departamento de física
universidad de buenos aires - exactas
Juan José Giambiagi

Clase 11
Inductancia

Cátedra: Diego Arbó

Inductancia mutua

Φ_{B2} es el flujo magnético a través de cada una de las espiras de la bobina 2.
Cuando i_1 cambia => Φ_{B2} cambia y se induce una fem sobre la bobina 2

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_{B2}}{dt}$$

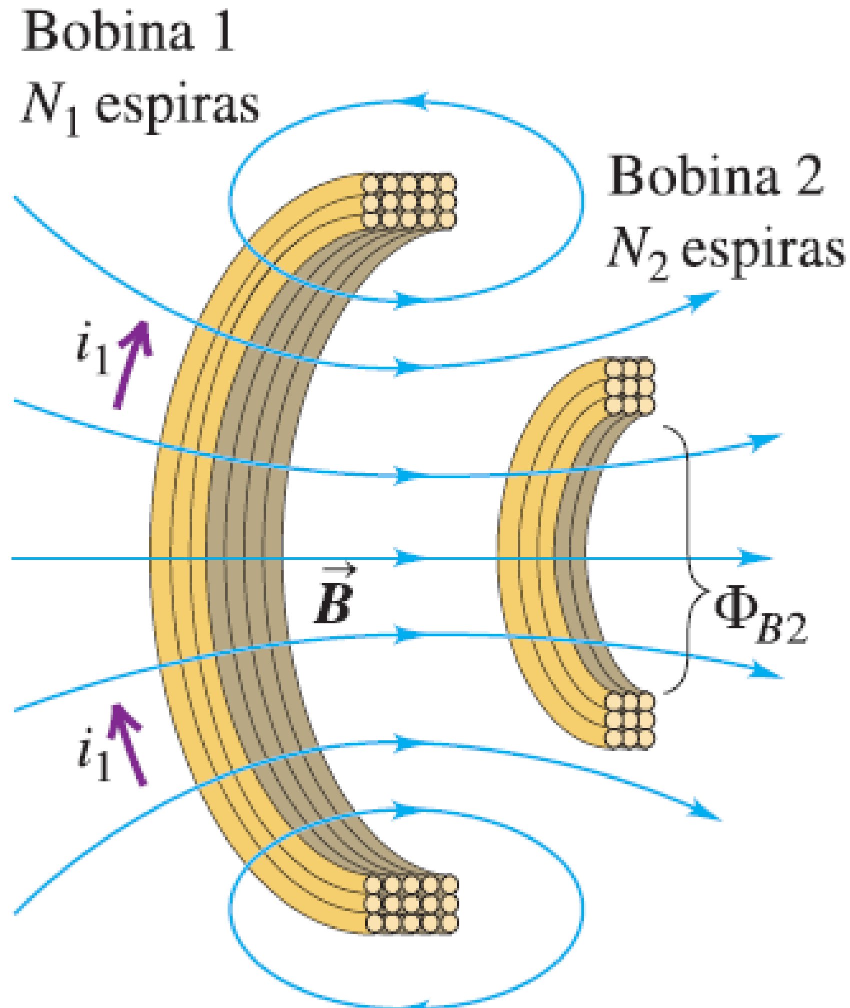
El campo magnético ***B*** de la bobina 1 es proporcional a i_1 => Φ_{B2} es proporcional a i_1.

$$N_2\Phi_{B2} = M_{21} i_1 \Rightarrow M_{21} = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$

M_{21} depende de la geometría de las dos bobinas

Inductancia mutua: si la corriente en la bobina 1 está cambiando, el flujo cambiante a través de la bobina 2 induce una fem en esta última.



Podemos repetir todo al revés, donde i_2 cambia e induce una corriente sobre la bobina 1 y hallo M_{12}

Se puede demostrar que $M_{12}=M_{21}$

$$M = \frac{N_2\Phi_{B2}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{B1}}{i_2} \qquad \text{(inductancia mutua)}$$

$$\mathcal{E}_2 = -M\frac{di_1}{dt} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_1 = -M\frac{di_2}{dt} \qquad \text{(fem mutuamente inducidas)}$$

Las unidades de inductancia mutua es el henry

$$1\ \mathrm{H} = 1\ \mathrm{Wb/A} = 1\ \mathrm{V \cdot s/A} = 1\ \Omega \cdot \mathrm{s} = 1\ \mathrm{J/A^2}$$

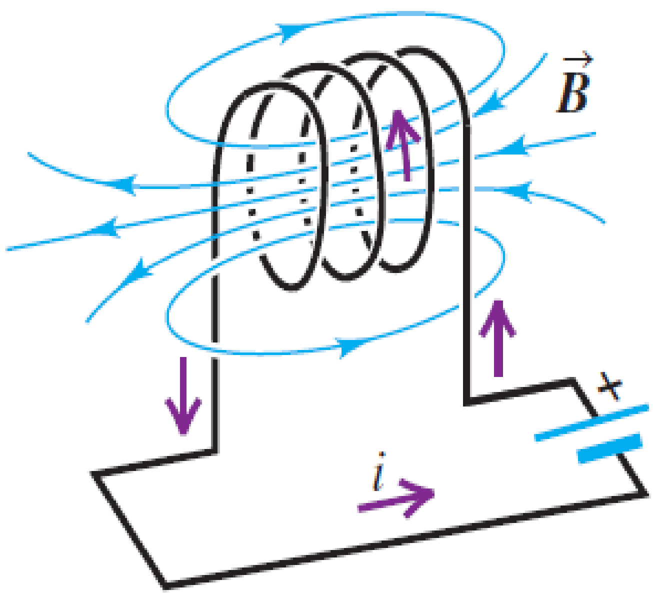
Autoinductancia

La corriente *i* en el circuito crea un campo magnético ***B*** en la bobina y, por lo tanto, un flujo a través de ésta.

$$L = \frac{N\Phi_B}{i} \qquad \text{(autoinductancia)}$$

Autoinductancia: si la corriente *i* en la bobina está cambiando, el flujo cambiante a través de ésta induce una fem en la bobina.

De la ley de Faraday $\mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt}$



$$\mathcal{E} = -L\frac{di}{dt} \qquad \text{(fem autoinducida)}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{di}{dt}$$

Para un solenoide de largo d la autoinductancia es $L = \frac{N\Phi_B}{i} = \frac{N\mu_0 ANi}{i\,d} = \frac{N^2 A\mu_0}{d}$

Energía magnética almacenada en un inductor

Tasa a la que se entrega energía a una bobina:

$$P = V_{ab}i = Li\frac{di}{dt}$$

La energía *dU* que se suministra a una bobina durante un tiempo infinitesimal *dt* es *dU = P dt*:

$$dU = Li\,di$$

$$U = L\int_0^I i\,di = \frac{1}{2}LI^2 \qquad \text{(energía almacenada en un inductor)}$$

En un solenoide: $L = \dfrac{N^2 A\mu_0}{d} \quad \Rightarrow \quad U = \dfrac{1}{2}\dfrac{N^2 A\mu_0}{d} I^2$

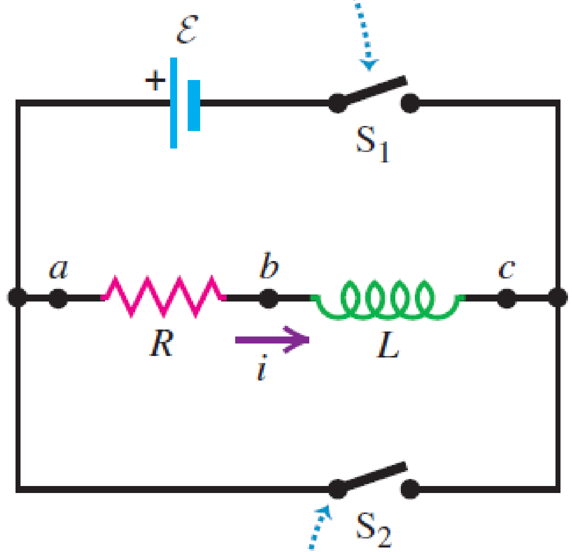
$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\frac{N^2 A\mu_0}{d} I^2 / Ad$$

$$u = \frac{1}{2}\frac{N^2 \mu_0}{d^2} I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Circuito RL

$$v_{ab} = iR \qquad v_{bc} = L\frac{di}{dt}$$

Al cerrar el interruptor S_1 se conecta la combinación R-L en serie con una fuente de fem $\mathcal{E}$.



Al cerrar el interruptor S_2 al mismo tiempo que se abre S_1 se desconecta la combinación de la fuente.

$$-iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt$$

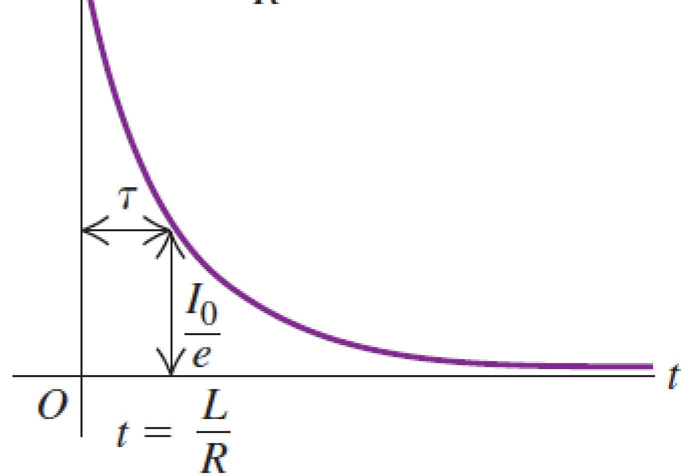
$$\int_{I_0}^{i}\frac{di'}{i'} = -\frac{R}{L}\int_{0}^{t}dt'$$

$$\ln\left(\frac{i}{I_0}\right) = -\frac{R}{L}t \qquad i = I_0 e^{-(R/L)t}$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$ (constante de tiempo para un circuito R-L)

$$0 = i^2R + Li\frac{di}{dt}$$

La energía almacenada en la inductancia decrece al disiparse en la resistencia.



$$\varepsilon - iR - L\frac{di}{dt} = 0$$

Condiciones iniciales: *i(0) = 0;* $\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{inicial}} = \frac{\mathcal{E}}{L}$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E} - iR}{L} = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}i$$

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\text{final}} = 0 = \frac{\mathcal{E}}{L} - \frac{R}{L}I \quad \text{e}$$

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

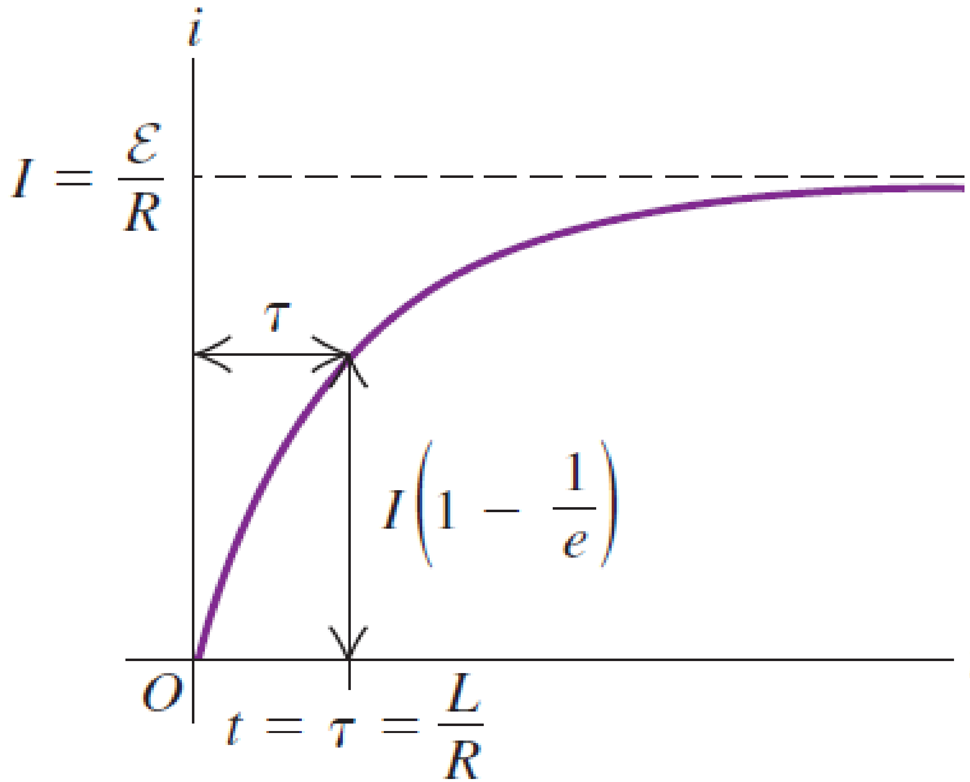
$$\frac{di}{i - (\mathcal{E}/R)} = -\frac{R}{L}dt$$

$$\int_0^i \frac{di'}{i' - (\mathcal{E}/R)} = -\int_0^t \frac{R}{L}dt'$$

$$\ln\left(\frac{i - (\mathcal{E}/R)}{-\mathcal{E}/R}\right) = -\frac{R}{L}t$$

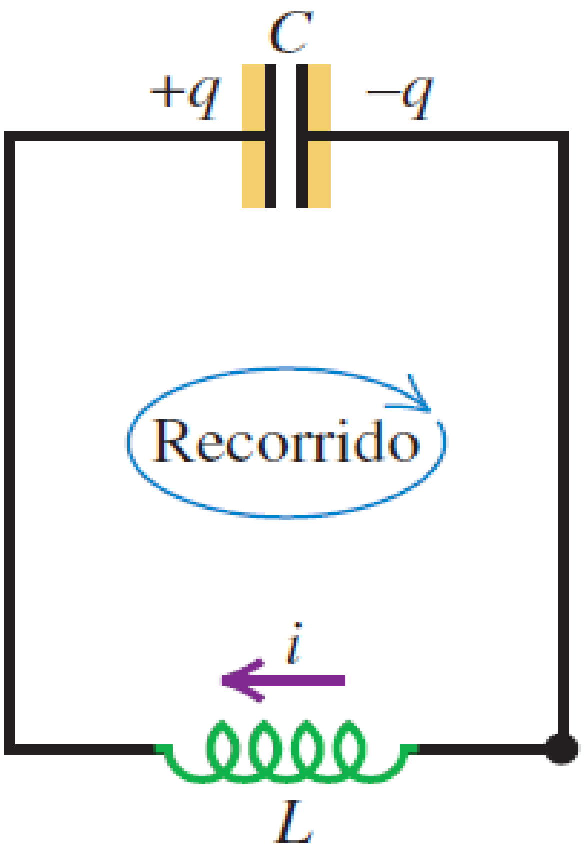
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{L}e^{-(R/L)t}$$



Circuito LC:

Tan pronto como se ha completado el circuito y el capacitor comienza a descargarse por primera vez, la corriente es negativa (opuesta al sentido que se indica)



$$-L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

Como $i = dq/dt$, $\quad \dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$q = Q\cos(\omega t + \phi)$$

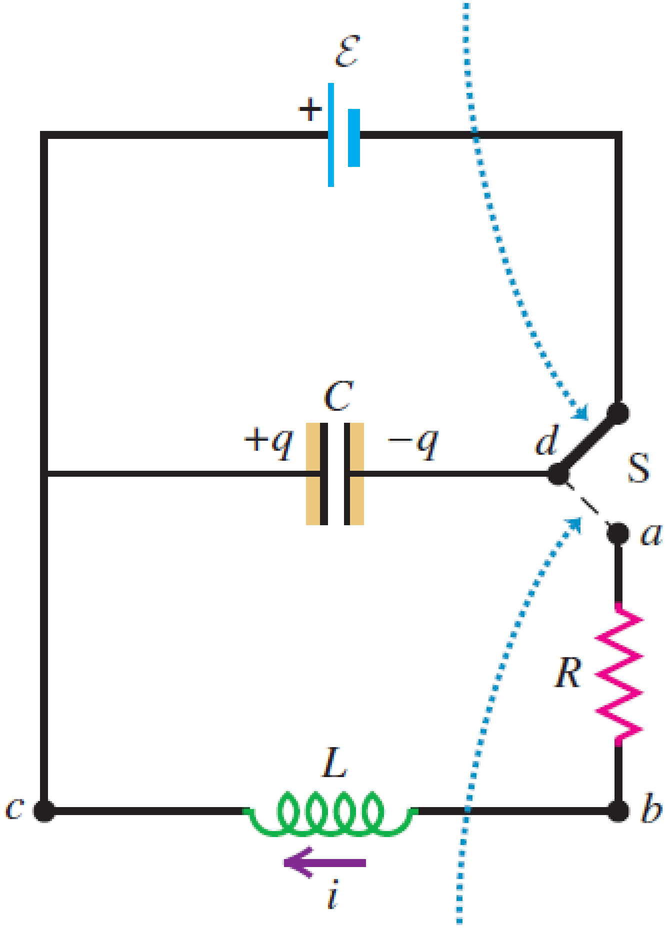
$$i = -\omega Q \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}Li^2 + \frac{q^2}{2C} = \frac{Q^2}{2C}$$

Circuito RLC

Cuando el interruptor S se encuentra en esta posición, la fem carga al capacitor.



Cuando el interruptor S pasa a esta posición, el capacitor se descarga a través del resistor y el inductor.

$$-iR - L\frac{di}{dt} - \frac{q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0$$

circuito en serie *L-R-C* subamortiguado

$$q = Ae^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\,t + \phi\right)$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

a) Circuito subamortiguado (resistencia R pequeña)