departamento de física
universidad de buenos aires - exactas
Juan José Giambiagi

Clase 5
Capacitores y dieléctricos

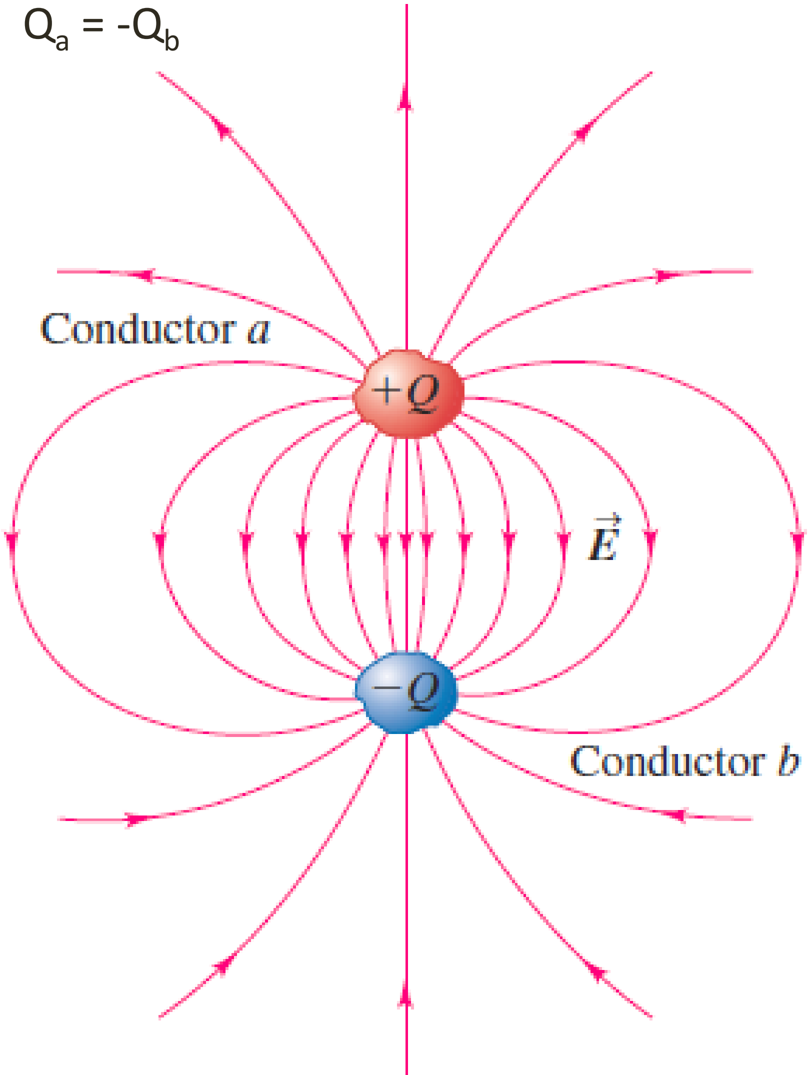
Cátedra: Diego Arbó

Capacitores

Un capacitor es un dispositivo que almacena energía potencial y cargas eléctricas.

Dos conductores cualesquiera *a* y *b* aislados uno del otro forman un capacitor.

$Q_a = -Q_b$



- El campo eléctrico en la región entre los conductores es proporcional a Q de la carga de cada conductor.
- Entonces la diferencia de potencial V_{ab} también es proporcional a Q.
- El cociente es la capacitancia C del capacitor:

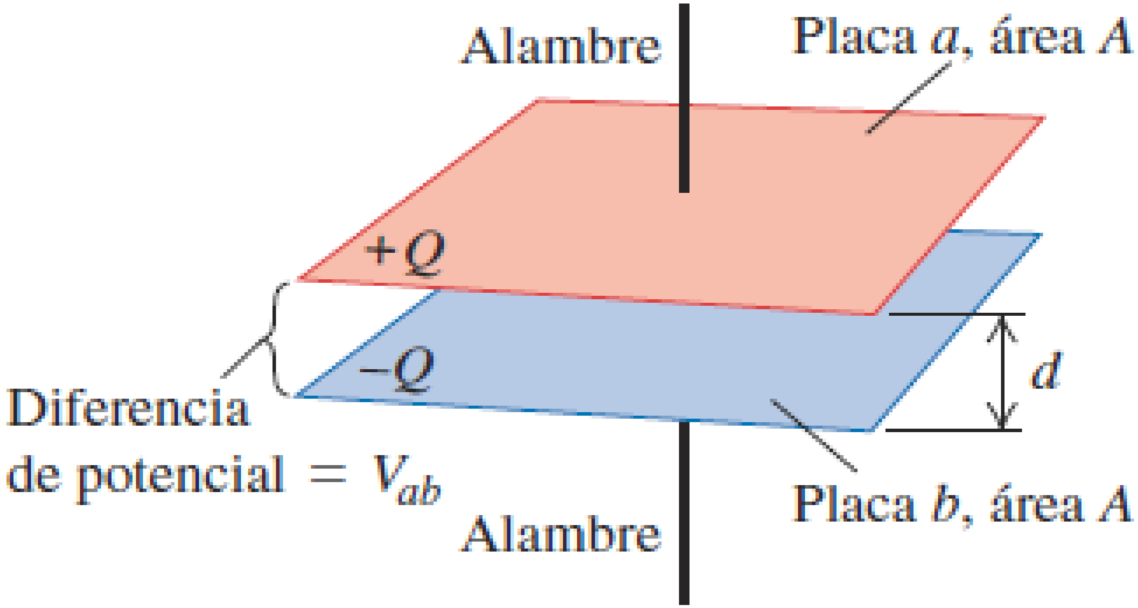
$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad \text{(definición de capacitancia)}$$

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

La capacitancia es una medida de la abilidad de un capacitor para almacenar carga y energía.

La capacitancia depende de la geometría del capacitor y del material aislante.

Capacitor de caras paralelas

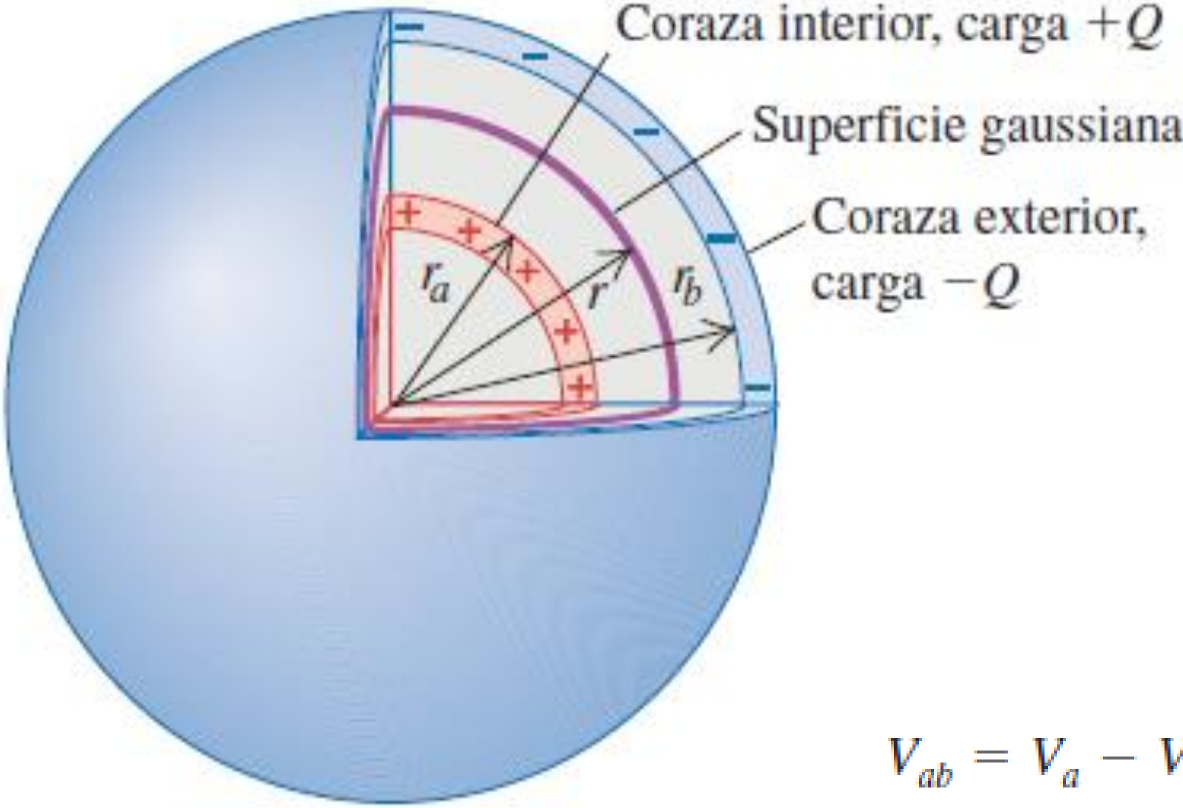


$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$ (capacitancia de un capacitor de placas paralelas con vacío)

Capacitor esférico



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\epsilon_0}$$

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Si llamamos *d* a la distancia entre las placas y *A* a la media geométrica del área de cada coraza, entonces:

$$C = \epsilon_0 A/d$$

Misma expresión que capacitor de caras paralelas

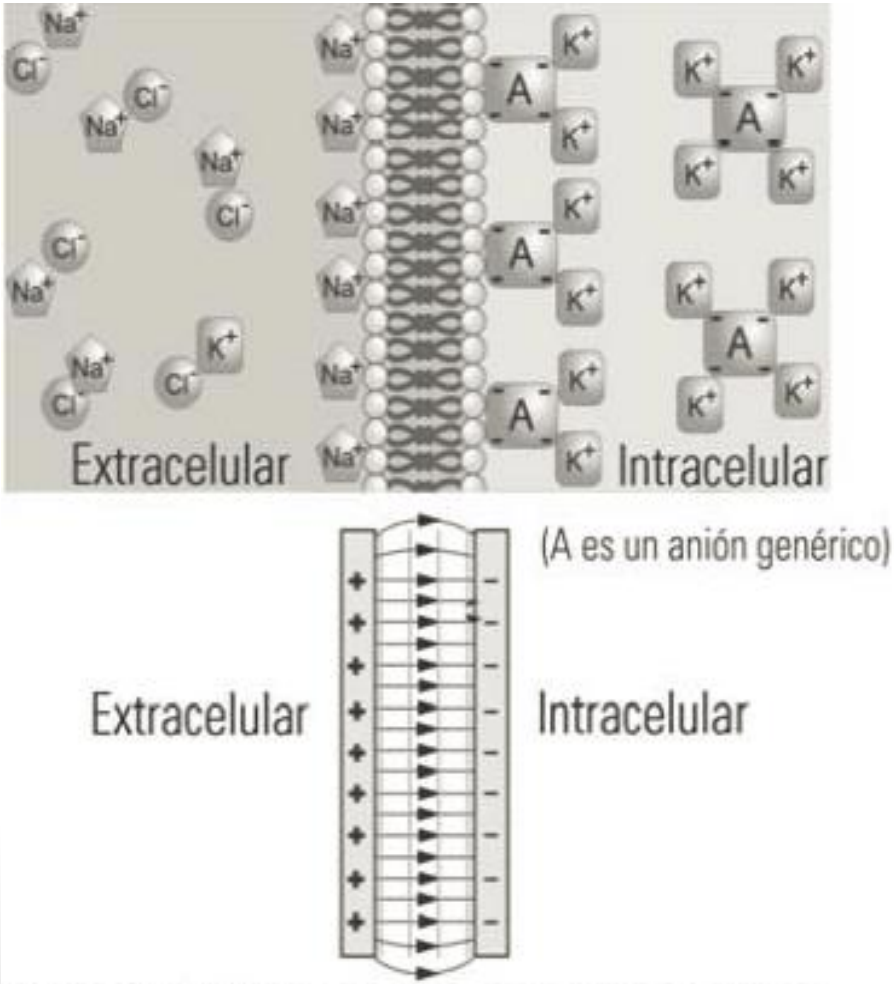
Como ejemplo, si $r_a = 9.5$ cm y $r_b = 10.5$ cm,

$$C = 4\pi(8.85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}) \frac{(0.095\ \mathrm{m})(0.105\ \mathrm{m})}{0.010\ \mathrm{m}}$$

$$= 1.1 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 110\ \mathrm{pF}$$

Ejemplo: Membrana celular

$$\Delta V = 80\frac{mJ}{C} = 80mV$$



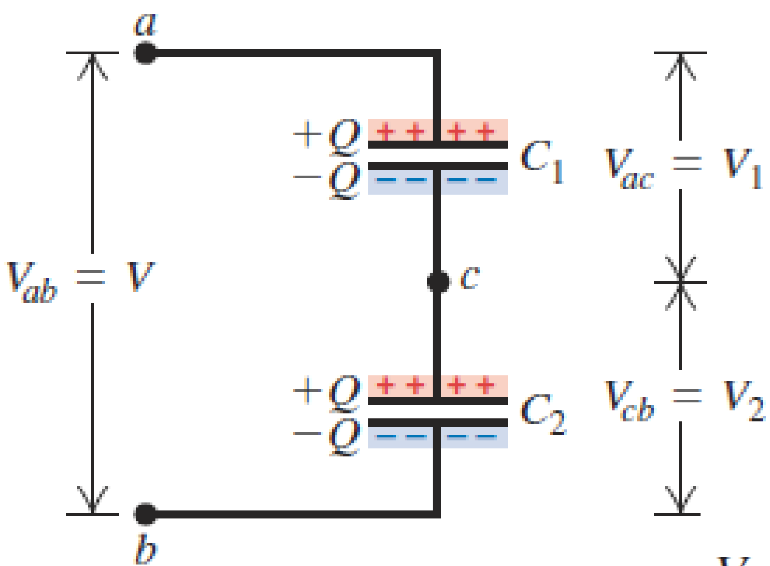
Campo eléctrico en una membrana celular

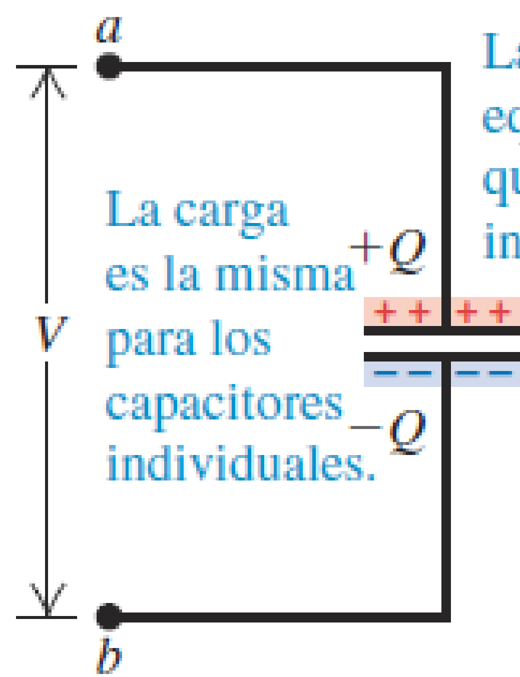
Ejemplo: Atmósfera

Capacitores en serie:

Capacitores en serie:

- Los capacitores tienen la misma carga Q.
- Sus diferencias de potencial se suman: $V_{ac} + V_{cb} = V_{ab}$.





La capacitancia equivalente es menor que las capacitancias individuales:

$$C_{eq} = \frac{Q}{V}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

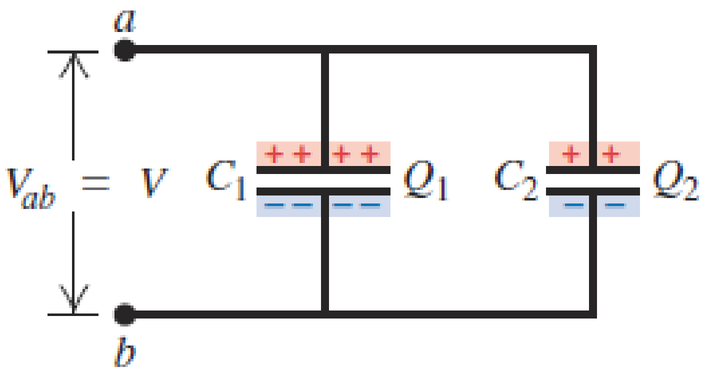
$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

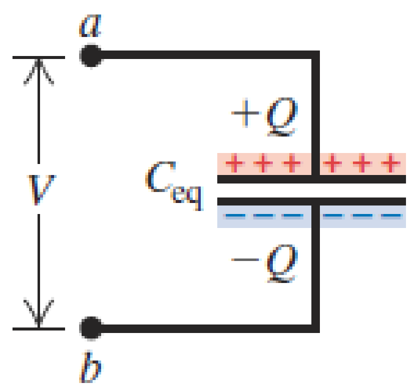
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad \text{(capacitores en serie)}$$

Capacitores en paralelo:

Capacitores en paralelo:
- Los capacitores tienen el mismo potencial V.
- La carga en cada capacitor depende de su capacitancia: $Q_1 = C_1V$, $Q_2 = C_2V$.





La carga es la suma de las cargas individuales: $Q = Q_1 + Q_2$.

Capacitancia equivalente: $C_{eq} = C_1 + C_2$.

$$Q_1 = C_1V \quad \text{y} \quad Q_2 = C_2V$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

$$\boxed{C_{eq} = \frac{Q}{V} = C_1 + C_2}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots \qquad \text{(capacitores en paralelo)}$$

Energía almacenada en un capacitor

Supongamos un proceso de carga de un capacitor donde *q* y *v* son la carga y diferencia de potencial en un estado intermedio. Entonces, *v = q/C*.
En este estado el trabajo requerido *dW* para transferir un elemento de carga *dq* adicional es

$$dW = -\int_{\infty}^{0} \vec{F}_e . d\vec{l} = -dq\int_{\infty}^{0} \vec{E}.d\vec{l} = dq\int_{\infty}^{0} \vec{\nabla} V.d\vec{l} = dq\int_{0}^{v} dV = dqv$$

$$dW = v\,dq = \frac{q\,dq}{C}$$

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C} \quad \text{(trabajo para cargar el capacitor)}$$

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad \text{(energía potencial almacenada en un capacitor)}$$

donde definimos como *U = 0* a la energía potencial de un capacitor descargado.

Energía del campo eléctrico

Podemos pensar a la energía como si estuviera almacenada *en el campo eléctrico* dentro del capacitor.
La densidad de energía *u* es la energía por unidad de volumen .
Pensemos un capacitor de placas paralelas de volumen *Ad*

$$u = \text{Densidad de energía} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad}$$

$$C = \epsilon_0 A/d \qquad V = Ed$$

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad \text{(densidad de energía eléctrica en vacío)}$$

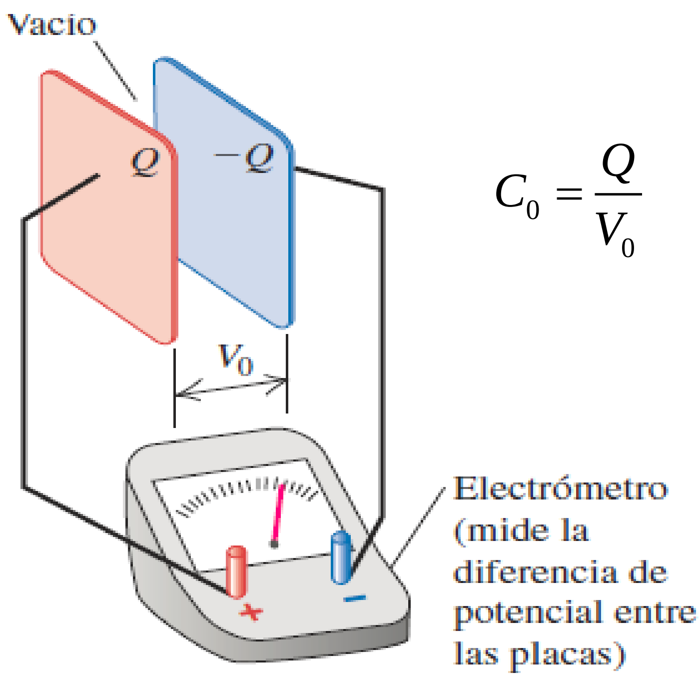
Válida para cualquier capacitor con vacío y por ello *para cualquier configuración de campo eléctrico en el vacío.*

La energía del campo eléctrico es energía potencial eléctrica.

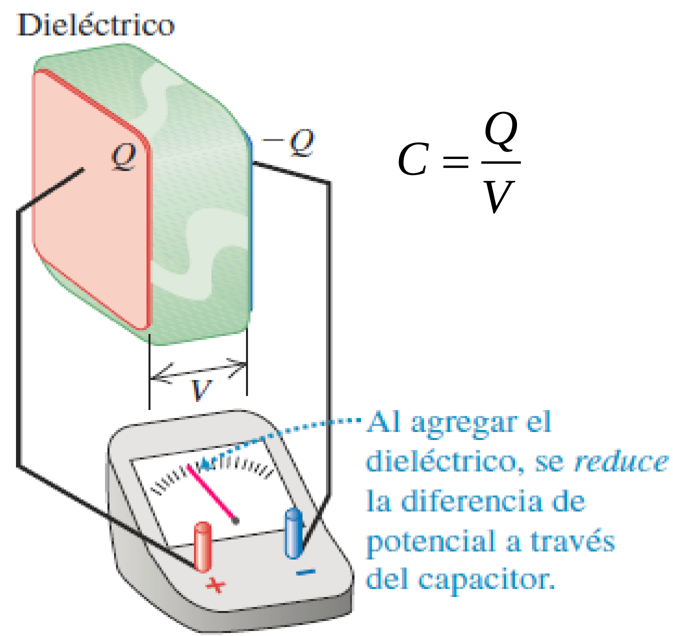
Dieléctricos

La colocación de un dieléctrico entre las placas tiene tres funciones:

1) resuelve el problema mecánico de mantener dos hojas metálicas grandes con una separación muy pequeña sin que hagan contacto.
2) Incrementa al máximo posible la diferencia de potencial entre las placas del capacitor.
3) La capacitancia de un capacitor de dimensiones dadas es mayor cuando entre sus placas hay un material dieléctrico en vez de vacío.



$$C_0 = \frac{Q}{V_0}$$



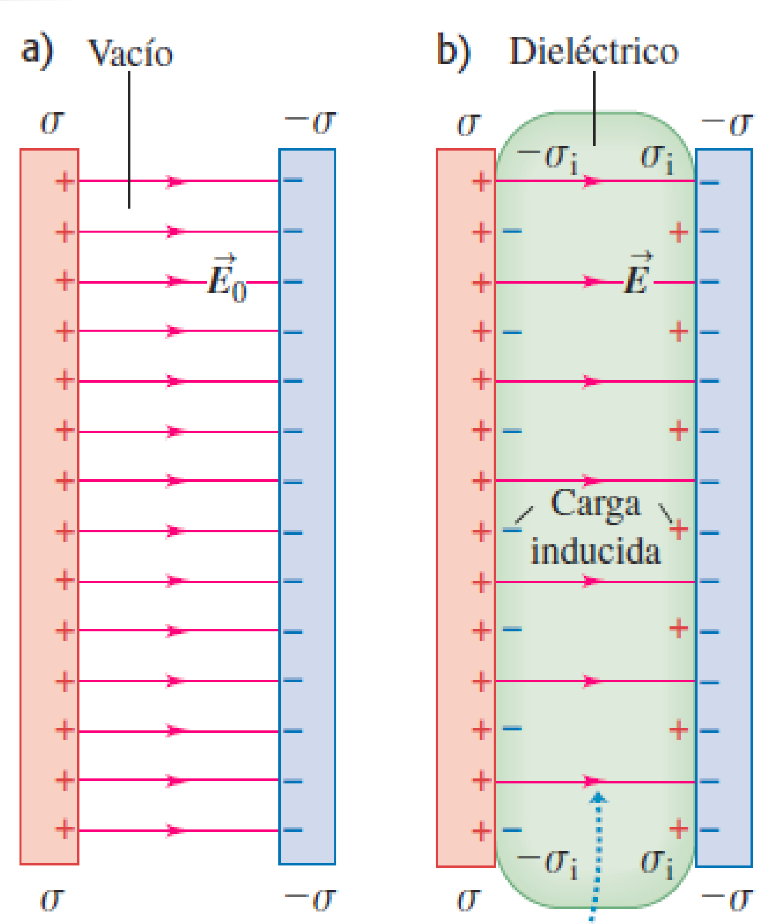
$$C = \frac{Q}{V}$$

$$V = \frac{V_0}{K} \qquad \text{(donde } Q \text{ es una constante)}$$

$$K = \frac{C}{C_0} \qquad \text{(definición de constante dieléctrica)}$$

Material	K	Material	K
Vacío	1	Cloruro de polivinilo	3.18
Aire (a 1 atm)	1.00059	Plexiglás	3.40
Aire (a 100 atm)	1.0548	Vidrio	5–10
Teflón	2.1	Neopreno	6.70
Polietileno	2.25	Germanio	16
Benceno	2.28	Glicerina	42.5
Mica	3–6	Agua	80.4
Mylar	3.1	Titanato de estroncio	310

Carga inducida y polarización



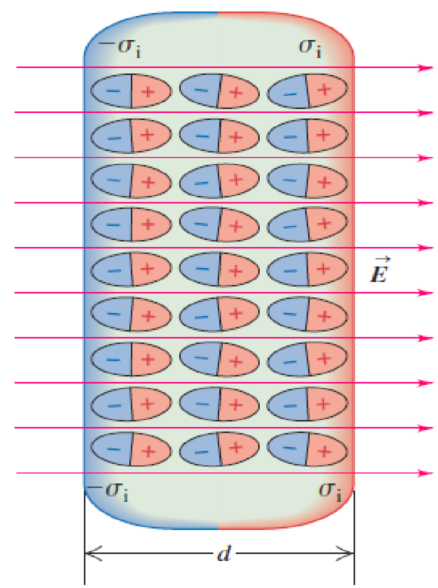
Para una densidad de carga dada σ, las cargas inducidas en las superficies del dieléctrico reducen el campo eléctrico entre las placas.

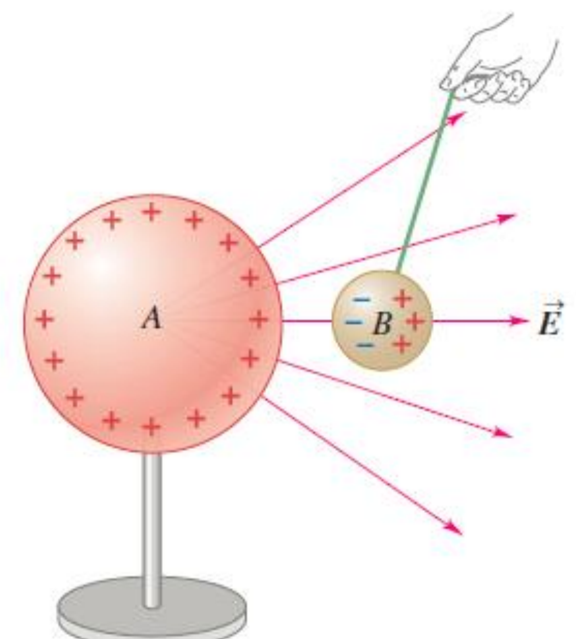
$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma - \sigma_i)\sigma}{\sigma\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

$$\epsilon = K\epsilon_0 \qquad \text{(definición de permitividad)}$$

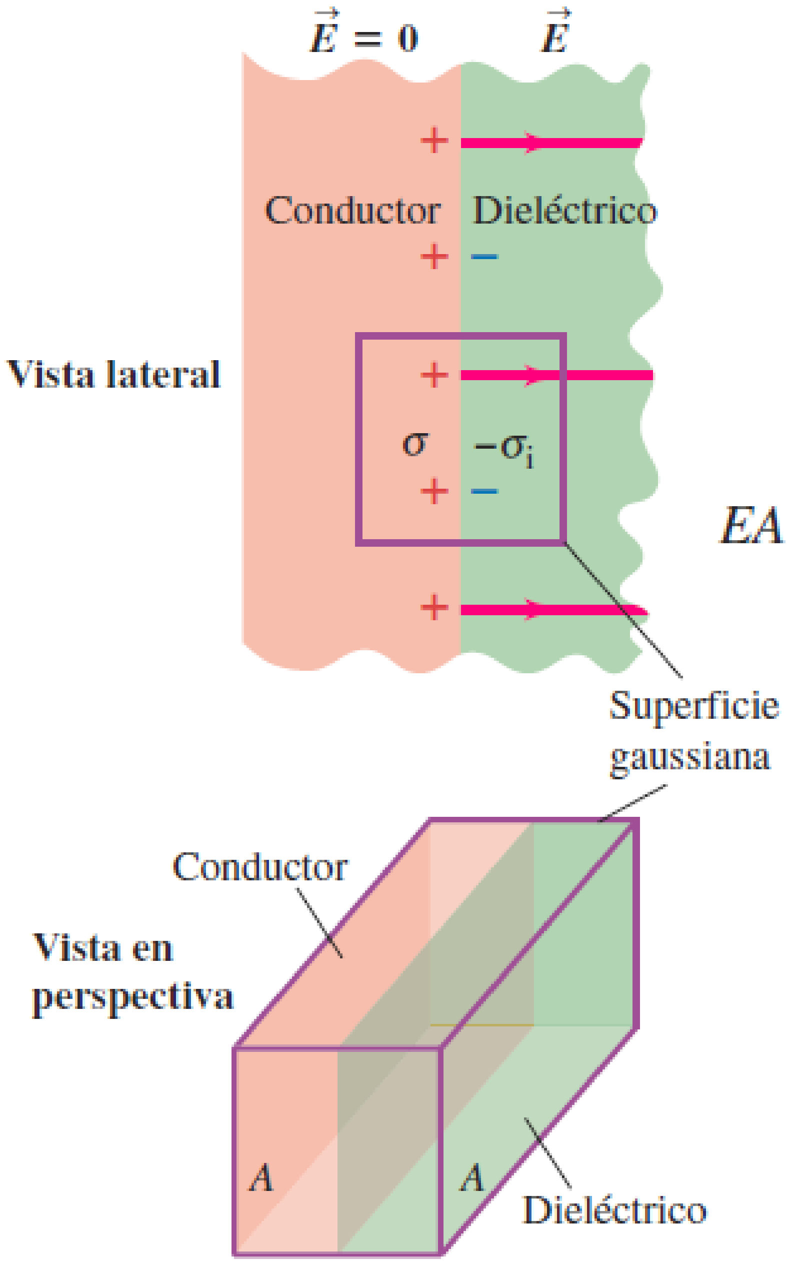
$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \qquad \text{(capacitor de placas paralelas, dieléctrico entre las placas)}$$

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \qquad \text{(densidad de energía eléctrica en un dieléctrico)}$$





La ley de Gauss en los dieléctricos



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{enc} = (\sigma - \sigma_i)A$$

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} = \frac{(\sigma - \sigma_i)A\sigma}{\sigma\varepsilon_0} = \frac{Q_{enc-libre}}{\varepsilon}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{enc-libre}}{\varepsilon}$$