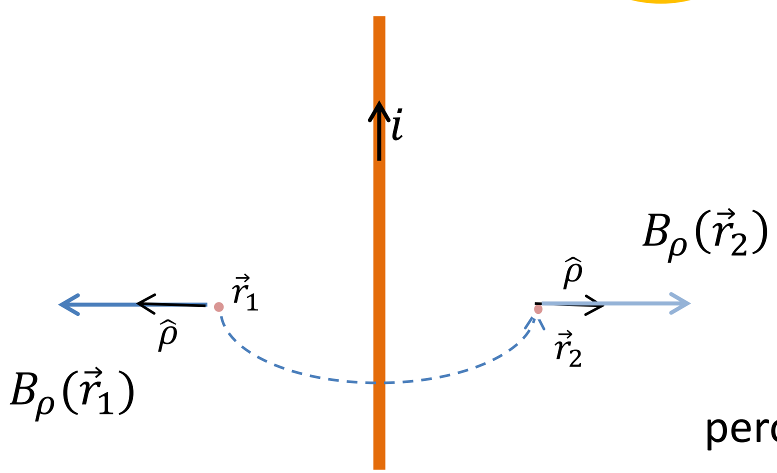
$$B_z(\vec{r}_2) = B_z(\vec{r}_1) \qquad\qquad B_z(\vec{r}_2) = -B_z(\vec{r}_1)$$

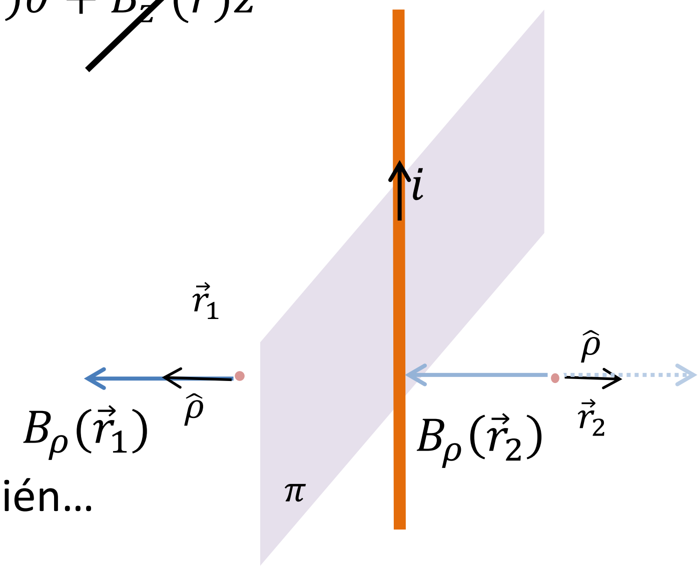
La única solución compatible es $B_z(\vec{r}) = 0$

Campo en $\hat{\rho}$

Qué simetría debe respetar el ***B*** generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente *I* ?

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + \cancel{B_z(\vec{r})\hat{z}}$$





pero también…

Para respetar la simetría de la fuente frente a rotaciones $B_z(\vec{r}_2)$ debe ser $B_z(\vec{r}_1)$ **rotado**

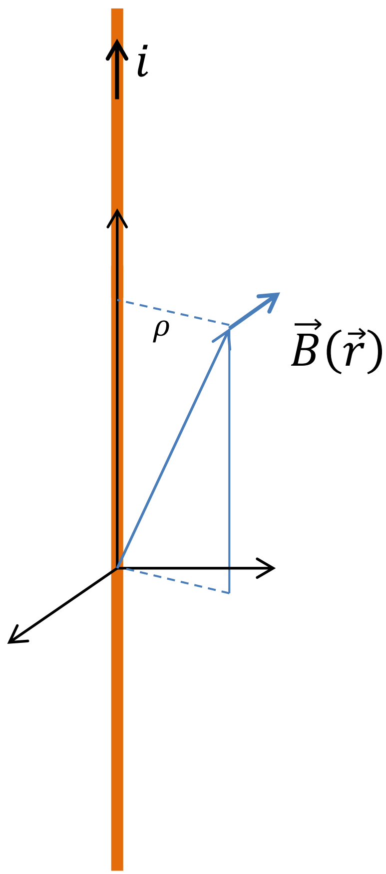
Para respetar la simetría de la fuente frente a reflexiones sobre planos que contengan al cable $B_\rho(\vec{r}_2)$ debe ser $B_\rho(\vec{r}_1)$ **reflejado** sobre el plano π

$$B_\rho(\vec{r}_2) = B_\rho(\vec{r}_1) \qquad\qquad B_\rho(\vec{r}_2) = -B_\rho(\vec{r}_1)$$

La única solución compatible es $B_\rho(\vec{r}) = 0$

Campo en $\hat{\theta}$

Qué simetría debe respetar el ***B*** generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente *I ?*



$$\vec{B}(\vec{r}) = \cancel{B_\rho (\vec{r})}\hat{\rho} + B_\theta (\vec{r})\hat{\theta} + \cancel{B_z (\vec{r})}\hat{z}$$

Les dejo a uds verificar que un campo en es compatible con el requerimiento de simetrías de rotación y reflexión

La intensidad de B_θ no puede depender ni de θ (la fuente tiene simetría de rotación) ni de z (la fuente tiene simetría de traslación).

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = B_\theta (\rho)\hat{\theta}}$$