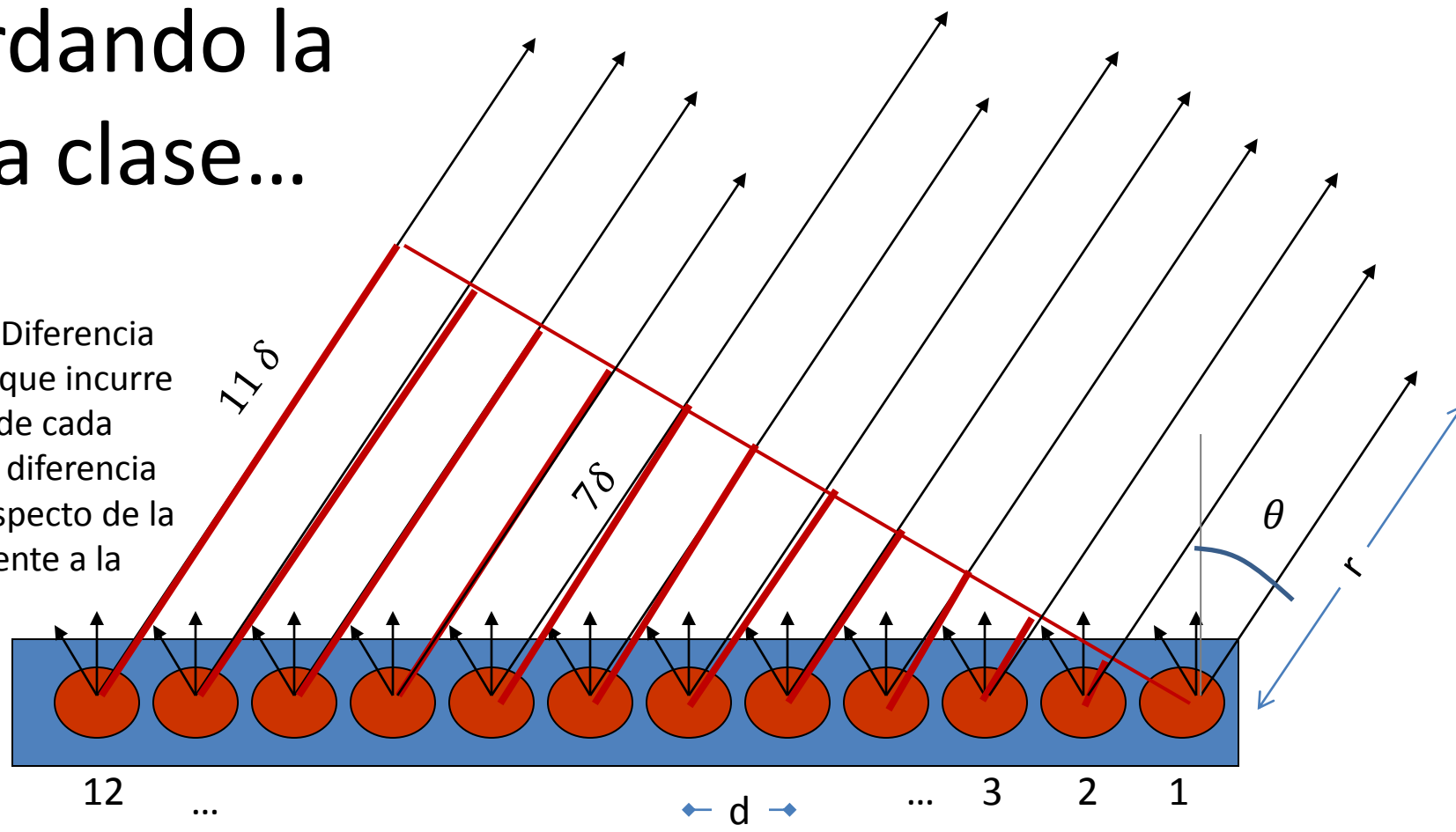


Difraccion 3/3

Ya casi estamos

Recordando la ultima clase...

— Diferencia de camino que incurre la emisión de cada fuente (i.e. diferencia de fase) respecto de la primera fuente a la derecha



Para la fuente i -ésima, el desfase respecto a la primera resulta:

desfase entre una y la siguiente

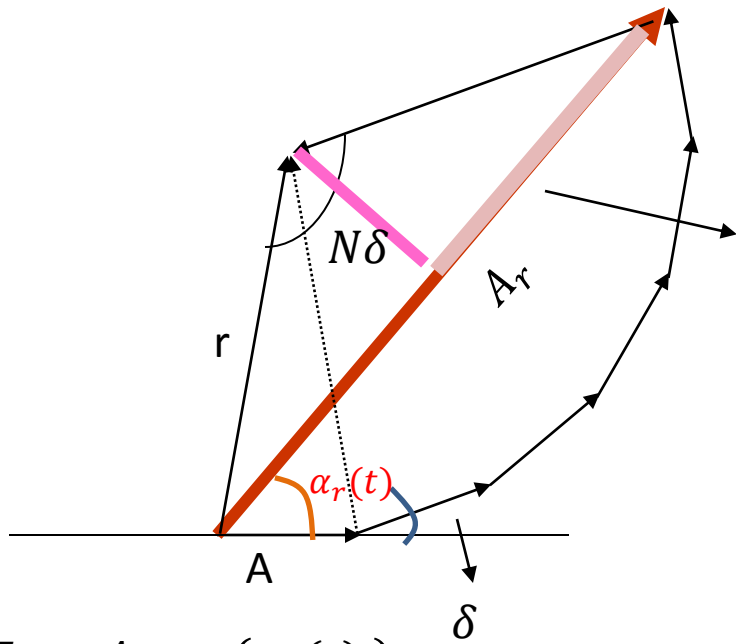
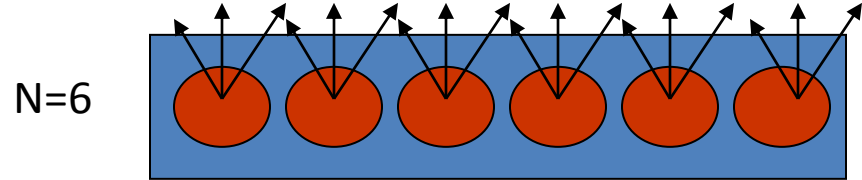
$$k(r_i - r_1) = k((i - 1) * d) \sin \theta = (i - 1) * \underbrace{k d \sin \theta}_{\delta} = (i - 1) * \delta$$

El campo resultante en direccion θ :

$$R = A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \delta + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + 2\delta + \omega t + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + (N - 1)\delta + \omega t + \varepsilon)$$

con $\delta = k d \sin \theta$

$$R(\delta) = A \cos(\mathbf{kr} + wt + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{kr} + \delta + wt + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{kr} + 2\delta + wt + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{kr} + (N - 1)\delta + wt + \varepsilon)$$



$$\frac{A_R}{2} = r \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$r = \frac{A}{2 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Amplitud de la onda resultante

$$A_R(\delta) = A \frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

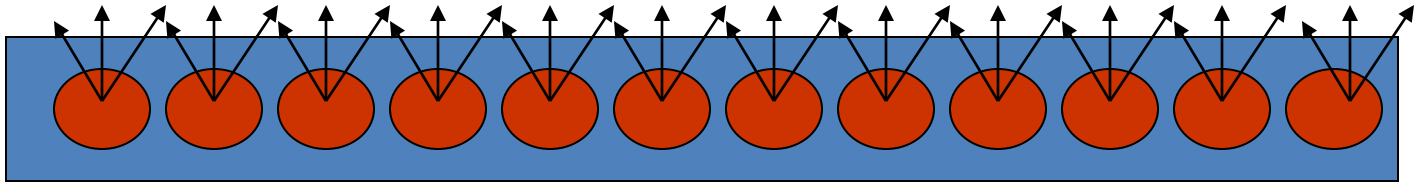
$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$E_R = A_R \cos(\alpha_r(t))$$

$$I_R = A_R^2 \langle \cos^2(\alpha_r(t)) \rangle$$

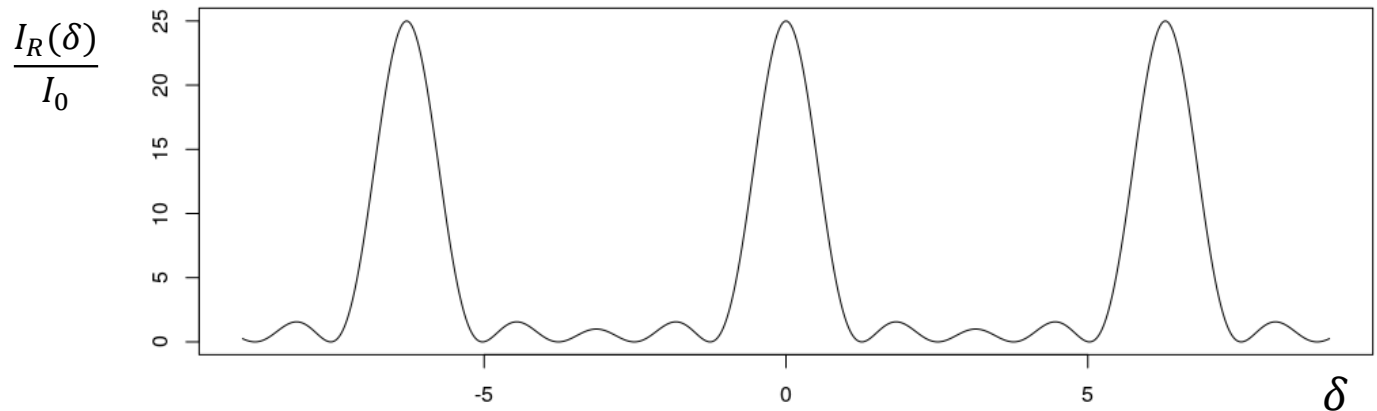
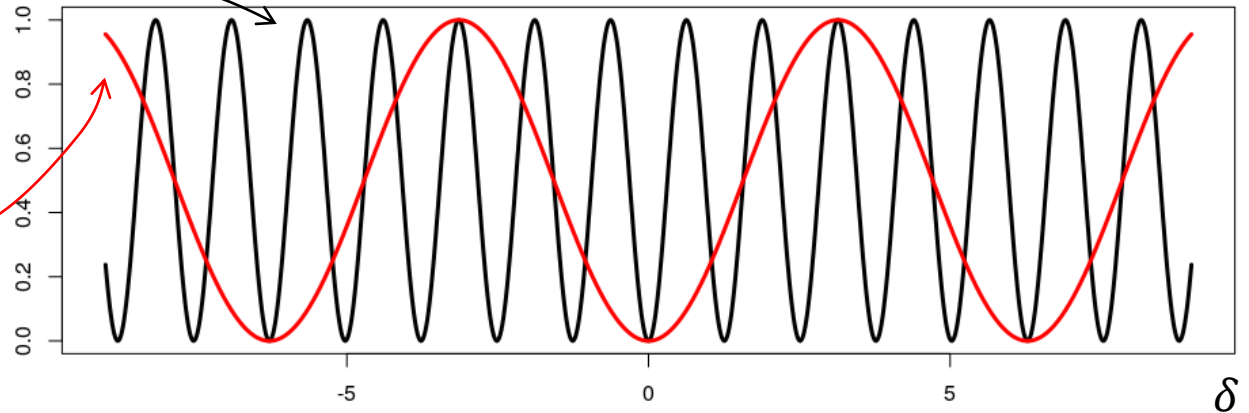
Irradiancia resultante en función del desfase entre fuentes δ

$$R(\delta) = A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \delta + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + 2\delta + \omega t + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + (N - 1)\delta + \omega t + \varepsilon)$$

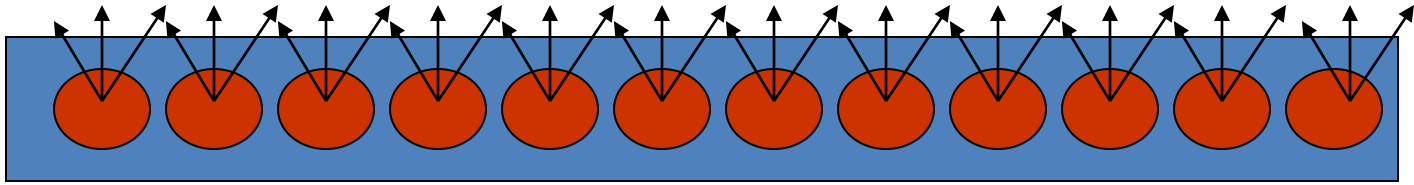


$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$N = 5$

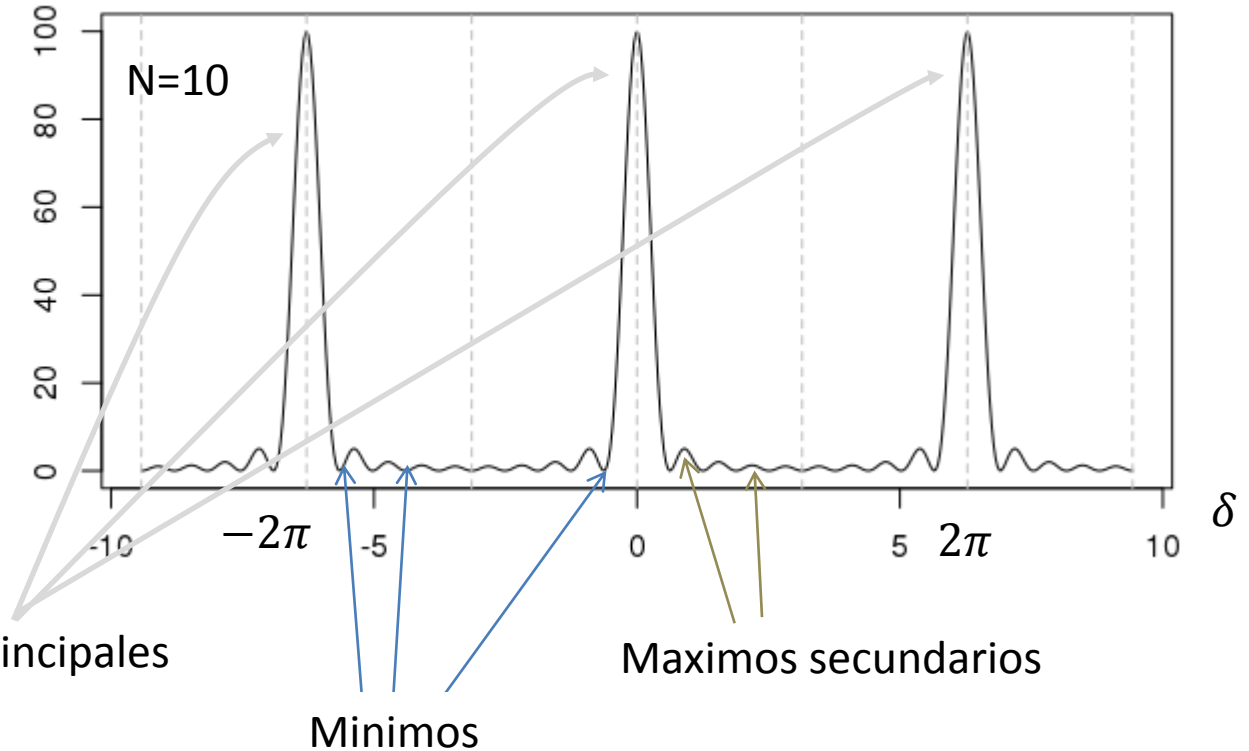


$$R(\delta) = A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \delta + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + 2\delta + \omega t + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + (N - 1)\delta + \omega t + \varepsilon)$$

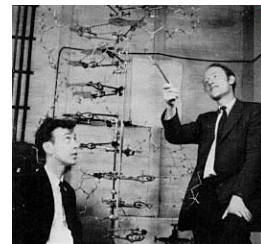
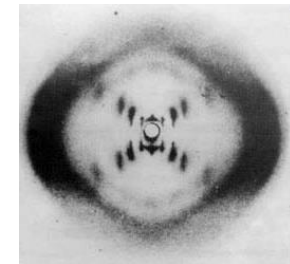


$$I_R/I_0$$

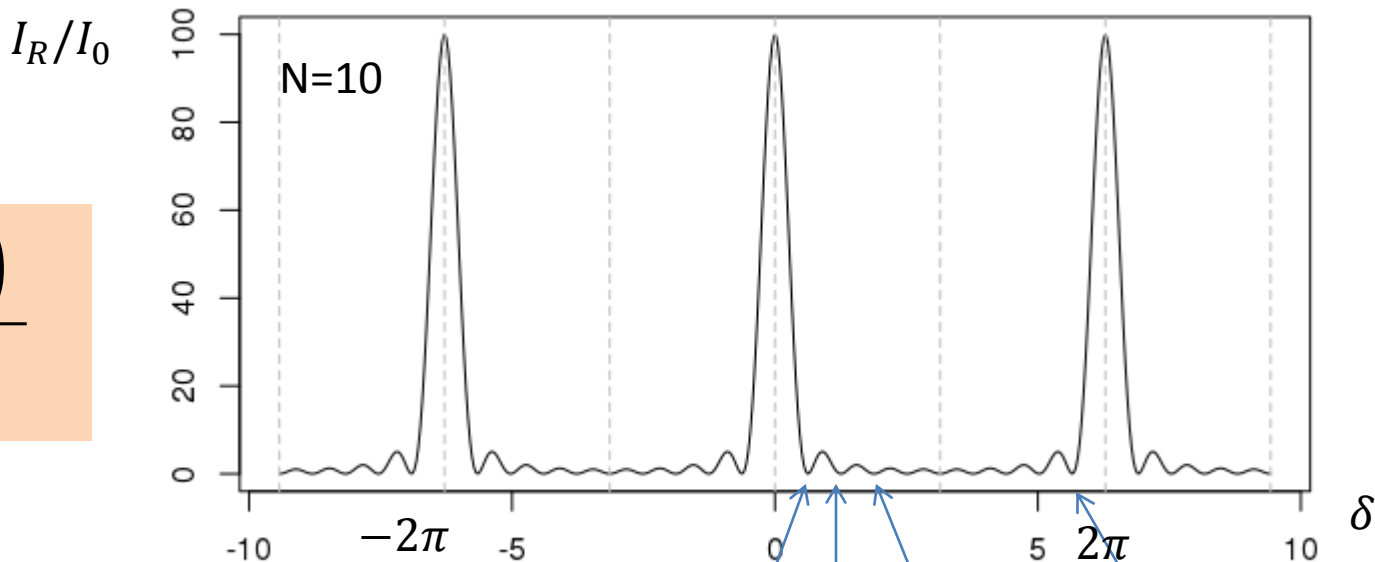
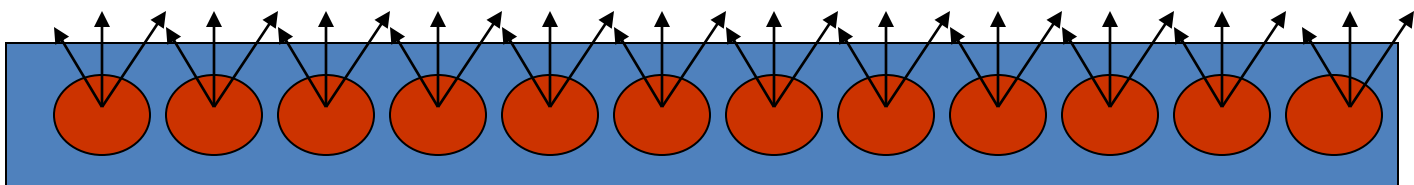
$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



El patron de maximos y minimos tiene mucha estructura relacionada con la geometria de las fuentes. En esto se basan las aplicaciones derivadas de solucionar el **problema inverso** que mencionabamos antes



$$R(\delta) = A \cos(\mathbf{kr} + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{kr} + \delta + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{kr} + 2\delta + \omega t + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{kr} + (N-1)\delta + \omega t + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Minimos se producen cuando se anula el numerador, pero no el denominador:

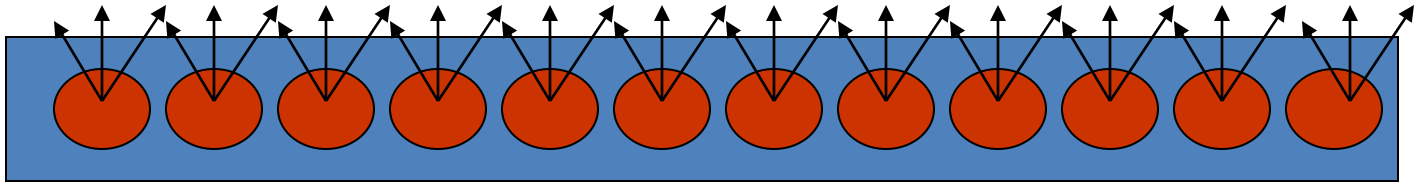
$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = 2m\frac{\pi}{N}$$

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} \neq n\pi \rightarrow \delta \neq 2n\pi$$

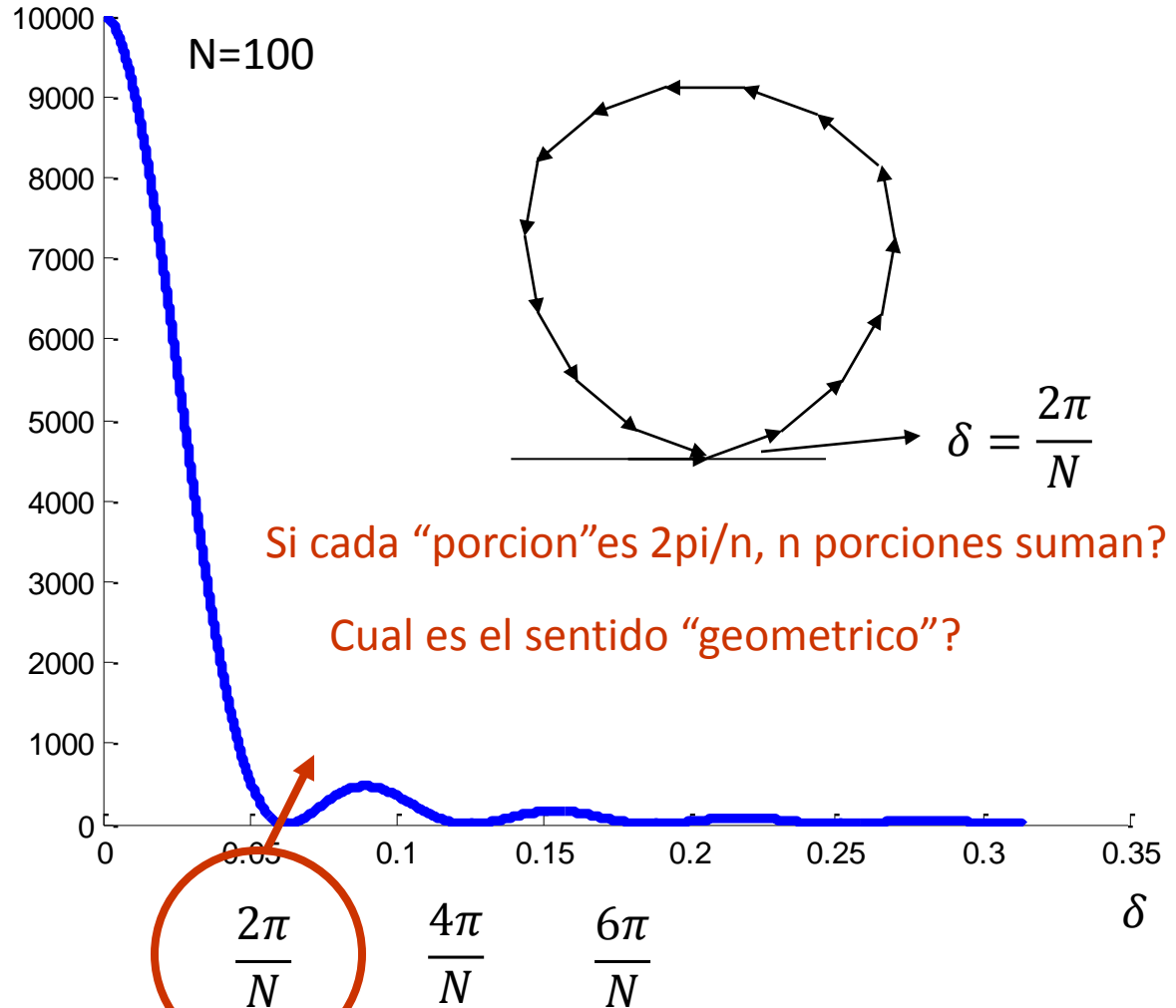
$$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, 3\frac{2\pi}{N}, \dots, (N-1)\frac{2\pi}{N}$$

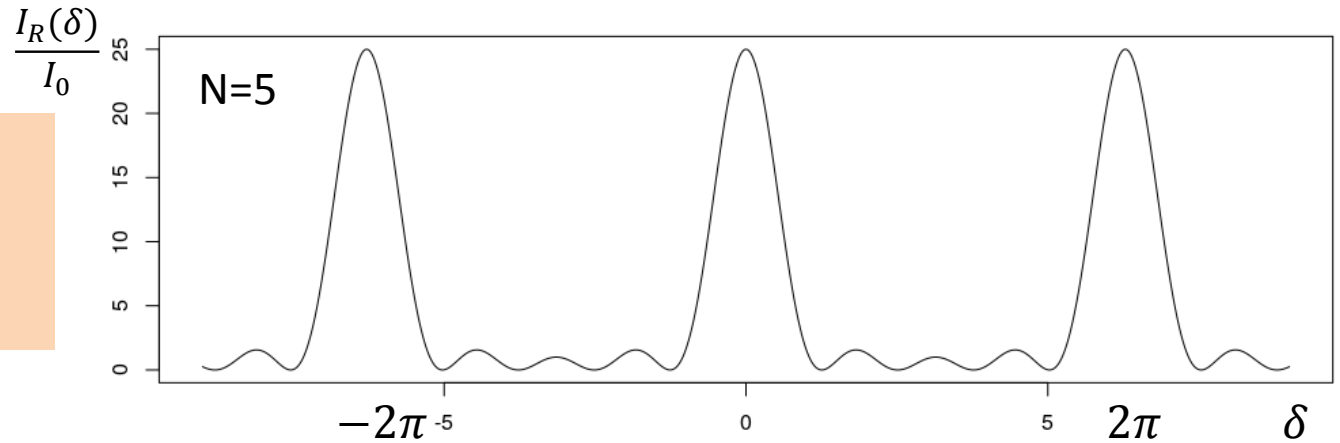
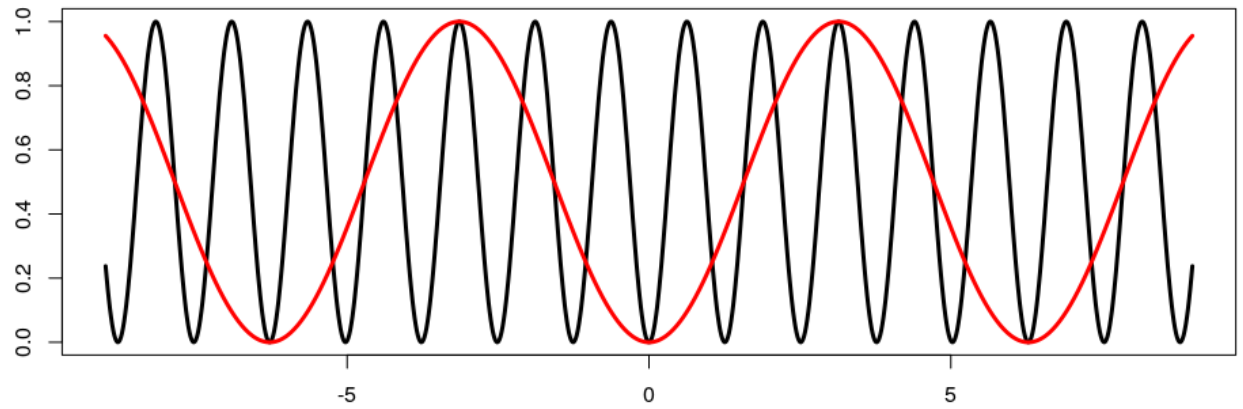
Tengo N-1 minimos entre 2 maximos cualesquiera...contando minimos puedo saber cuantas fuentes tengo!

$$R(\delta) = A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \delta + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + 2\delta + \omega t + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + (N-1)\delta + \omega t + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$





$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Maximos principales se producen cuando se anula el denominador (y por tanto tambien el numerador):

$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = m \frac{2\pi}{N}$$

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} = n\pi \rightarrow \delta = 2n\pi$$

(si se cumple esto, se cumple lo de arriba: $m=2*n*N$)

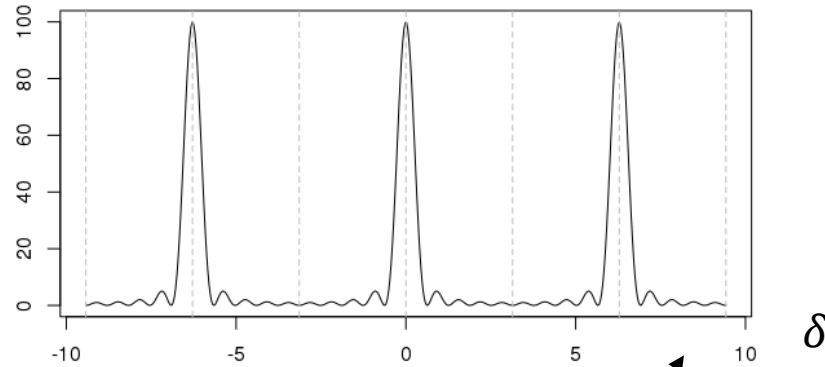
Vemos cuanto valen los max: Si $\delta \rightarrow 0$

$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{N\delta}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \quad I_R(\delta = 0) = I_0 N^2$$

Ya entendimos como funciona la intensidad emitida de acuerdo al desfaseaje

$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



A que **direccion** en particular corresponde un desfaseaje dado?

$$\delta = k d \sin \theta$$

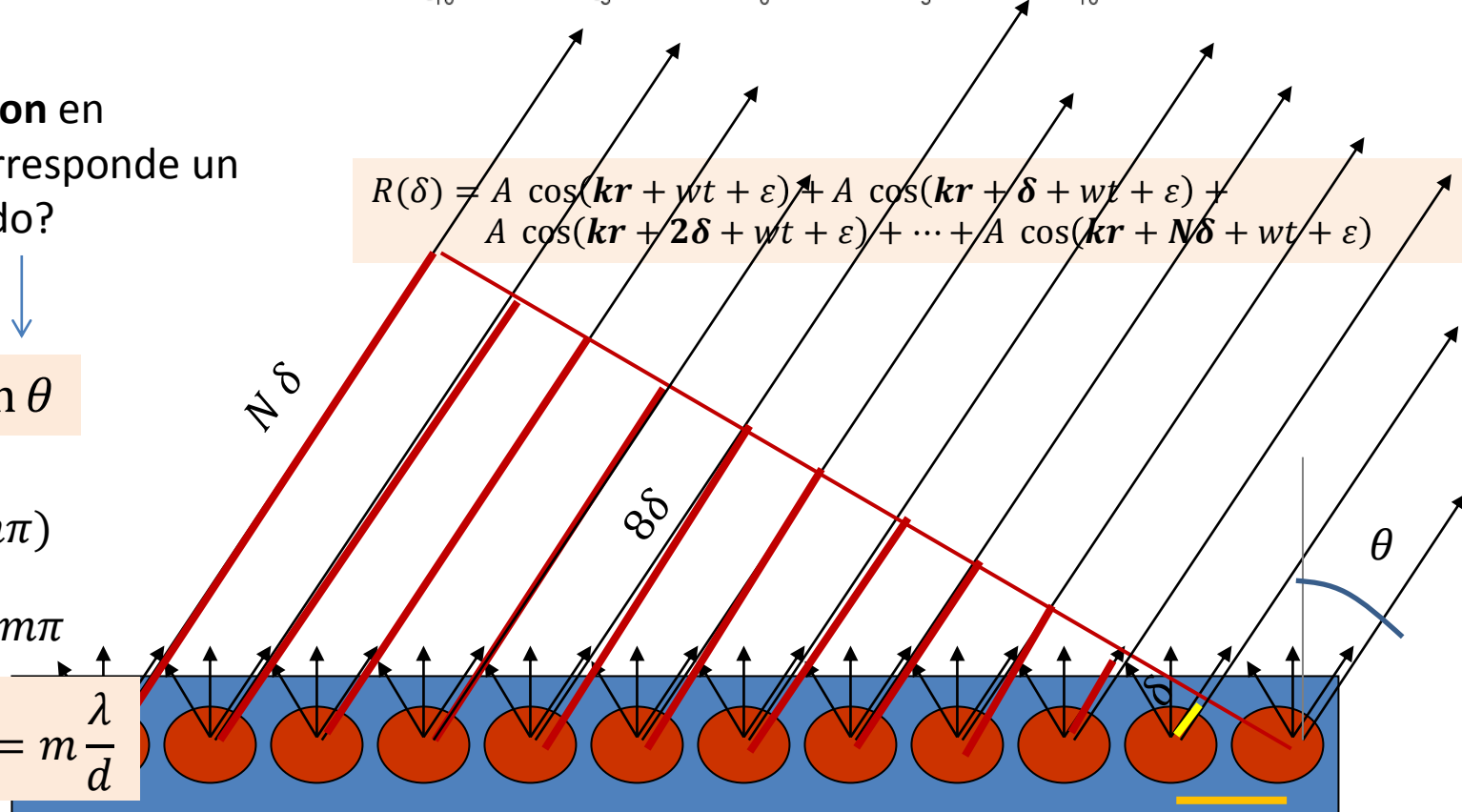
$$R(\delta) = A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + \delta + \omega t + \varepsilon) + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + 2\delta + \omega t + \varepsilon) + \dots + A \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} + N\delta + \omega t + \varepsilon)$$

Maximos ($\delta = 2m\pi$)

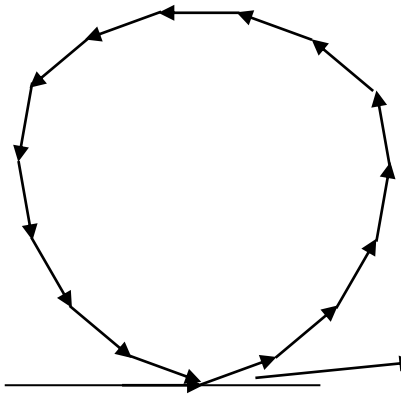
$$k d \sin\theta_{max} = 2m\pi$$

$$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k d} = m \frac{\lambda}{d}$$

Notar que si $\lambda/d > 1$ tengo un unico maximo (!) correspondiente a $m=0$



$\theta = 0$ maximo de orden cero ($m=0$)



$$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}$$

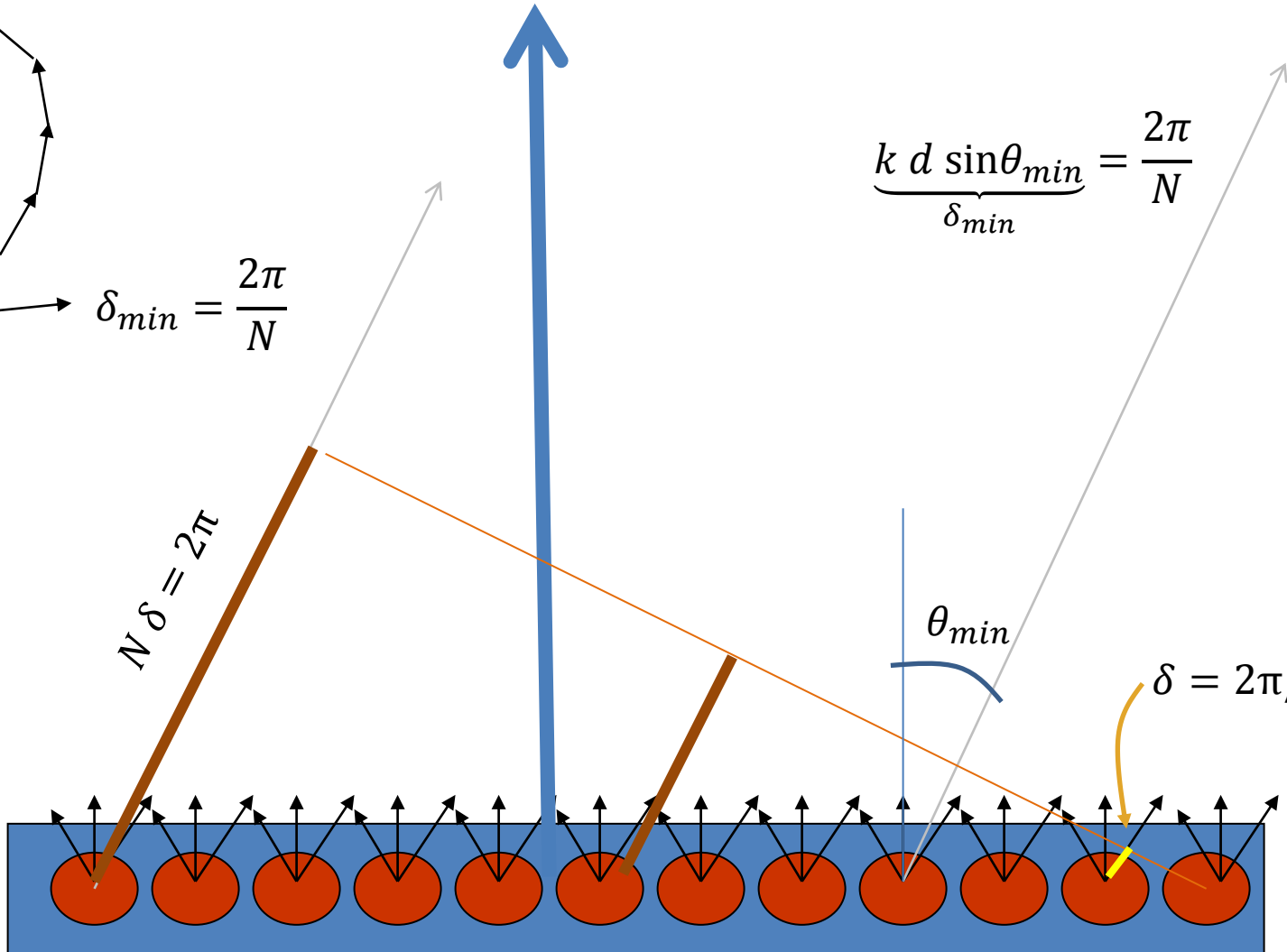
$$\underbrace{k d \sin\theta_{min}}_{\delta_{min}} = \frac{2\pi}{N}$$

$$N \delta = 2\pi$$

θ_{min}

$$\delta = 2\pi/N$$

Fuentes en fase



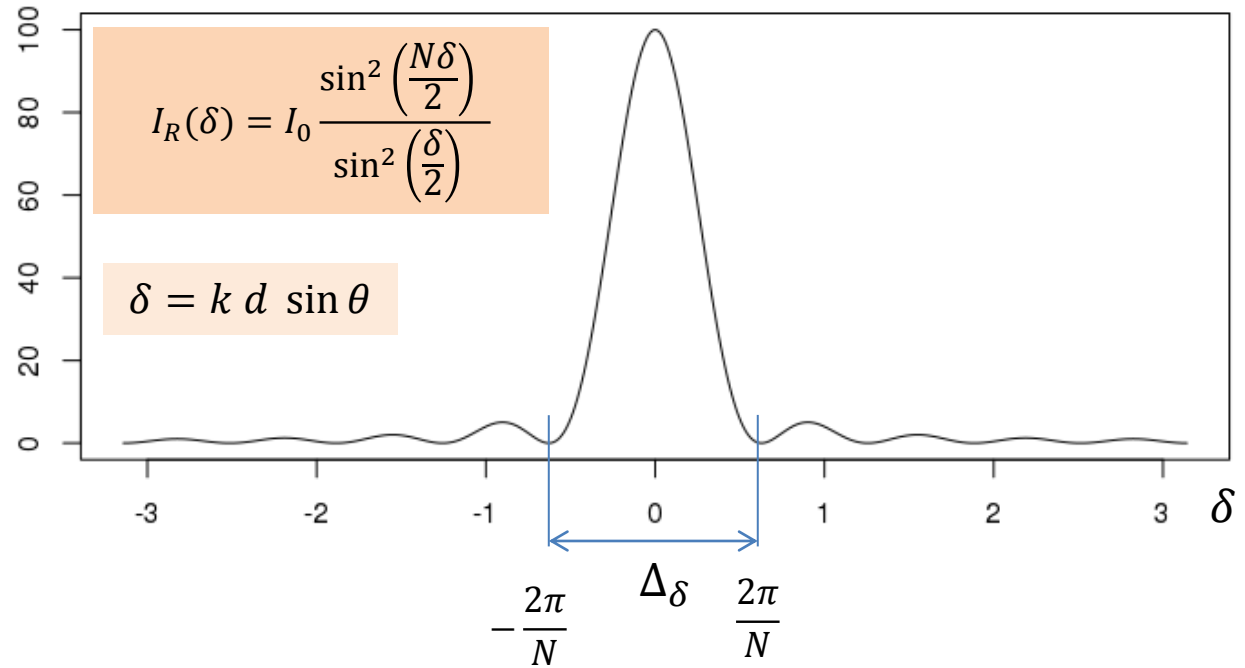
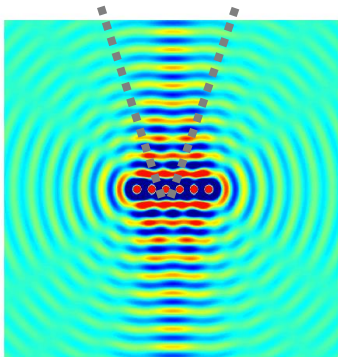
La campana de difraccion

Maximos ($\delta = 2n\pi$)

$$k d \sin\theta_{max} = 2m\pi$$

$$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k d} = m \frac{\lambda}{d}$$

Notar que si $d < \lambda$ se produce un unico maximo correspondiente $m=0$

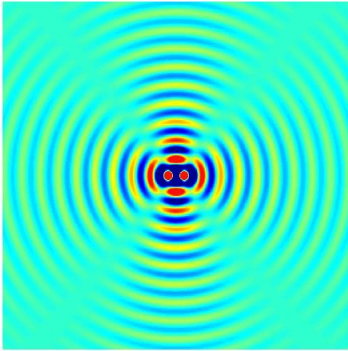


El ancho de la campana principal resulta de analizar los primeros mínimos a izq y derecha

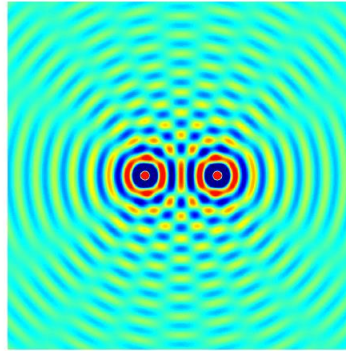
Minimos ($\delta = \pm 2\pi/N$)

$$k d \sin\theta_{\min \pm} = \pm \frac{2\pi}{N} \longrightarrow \sin\theta_{\min \pm} = \pm \frac{\lambda}{Nd}$$

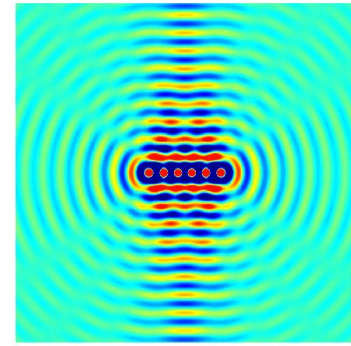
- $d < \lambda$ para que haya un unico maximo
- Cuantas mas fuentes mas angosto ese maximo



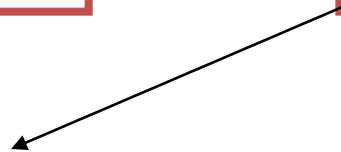
$$\text{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{d}$$



$$\text{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{D}$$



$$\text{sen}(\theta) = \frac{\lambda}{nd} = \frac{\lambda}{D}$$

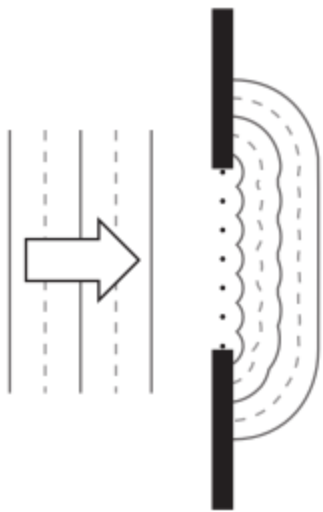


Lo mejor de los dos mundos ... un máximo central angosto sin máximos laterales.

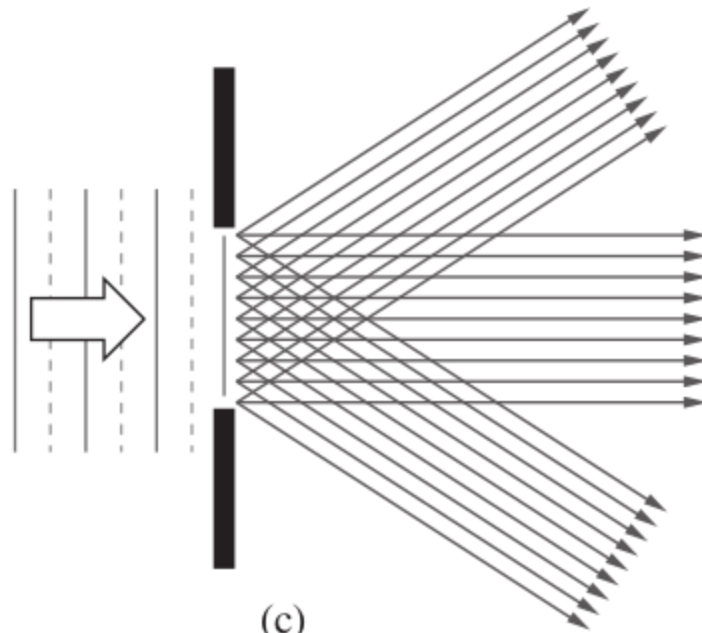
Nuevamente una estrategia de borrado constructiva.
Para eliminar los máximos laterales, agregar mas fuentes.

En términos del problema inverso, de adivinar la fuente que emite (o la textura del material que difracta la luz) a partir del espectro. Hay algún problema?

La rendija



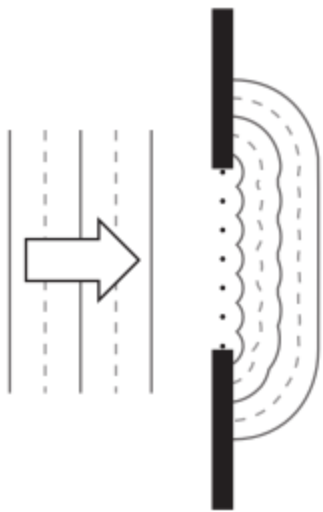
(b)



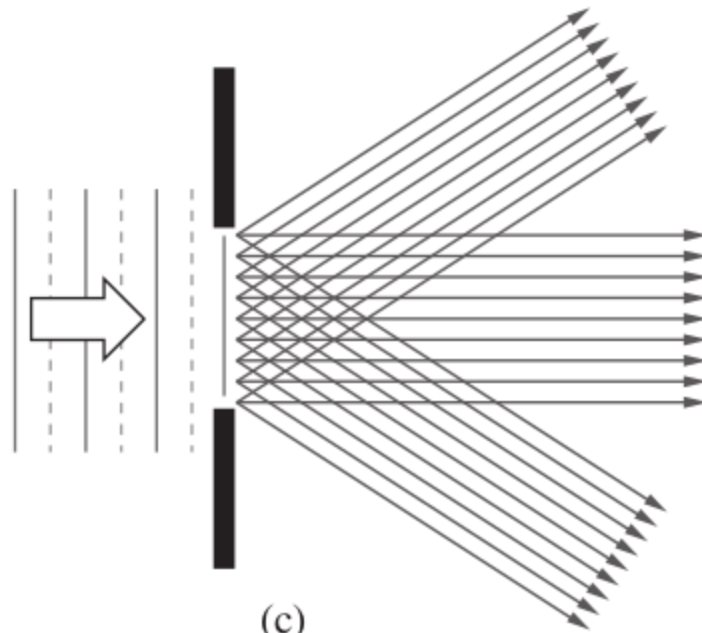
(c)

En una rendija de ancho D sobre la que incide luz
Cuántas fuentes hay?

La rendija



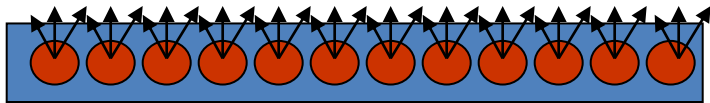
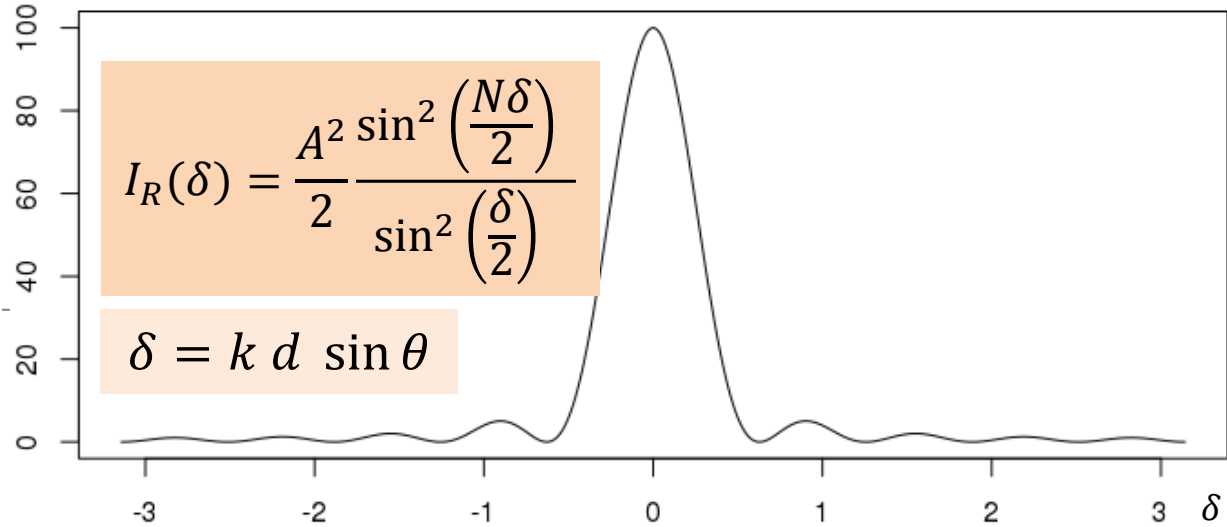
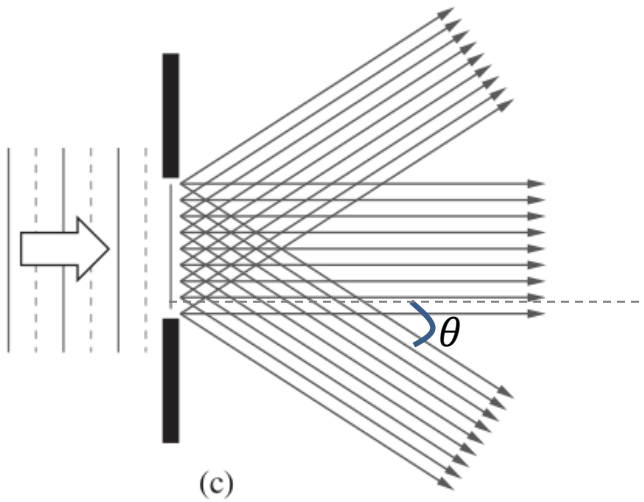
(b)



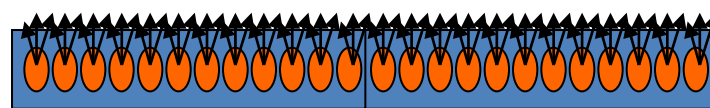
(c)

En una rendija de ancho D sobre la que incide luz
Cuántas fuentes hay?

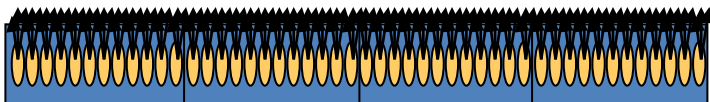
La rendija



Tengo muchisimas fuentes (Huygens)



Infinitamente cerca unas de otras



Cada una emite una amplitud diferencial

$$\lim N \rightarrow \infty$$

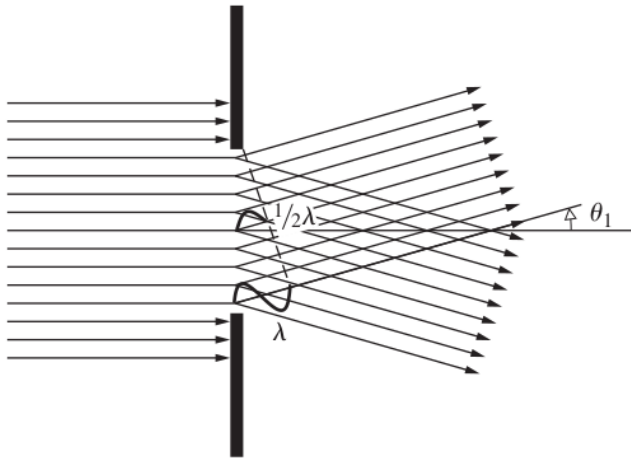
$$\lim d \rightarrow 0$$

$$\lim A \rightarrow 0$$

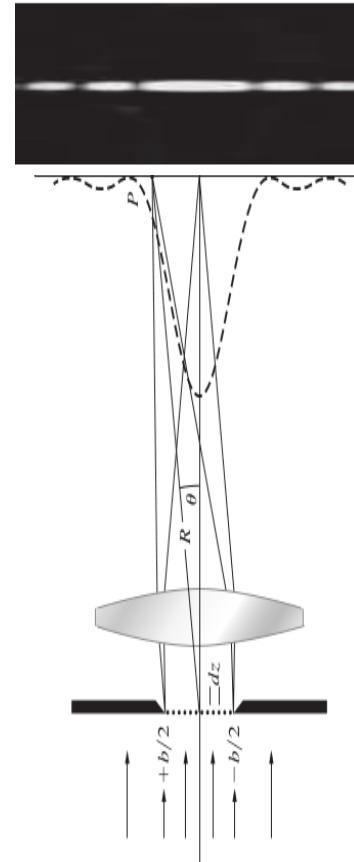
$$N * d = cte = D$$

$$N * A = cte$$

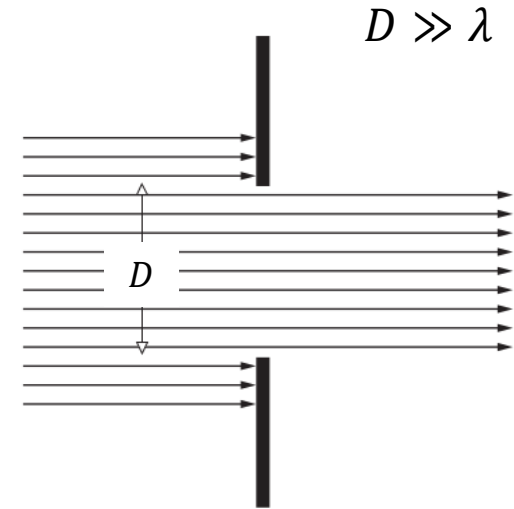
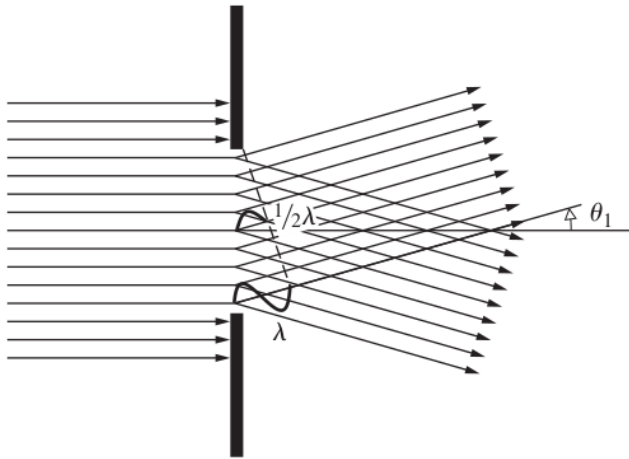
Una sombra ya pronto seras



$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{\lambda}{D}$$



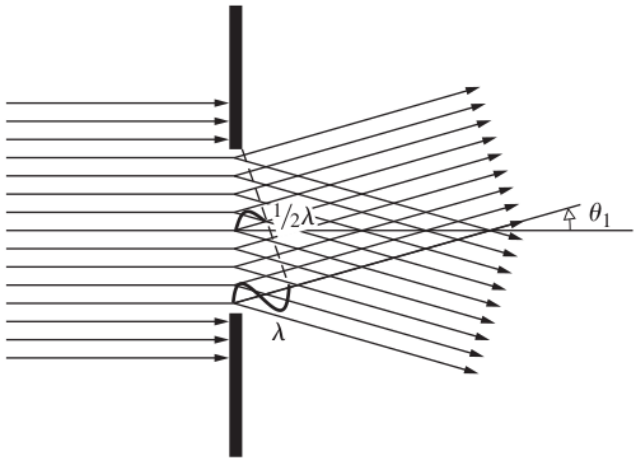
Sombra geométrica



$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{\lambda}{D}$$

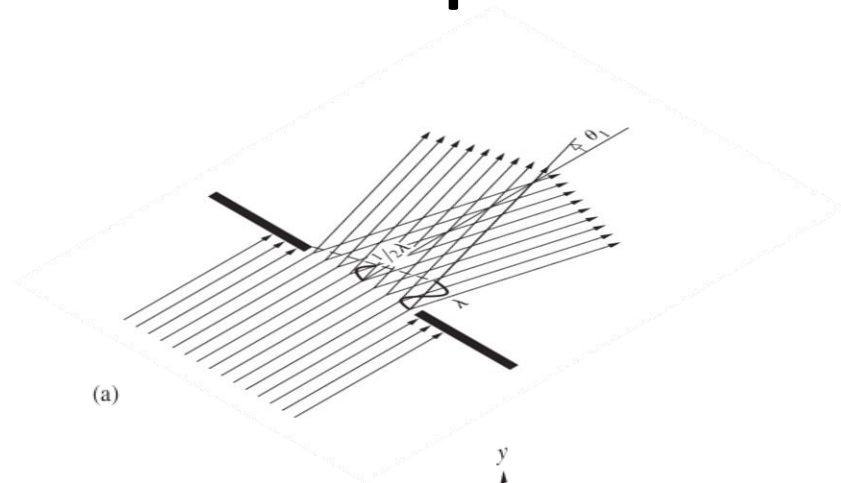
Si $\frac{\lambda}{D} \ll 1$, $\theta_{min} \sim 0$ y se produce *sombra geométrica*

Un poco de realidad por favor

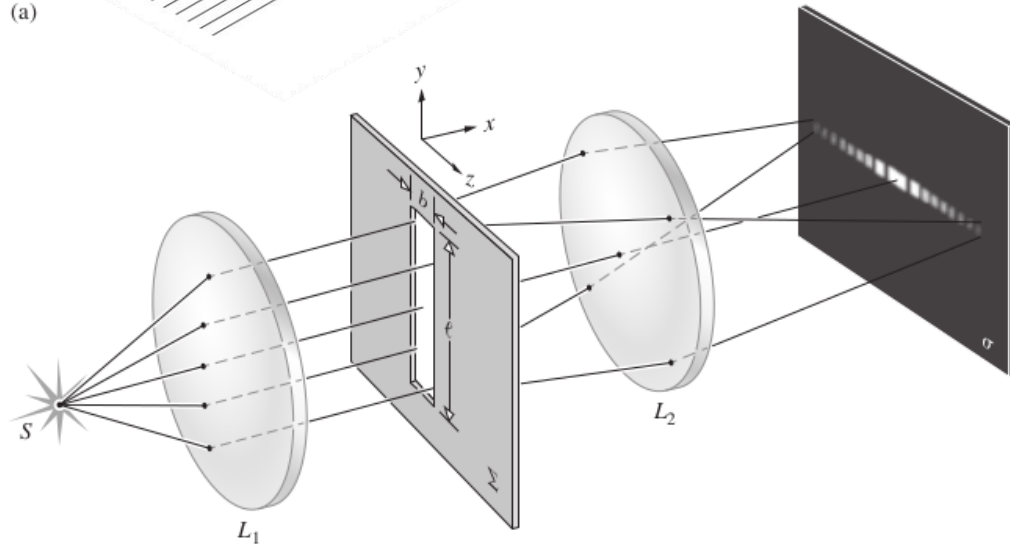


Hasta ahora estuvimos resolviendo este tipo de rendijas (problema unidimensional)

El recorte y obstrucción del frente de onda ocurre a lo largo del eje z del dibujo (la rendija es larga por lo que no recorta nada en la dirección y)



(a)

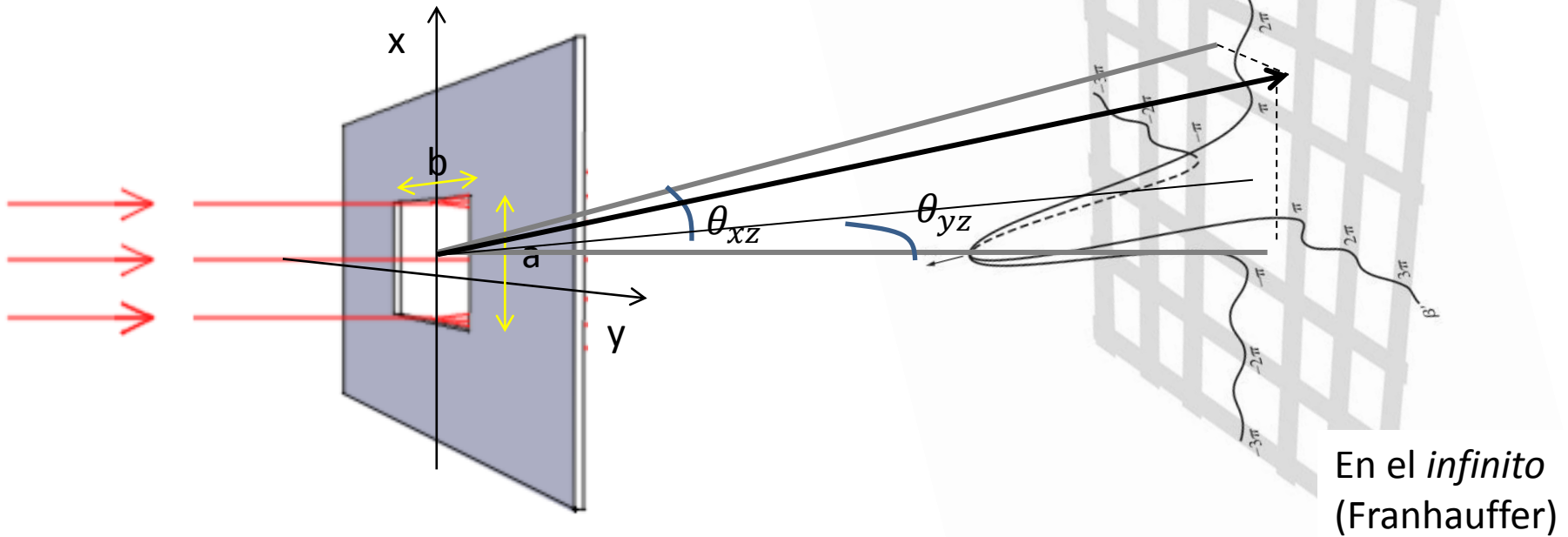


(b)

Un poco de realidad por favor

Que pasa con este tipo de rendija?

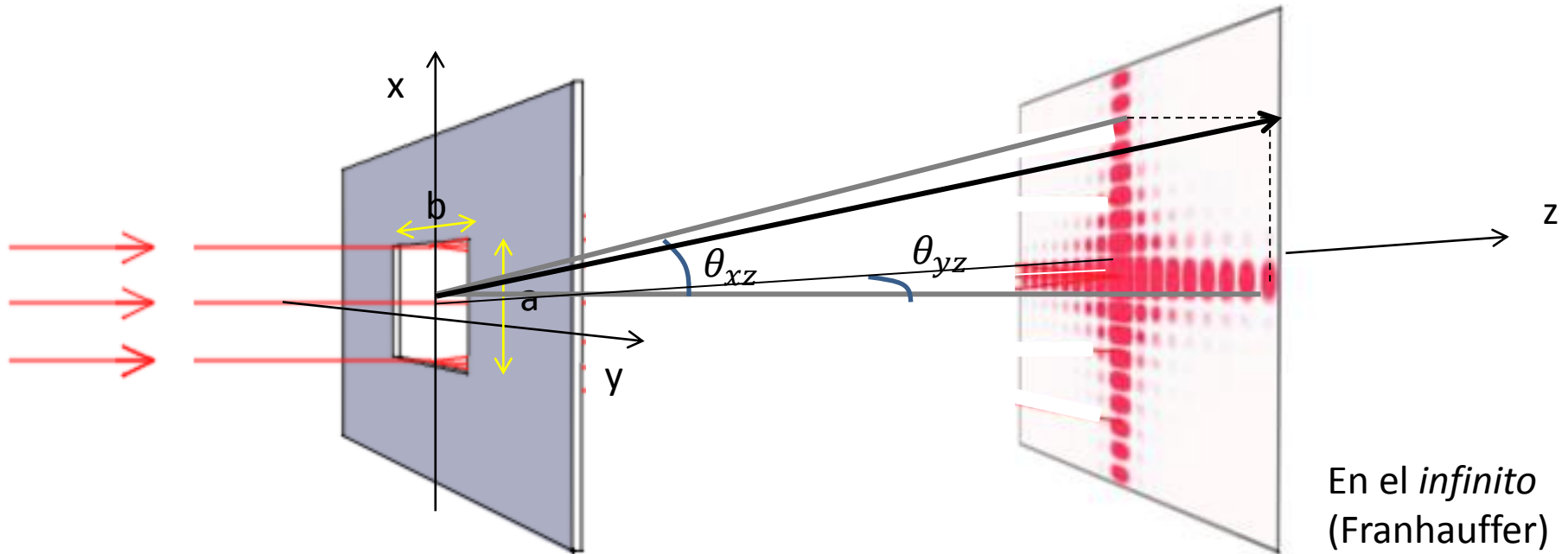
El problema de difracción se vuelve bidimensional...recorto a lo largo de dos direcciones: x e y



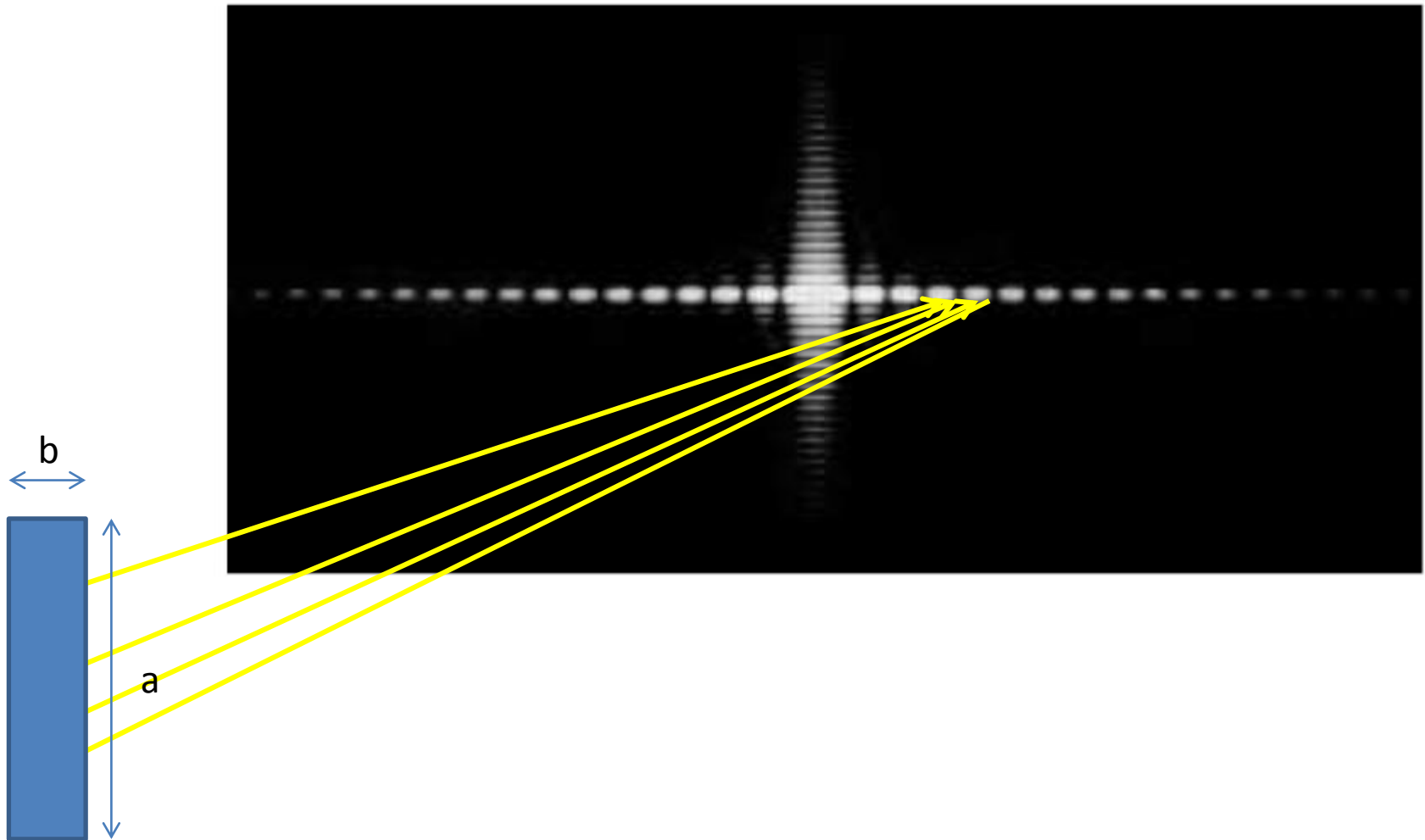
Un poco de realidad por favor

Que pasa con este tipo de rendija?

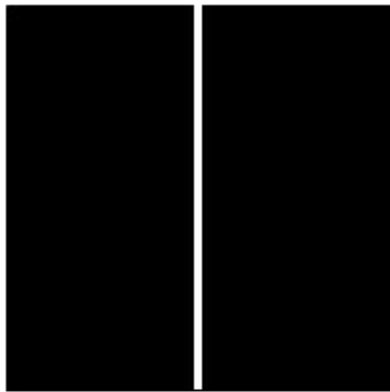
El problema de difracción se vuelve bidimensional...recorto a lo largo de dos direcciones: x e y



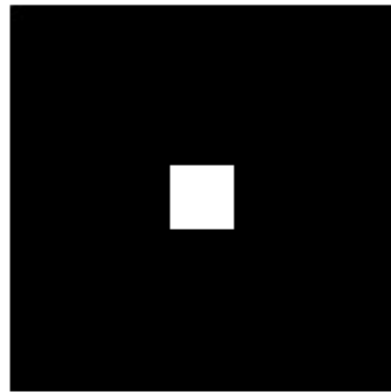
Rendija rectangular



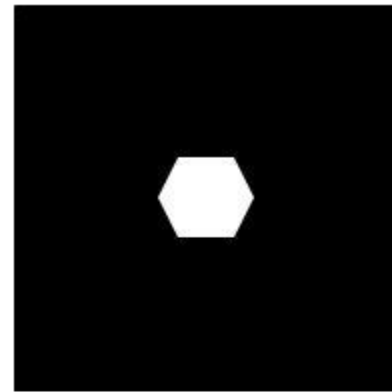
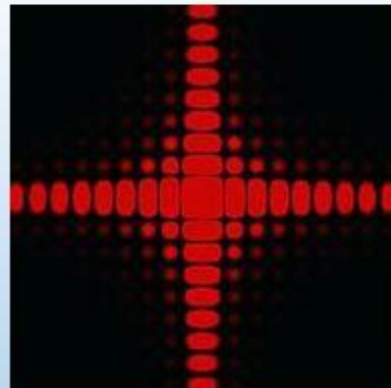
Diversos agujeritos que difractan



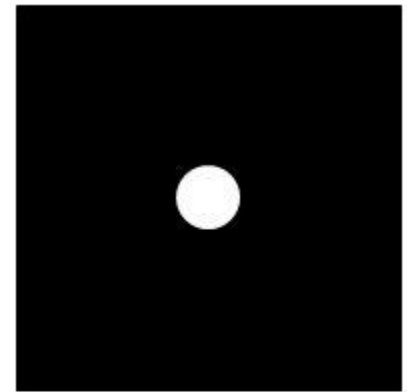
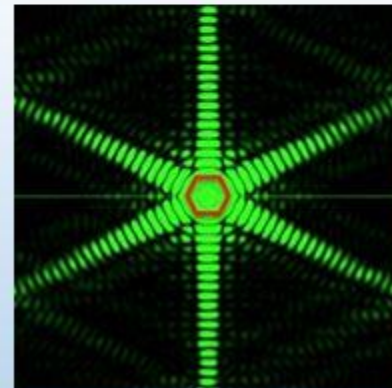
Single slit



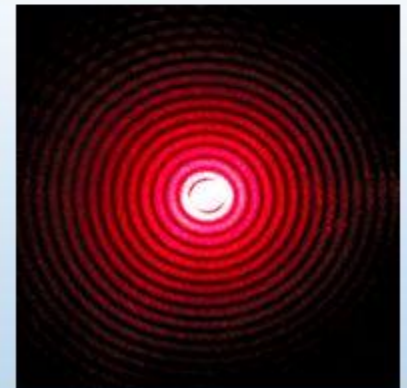
Square aperture



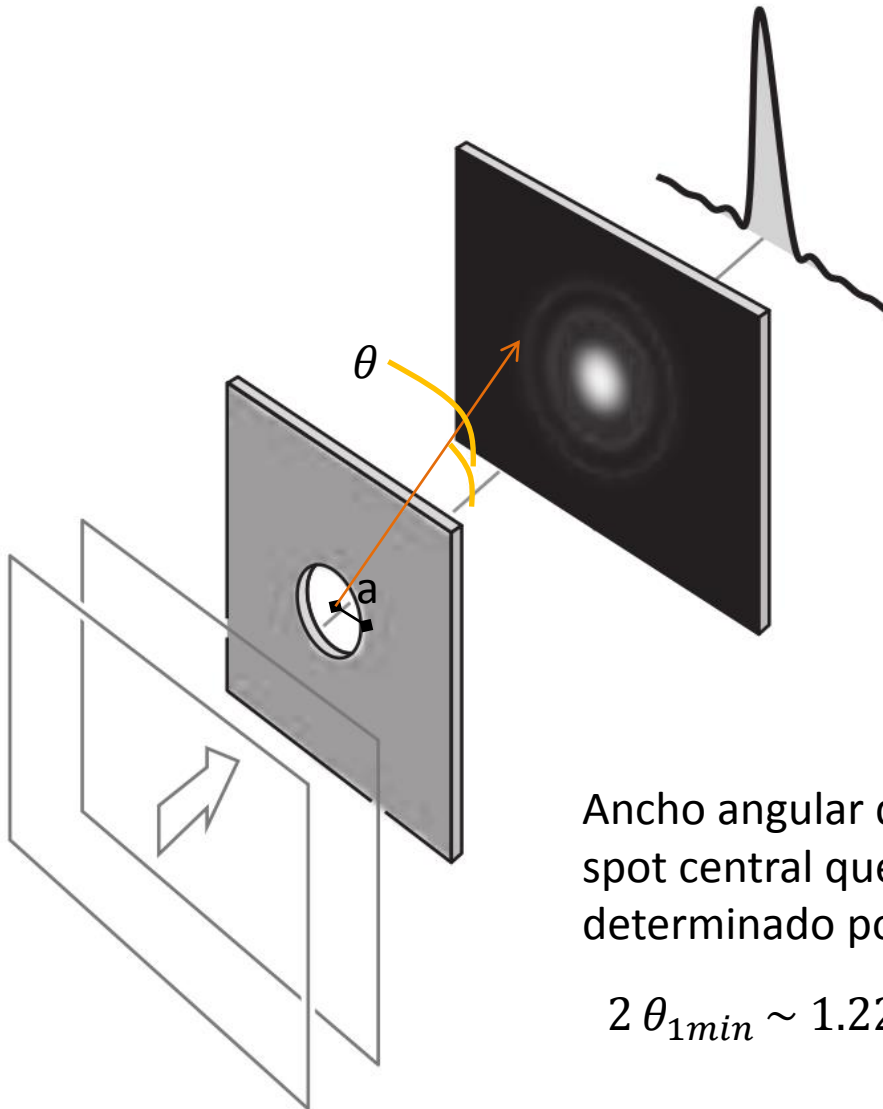
Hexagonal aperture



Circular aperture

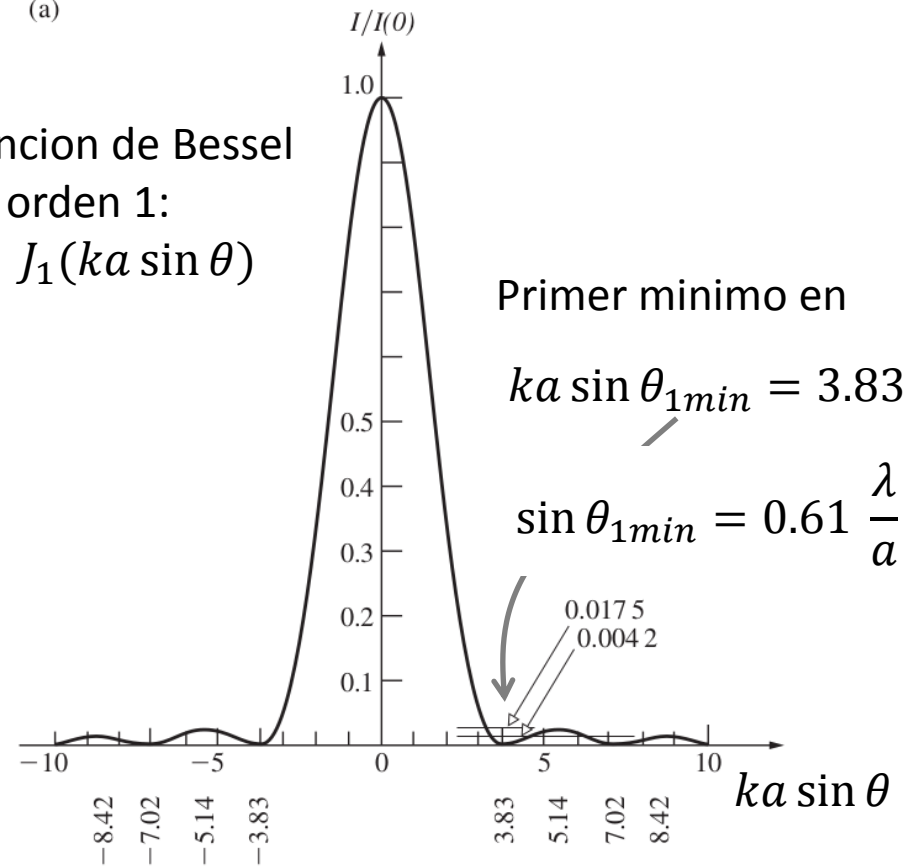


Rendija circular



Funcion de Bessel
de orden 1:

$$J_1(ka \sin \theta)$$



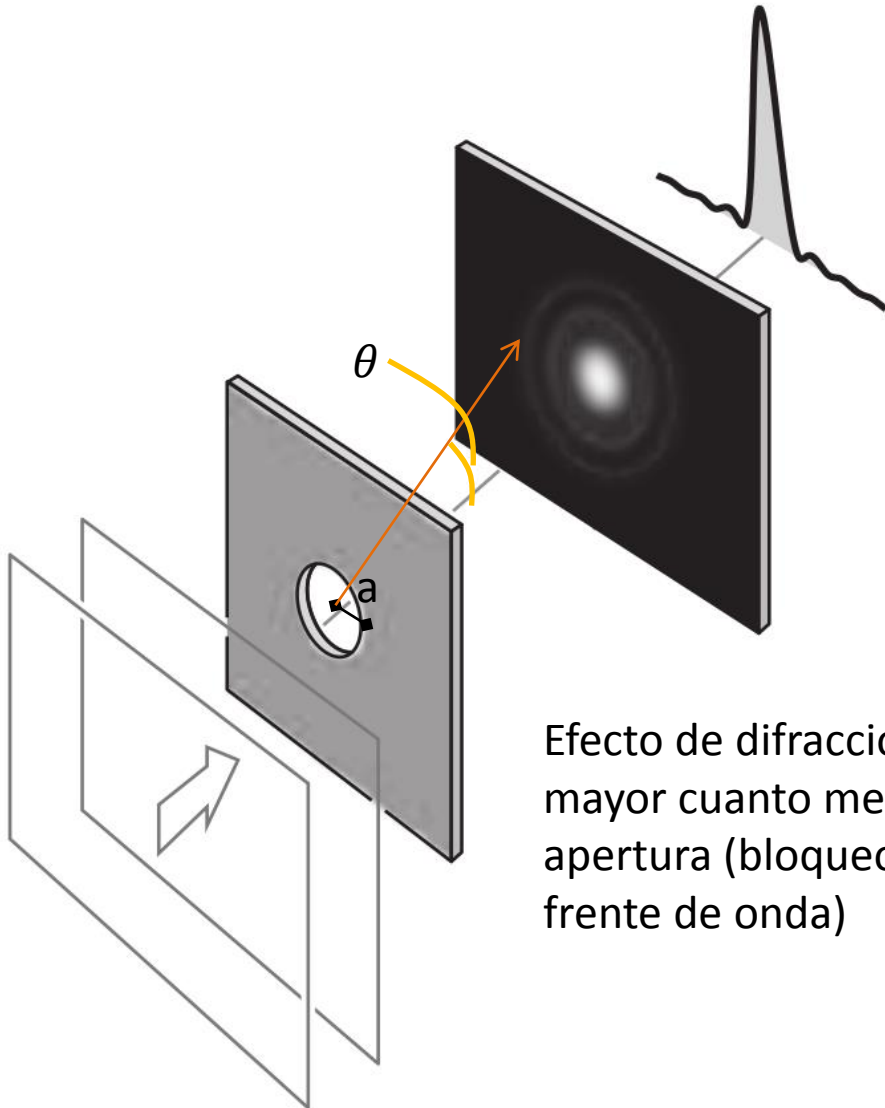
Ancho angular del
spot central queda
determinado por

$$2 \theta_{1min} \sim 1.22 \frac{\lambda}{a}$$



Disco de Airy

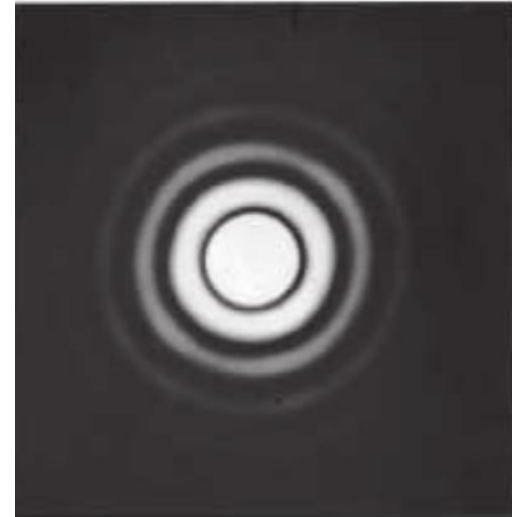
Rendija circular



Efecto de difraccion es mayor cuanto menor es la apertura (bloqueo mas frente de onda)

Ancho angular del spot central queda determinado por

$$2 \theta_{1min} \sim 1.22 \frac{\lambda}{a}$$



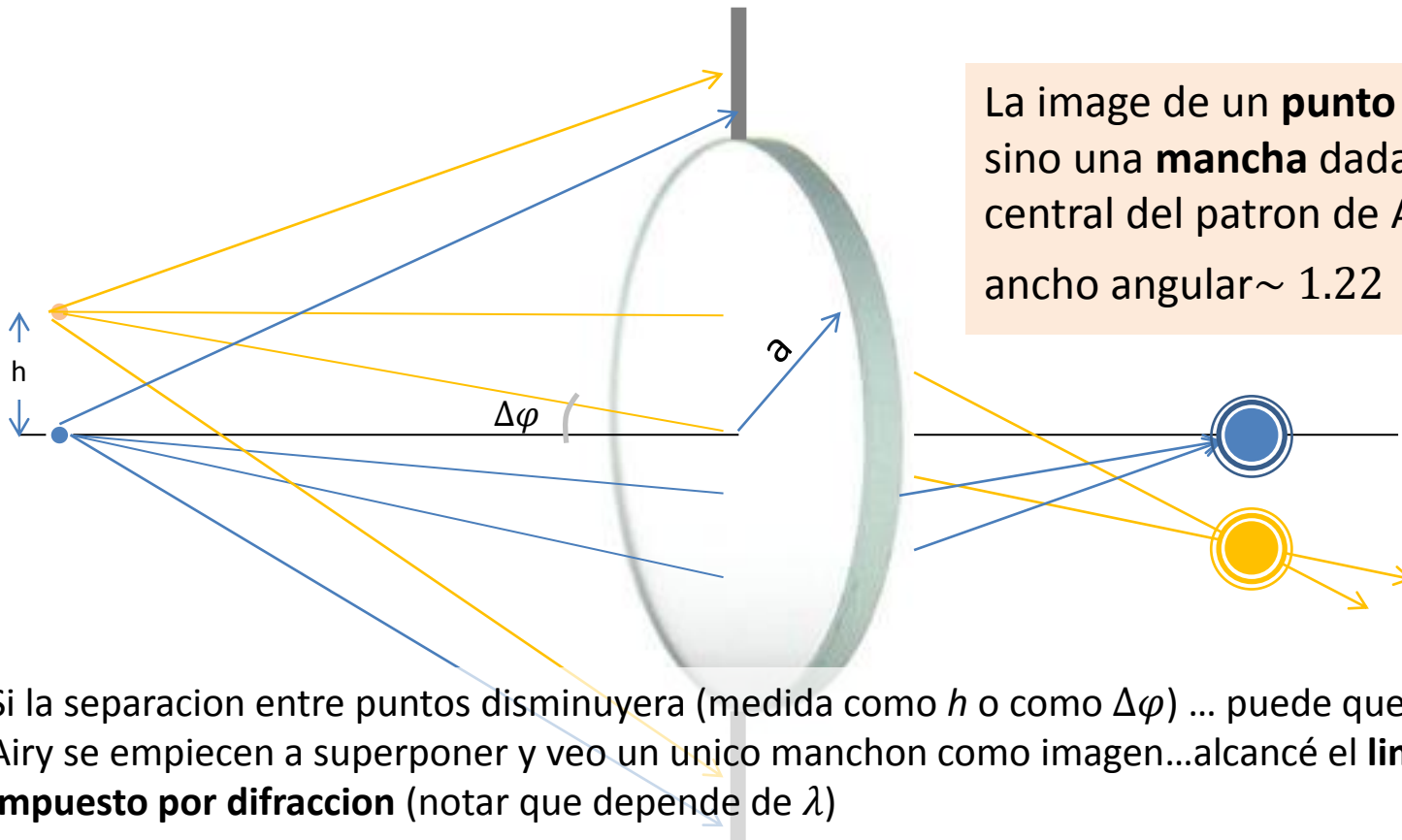
$a=1\text{mm}$



$a=0.5\text{mm}$

Limite de resolucion de sistemas opticos impuesto por difraccion

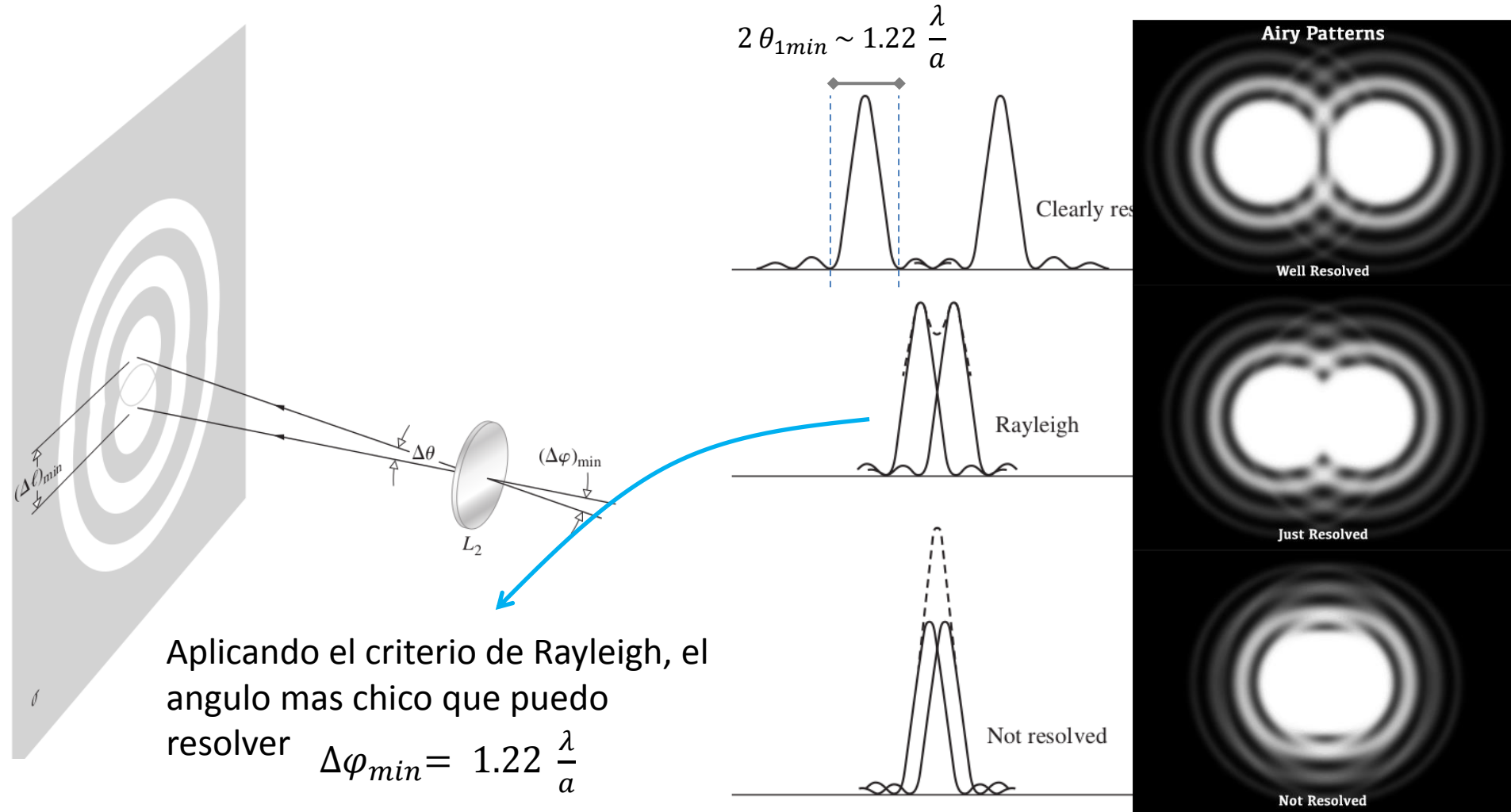
Hasta ahora no nos dimos cuenta...pero una lente **recorta el frente de onda** y **solo deja pasar una parte**...entonces aparecen efectos de **difraccion** (como en rendija circular (!))



La image de un **punto** no es un punto, sino una **mancha** dada por el circulo central del patron de Airy (que tiene un ancho angular $\sim 1.22 \frac{\lambda}{a}$)

Si la separacion entre puntos disminuyera (medida como h o como $\Delta\phi$) ... puede que los dos patrones de Airy se empiecen a superponer y veo un unico manchon como imagen...alcancé el **limite de resolucion impuesto por difraccion** (notar que depende de λ)

Criterio de Rayleigh dicho por Hecht



Mi sistema optico va a poder resolver (en el sentido de Rayleigh) dos puntos cuya separacion angular, medida desde la lente, sea $\Delta\varphi > 1.22 \frac{\lambda}{a}$.

Listo!