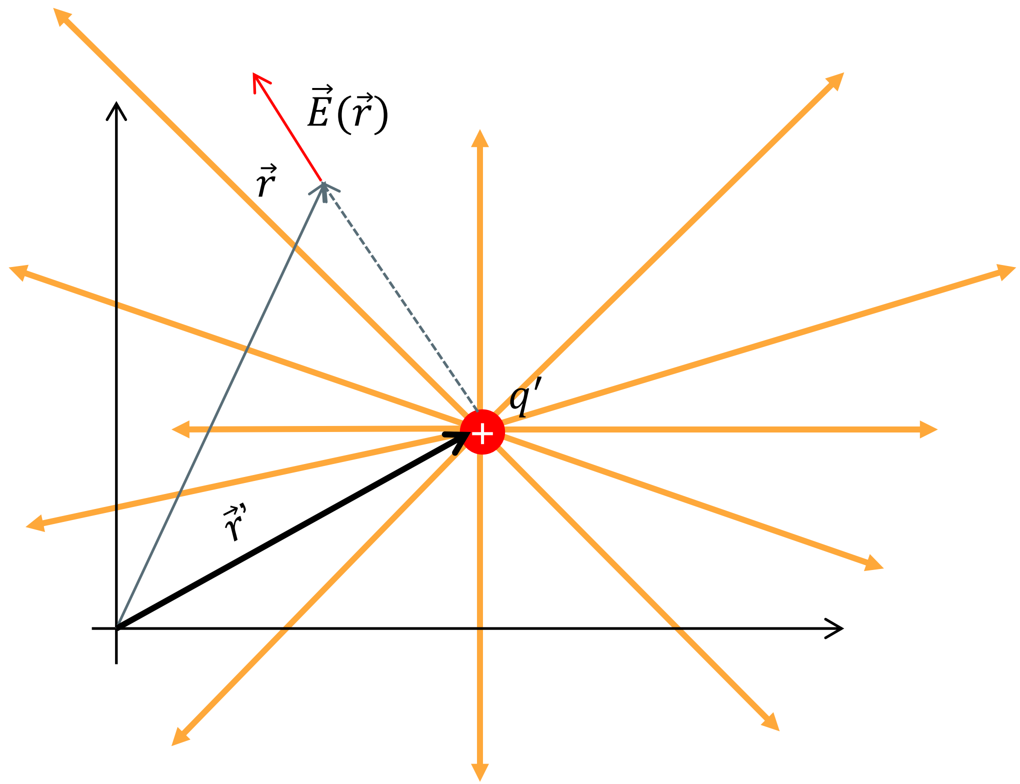
02. Dipolos
Ley de Gauss

Recordemos: carga puntual

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_{q'}\right|^3}\left(\vec{r}-\vec{r}_{q'}\right)$$



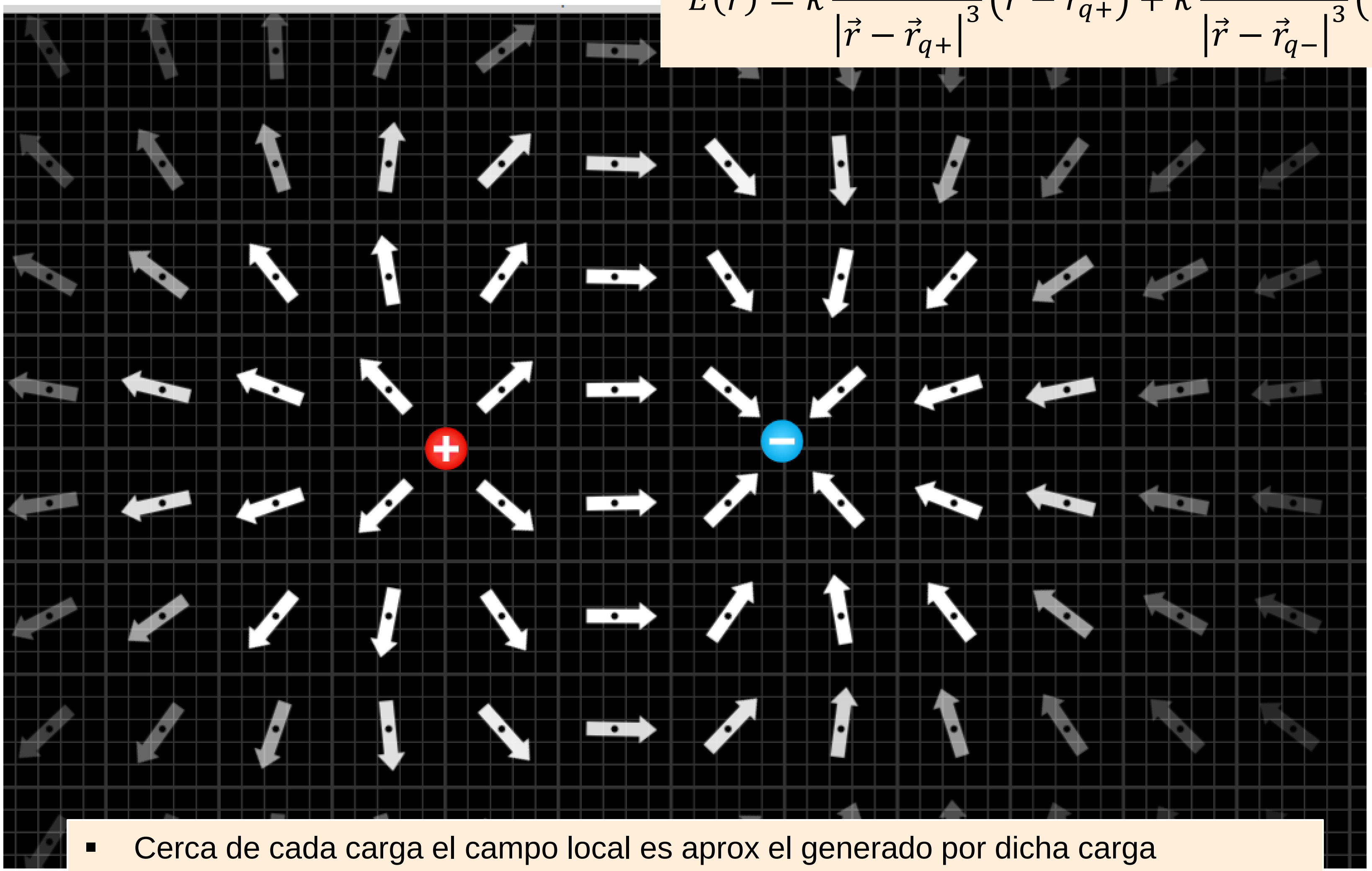
- Si ubicase una carga de prueba *q* en la posición $\vec{r}$, la presencia de la carga *q´* produciría sobre *q* una fuerza de origen Coulombiano

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r})$$

- El campo $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{F}/q$ queda definido para cada punto del espacio. Para representarlo podemos usar lineas de campo…

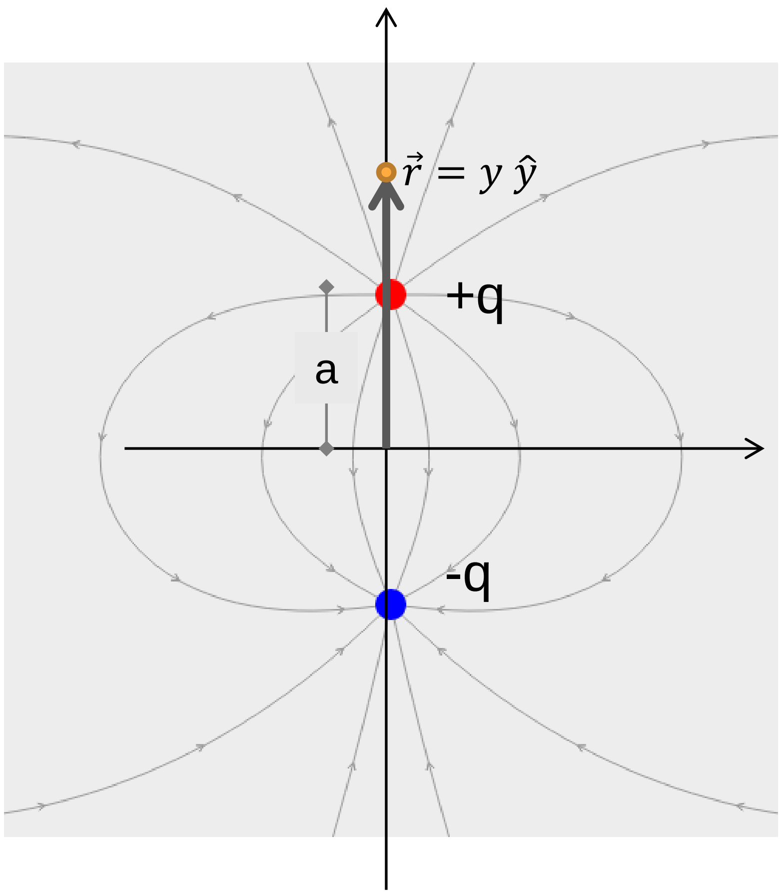
Lineas de campo: 2 cargas

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_{q+}\right|^{3}}\left(\vec{r}-\vec{r}_{q+}\right) + k\frac{q'}{\left|\vec{r}-\vec{r}_{q-}\right|^{3}}\left(\vec{r}-\vec{r}_{q-}\right)$$



- Cerca de cada carga el campo local es aprox el generado por dicha carga
- Las lineas de campo respetan la simetria de las fuentes

2 cargas: campo Electrico (sobre el eje vertical)



Vamos a calcular analíticamente el campo eléctrico a lo largo del eje *y*: $\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y})$

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = k\frac{q}{(y-a)^2}\hat{y} + k\frac{(-q)}{(y+a)^2}\hat{y}$$

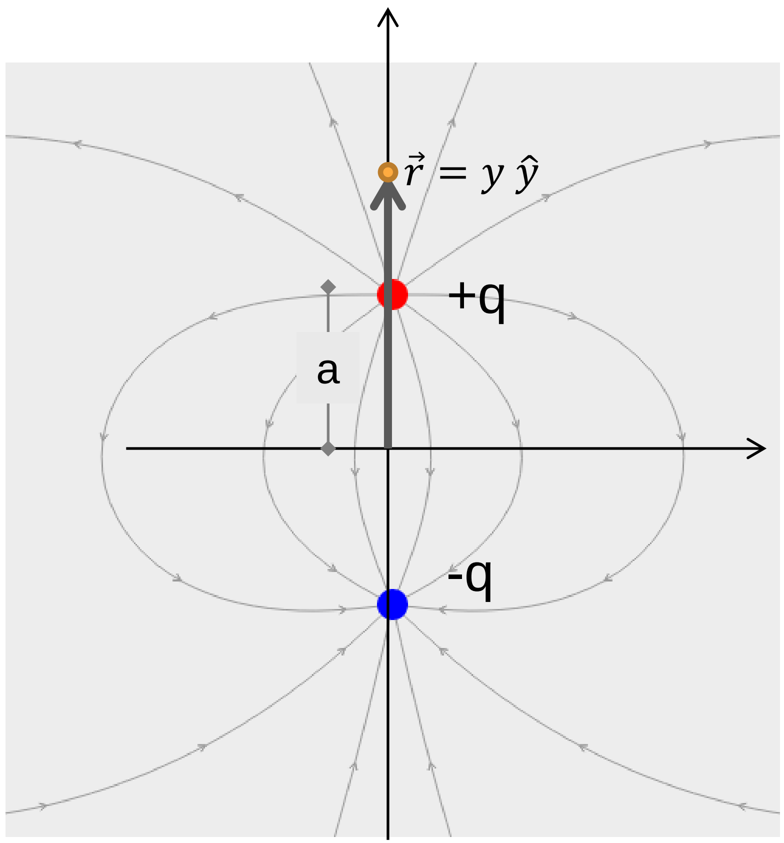
$$= kq\left[\frac{1}{(y-a)^2} - \frac{1}{(y+a)^2}\right]\hat{y}$$

$$= kq\left[\frac{(y+a)^2 - (y-a)^2}{(y-a)^2(y+a)^2}\right]\hat{y}$$

$$= kq\left[\frac{y^2 + 2ya + a^2 - y^2 + 2ya - a^2}{(y-a)(y+a)(y-a)(y+a)}\right]\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = kq\left[\frac{+4ya}{(y^2-a^2)^2}\right]\hat{y}}$$

2 cargas: campo Electrico (sobre el eje vertical)



Vamos a calcular analíticamente el campo eléctrico a lo largo del eje *y*: $\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y})$

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = k\frac{q}{(y-a)^2}\hat{y} + k\frac{(-q)}{(y+a)^2}\hat{y}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = kq\left[\frac{4ya}{(y^2-a^2)^2}\right]\hat{y}}$$

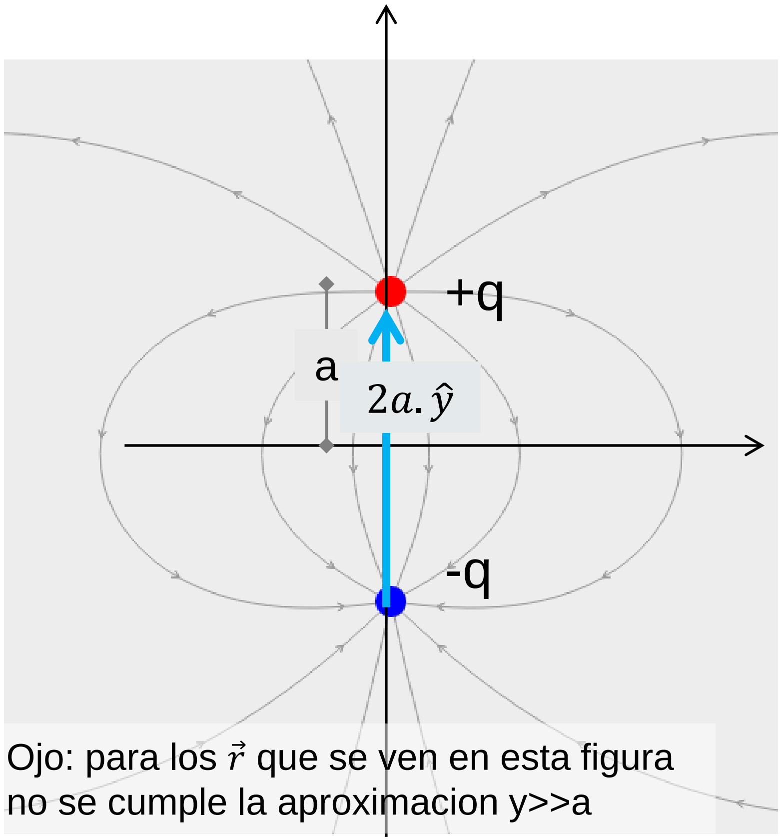
Qué sucede para puntos alejados de las cargas? ***(y>>a)***

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = kq\left[\frac{4ya}{y^4(1-a^2/y^2)^2}\right]\hat{y} \quad = \left[\frac{4a}{y^3\left(1-(\frac{a}{y})^2\right)^2}\right]\hat{y}$$

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) \sim kq\frac{4a}{y^3}\hat{y}$$

$y \gg a$

Dipolo eléctrico



Ojo: para los $\vec{r}$ que se ven en esta figura no se cumple la aproximacion y>>a

Vamos a calcular analíticamente el campo eléctrico a lo largo del eje *y*: $\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y})$

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = k\frac{q}{(y-a)^2}\hat{y} + k\frac{(-q)}{(y+a)^2}\hat{y}$$

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) = kq\left[\frac{4ya}{(y^2-a^2)^2}\right]\hat{y}$$

$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) \sim kq\frac{4a}{y^3}\hat{y} \quad = 2k\frac{q2a\hat{y}}{y^3} \quad = 2k\frac{\vec{p}}{y^3}$$

$$y \gg a$$

distancia entre cargas

$$\vec{p} = q2a.\hat{y}$$

Como vector va **desde la carga – a la +**

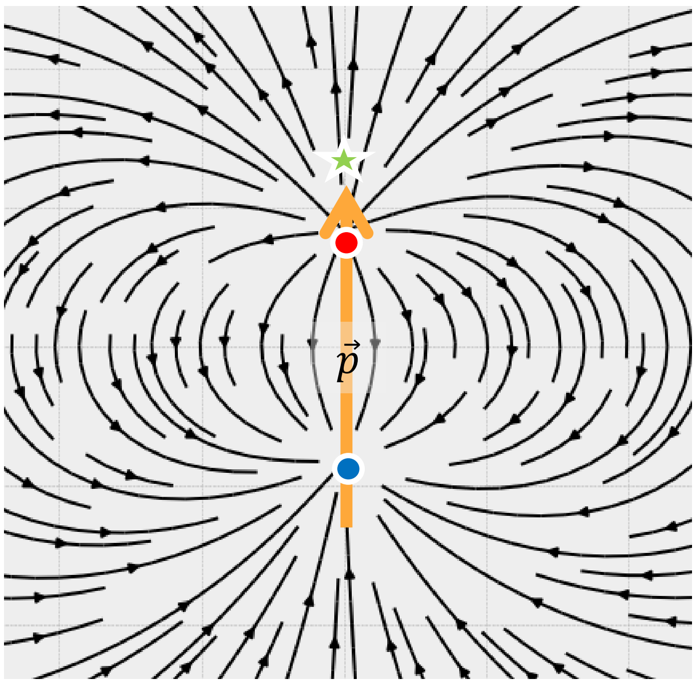
Entonces: **lejos** de las cargas el campo queda muy simple y se puede aproximar como

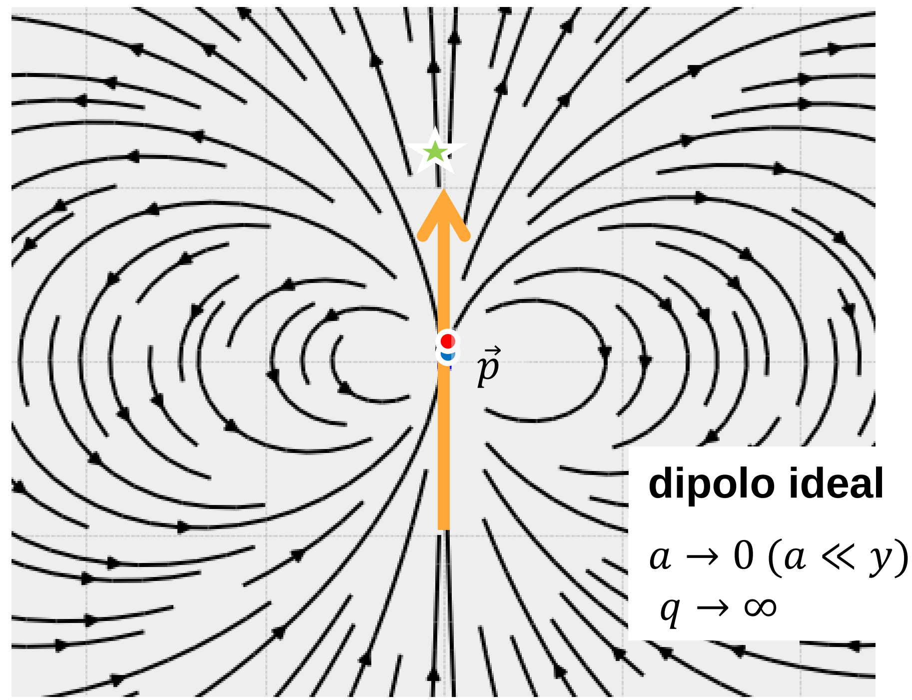
$$\longrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) \sim 2k\frac{\vec{p}}{y^3}$$

$\vec{p}$ se denomina **vector dipolar electrico** de la distribución

Dipolo eléctrico: cómo funciona el limite a->0

Aproximacion dipolar: $\vec{E}(\vec{r}=y\hat{y}) \sim kq\frac{4a}{y^3}\hat{y} = 2k\frac{\vec{p}}{y^3}$ $\qquad \vec{p} = 2a.q\hat{y}$

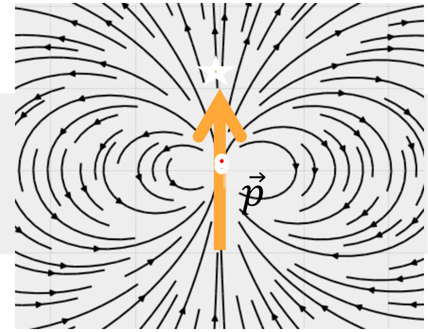




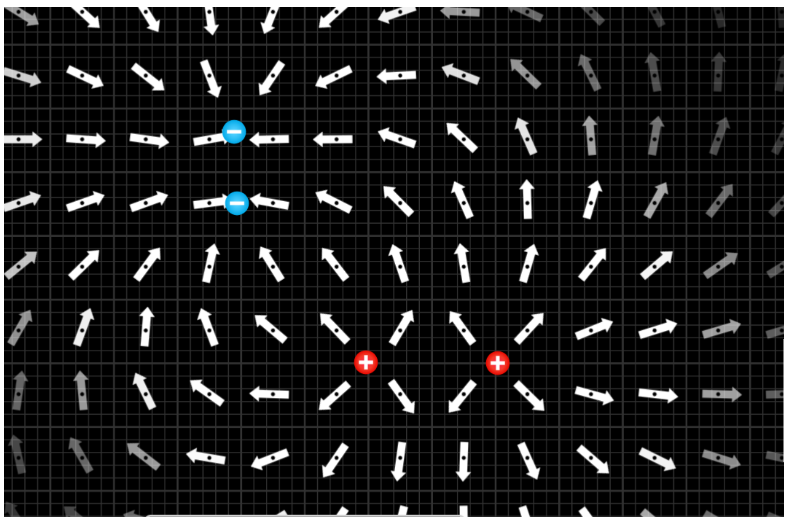
En este caso, la **aproximacion dipolar** **no es buena** para los puntos de la region (si podria serlo para puntos mucho mas alejados)

En este caso, **la aproximacion dipolar** **es buena** para todo punto de la region que mostramos…puedo considerar que tengo un **dipolo ideal**

Dipolo eléctrico … porque es util?



$$\vec{E}(\vec{r} = y\hat{y}) \sim kq\frac{4a}{y^3}\hat{y} = 2k\frac{\vec{p}}{y^3} \qquad \vec{p} = 2a.q\hat{y}$$

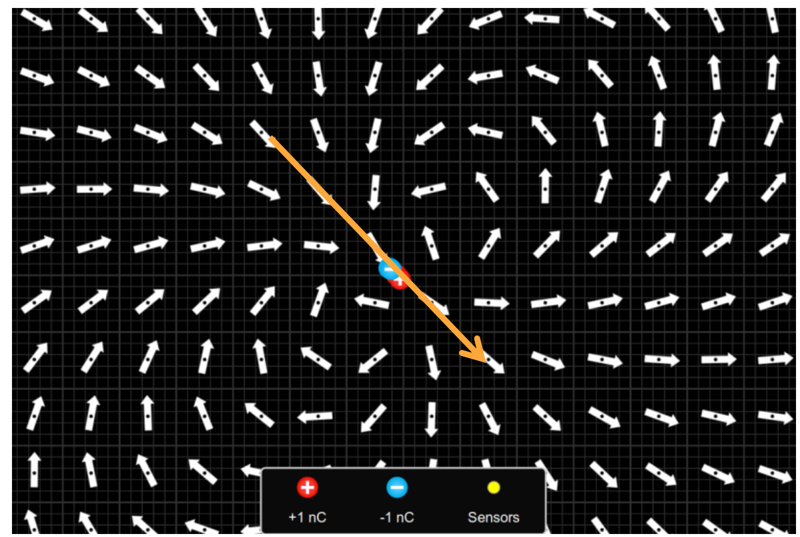


Para puntos muy muy lejanos

$a \to 0 \; (a \ll y)$

$q \to \infty$

Zoom-out



$$\vec{p} = Q\,\vec{d}_{-+}$$

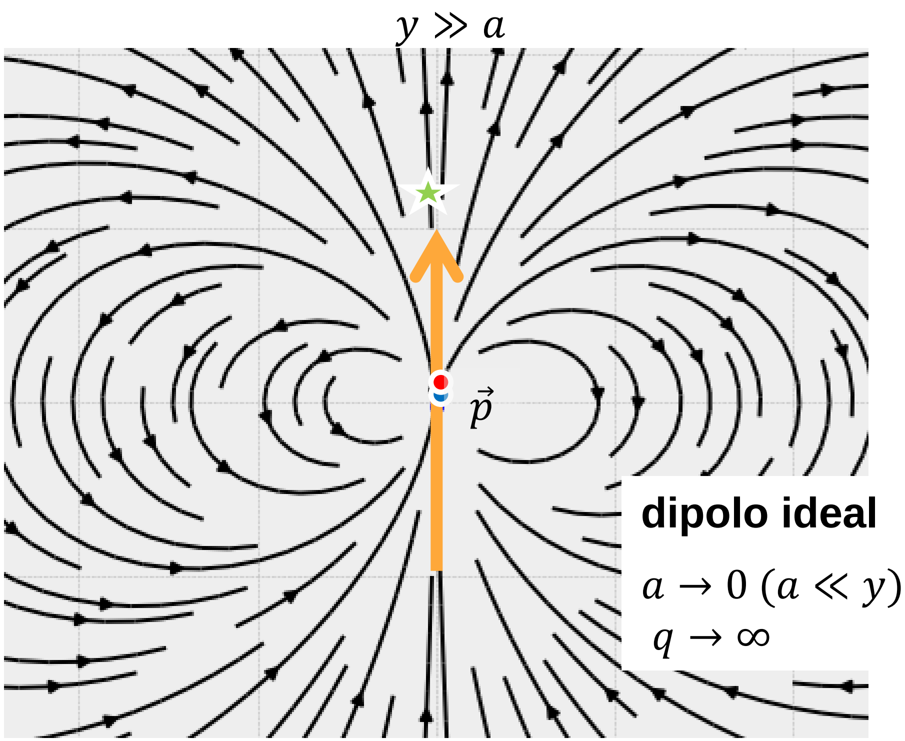
Carga del dipolo ($Q = 2q$)

Distancia entre centro de cargas positivo y negativo

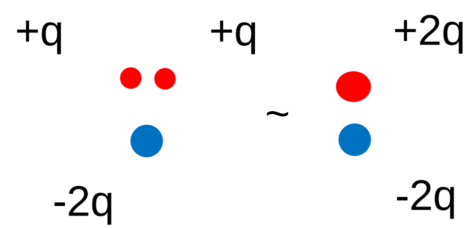
https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_en.html

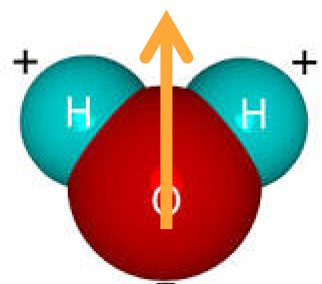
Dipolo eléctrico … porque es util?

Dipolo electrico ideal: 2 cargas {+q,-q} separadas infinitesimalmente para la cual 2*aq es un numero finito (a pesar que a<<1) (Notar que el dipolo electrico tiene carga neta NULA)



Cómo sería el campo electrico producido por la siguiente distribución de cargas, en regiones alejadas de las cargas?





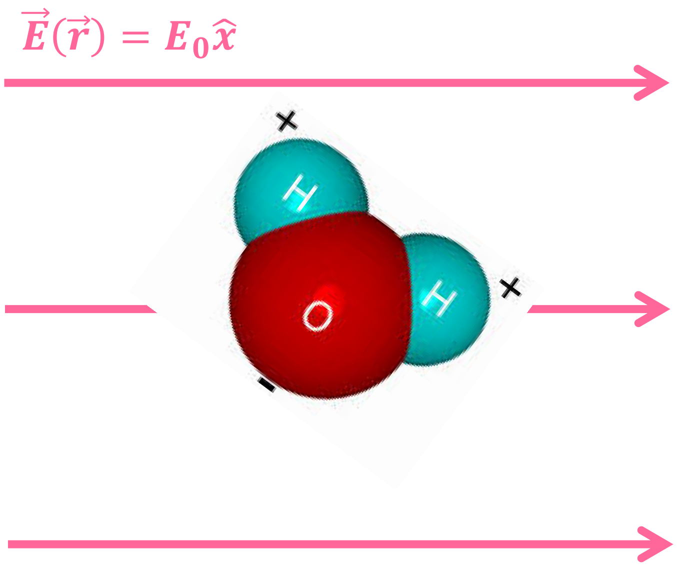
$$Q = 0$$

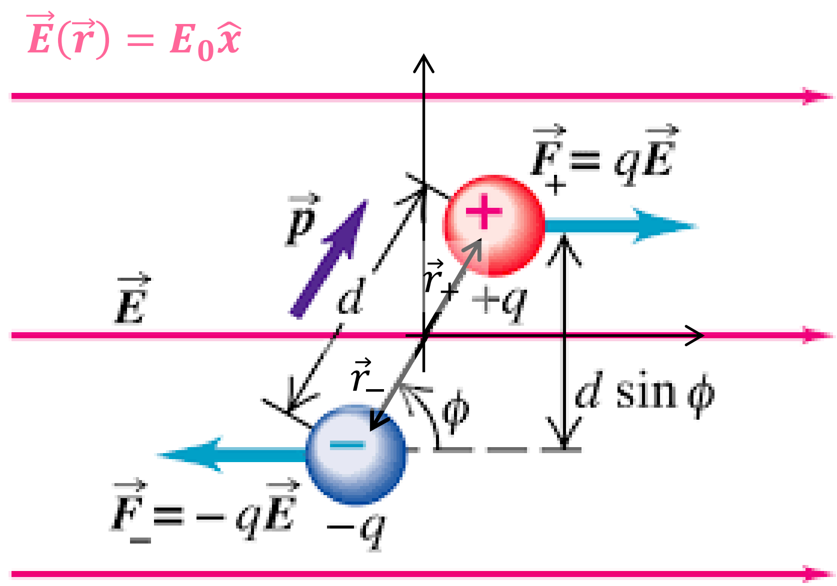
$$\vec{p} = 2a\hat{y}\ q$$

Molecula polar: posee un momento dipolar permanente

Dipolo inmerso en campo externo constante

Que fuerza experimenta una molecula dipolar en presencia de un campo externo?





Dipolo inmerso en campo externo constante

Sobre el dipolo

$$\vec{F} = \vec{F}_{+} + \vec{F}_{-} = 0$$

Como la fuerza neta sobre el dipolo es nula, su centro de masa no se acelera

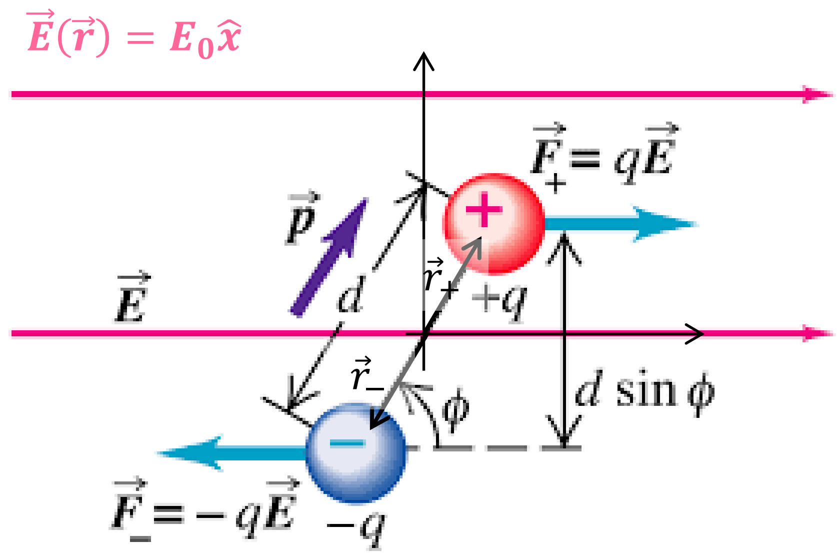
Las fuerzas están aplicadas en distintos puntos por lo que aparece un *torque* respecto al C.M

$$\vec{\tau}_{+} = \vec{r}_{+} \times \vec{F}_{+} = \vec{r}_{+} \times q\vec{E} = \frac{2q\vec{r}_{+} \times \vec{E}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\tau}_{+} &= \frac{\vec{p} \times \vec{E}}{2} \\ \vec{\tau}_{-} &= \frac{\vec{p} \times \vec{E}}{2} \end{aligned}\right\}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_{+} + \vec{\tau}_{-} = \vec{p} \times \vec{E}$$

$$\tau = p \times E \sin\phi$$



Notar que el torque tiende a **alinear** al dipolo con el campo

Dipolo inmerso en campo externo **no-homogeneo**

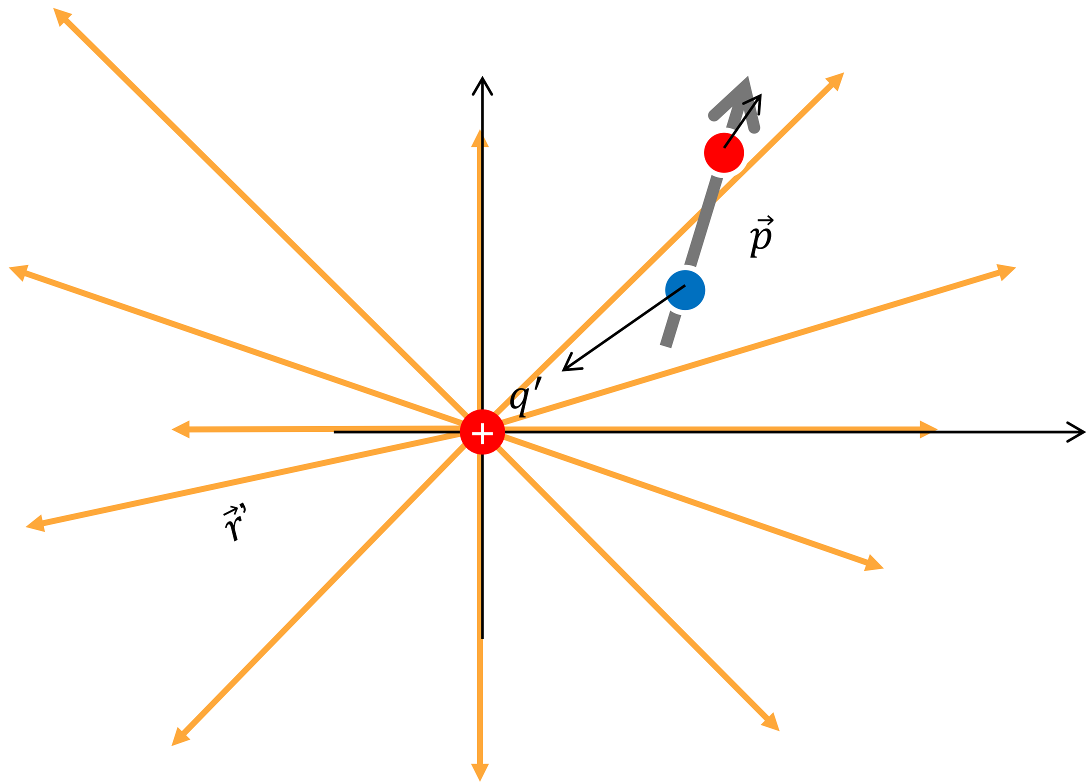
Sobre el dipolo

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- \neq 0$$

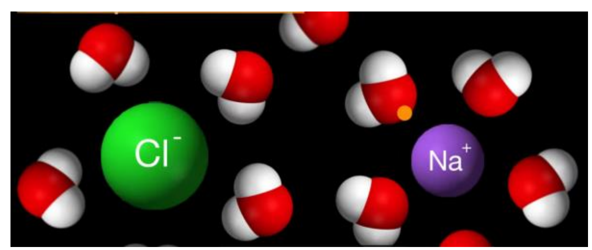
Aparece una fuerza neta. El centro de masa del dipolo se acelera

Aparece un *torque* respecto al C.M

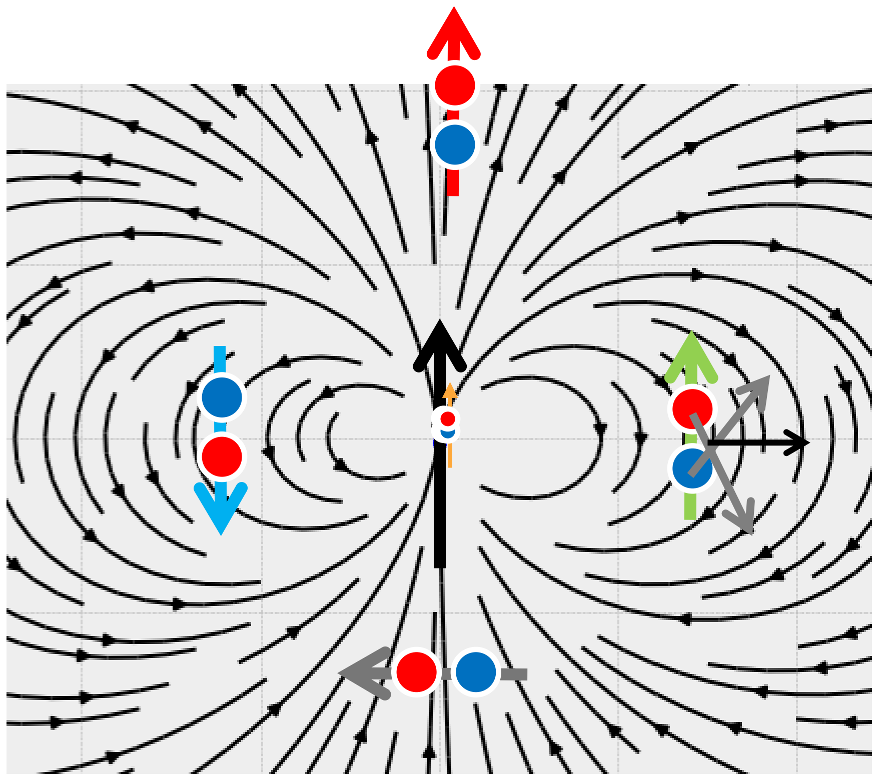
$$\left.\begin{aligned} \vec{\tau}_+ &= \frac{\vec{p} \times \vec{E}_+}{2} \\ \vec{\tau}_- &= \frac{\vec{p} \times \vec{E}_-}{2} \end{aligned}\right\} \quad \vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_-$$



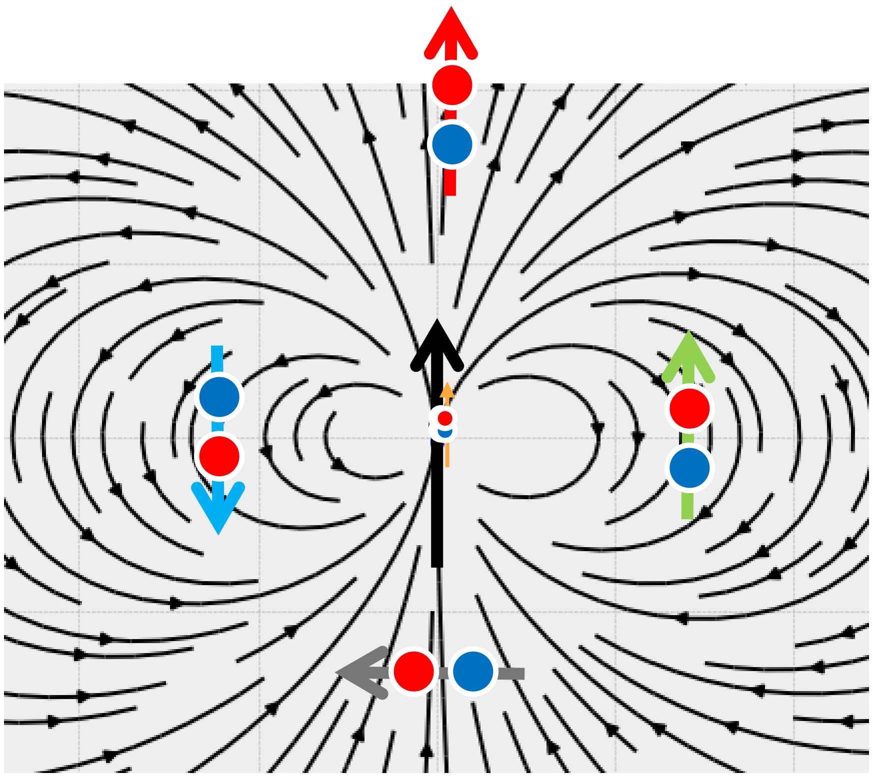
Ejemplo de interacción carga-dipolo



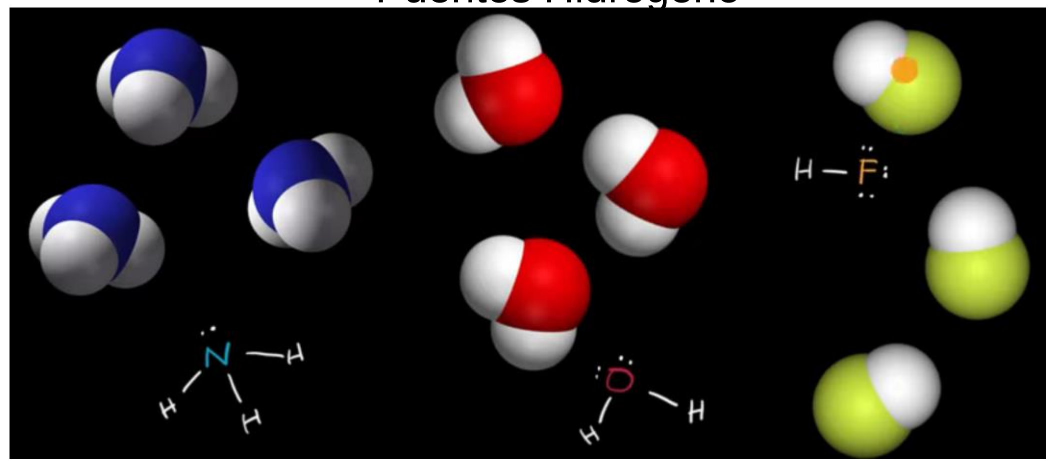
Interacciones dipolo-dipolo



Interacciones dipolo-dipolo



Puentes Hidrogeno

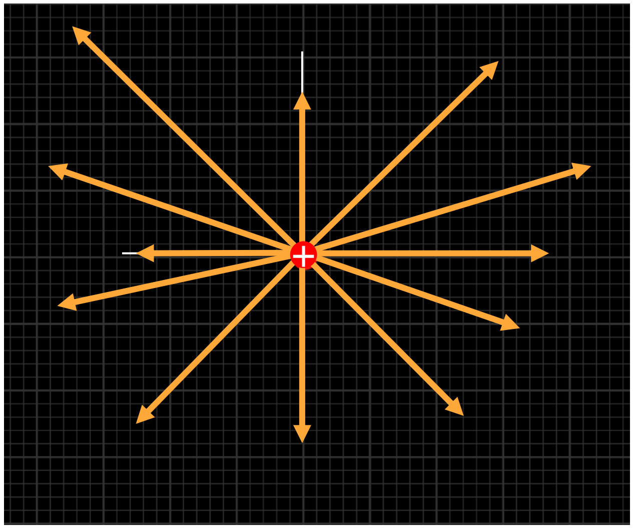


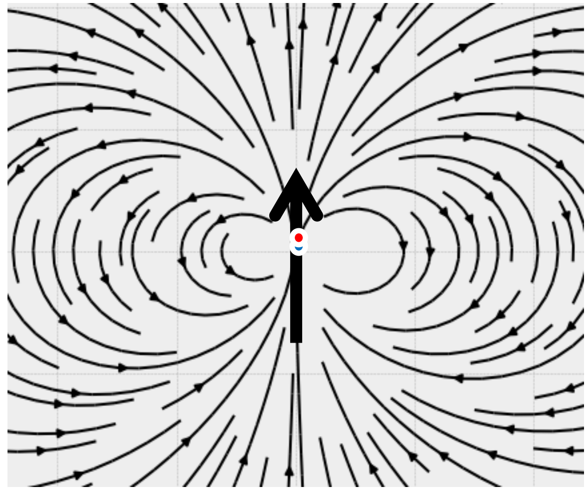
Estamos en el horno

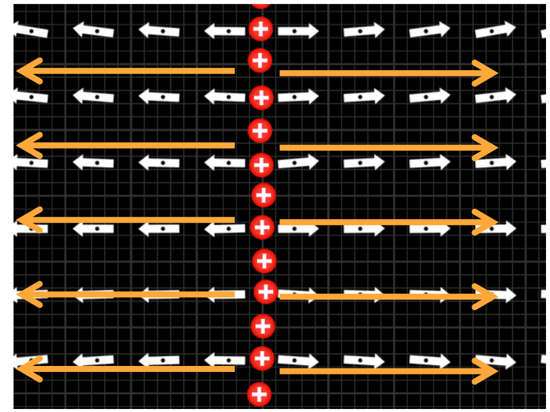
https://youtu.be/kp33ZprO0Ck?t=104

Propiedades de líneas

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} k \frac{q_i'}{\left|\vec{r} - \vec{r}_{q_i'}\right|^3} \left(\vec{r} - \vec{r}_{q_i'}\right)$$





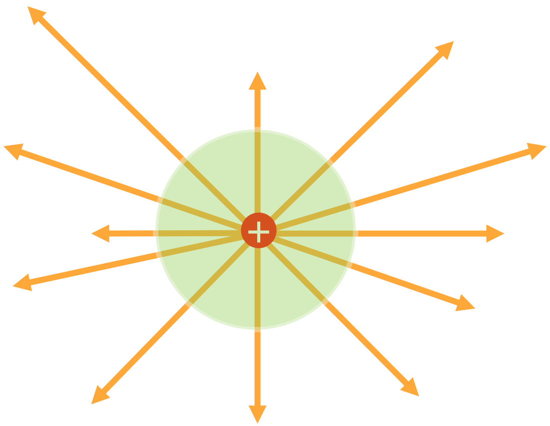


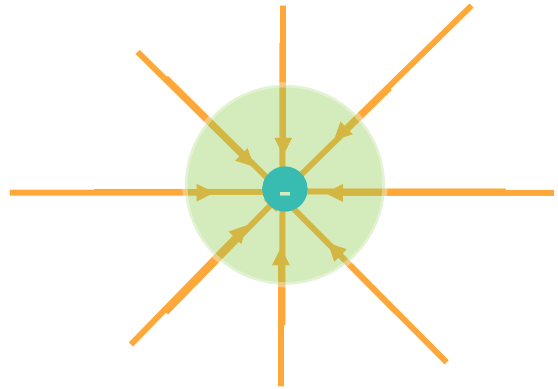
Reglas *dibujísticas* reflejan propiedades del campo $\vec{E}(\vec{r})$ (i.e. de la Ley de Coulomb)

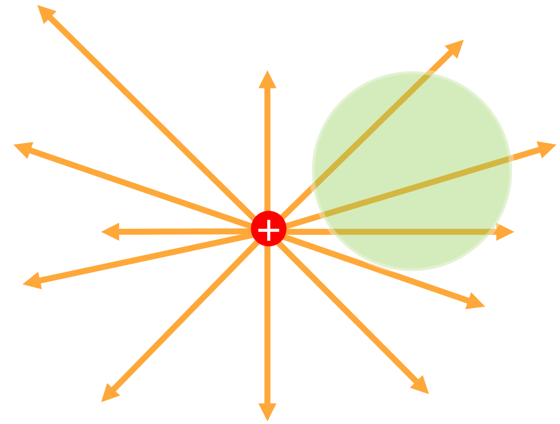
- Líneas de campo *nacen* o *mueren* en cargas positivas o negativas respectivamente
- Líneas de campo pueden *nacer* o *morir* en el infinito
- Líneas de campo de cargas puntuales *no se doblan*

Hay más reglas que reflejan propiedades del campo $\vec{E}(\vec{r})$ que estaban *escondidas* en la Ley de Coulomb…vamos a verlas ahora

Campo eléctrico y superficies cerradas







El nro de líneas que **salen** al exterior es mayor que cero. Hay *flujo* hacia el exterior (flujo positivo)

$$q_{encerrada} > 0$$

El nro de líneas que **entran** es mayor que cero. Hay *flujo* hacia el interior (flujo negativo)

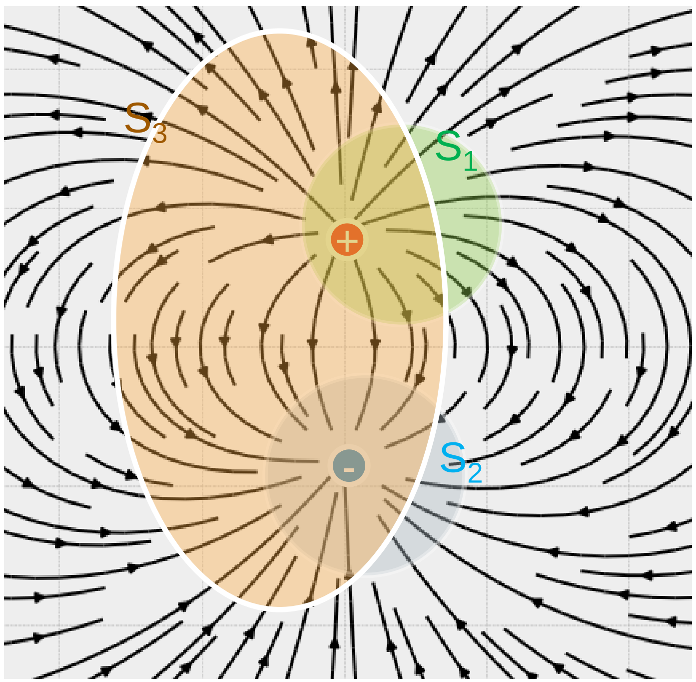
$$q_{encerrada} < 0$$

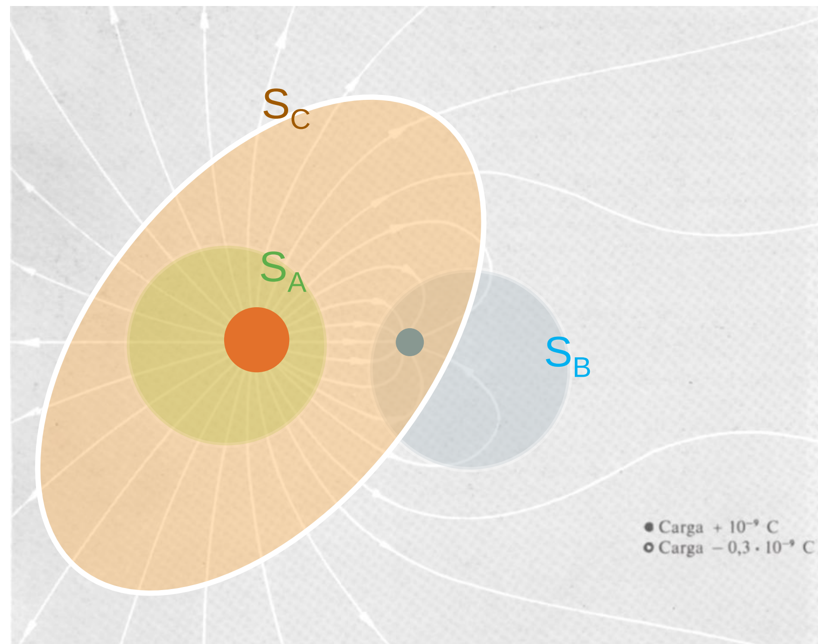
El nro de líneas que **entran** es igual al numero de lineas que salen. No hay flujo neto.

$$q_{encerrada} = 0$$

Existe una relación entre la **carga encerrada** por una superficie cerrada y el **flujo del campo electrico** que la atraviesa

Campo eléctrico y superficies cerradas



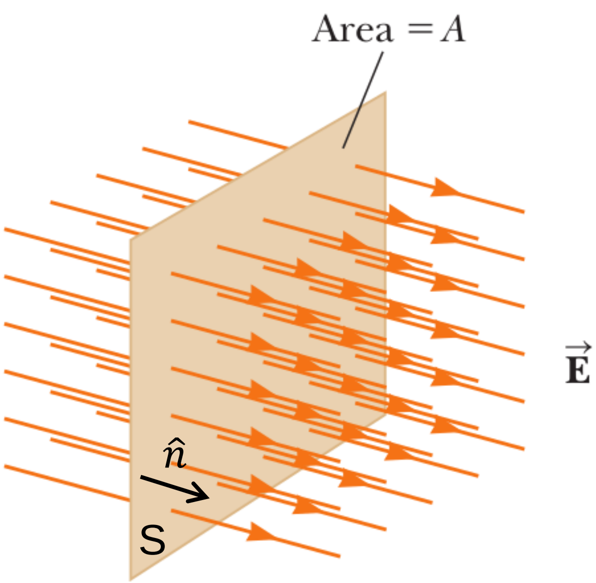


Existe una relación entre la **carga encerrada** por una superficie cerrada y el **flujo del campo electrico** que la atraviesa

Ley de Gauss

Flujo del campo eléctrico

Supongamos un $\vec{E}(\vec{r})$ constante que atraviesa perpendiculamente una superficie S



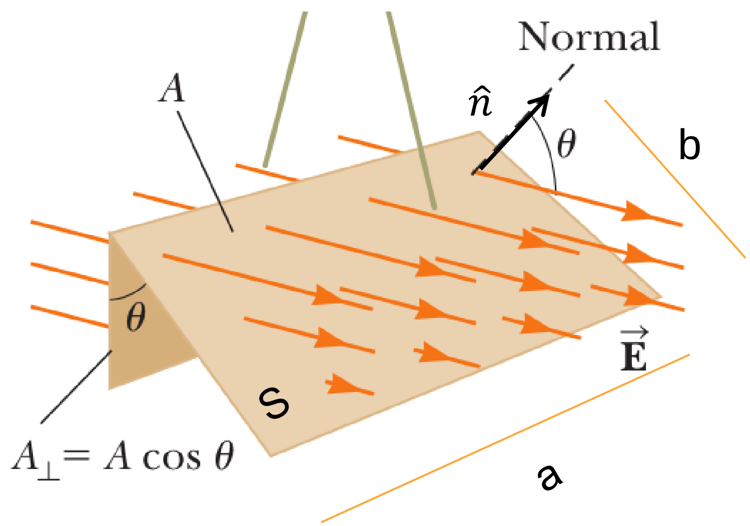
$\vec{E}$ es paralelo a $\hat{n}$, el versor normal de S
E es constante sobre todo punto de S

El flujo se define como $\boxed{\phi = E.A}$

Supongamos un $\vec{E}(\vec{r})$ constante pero que **no es perpendicular** a S

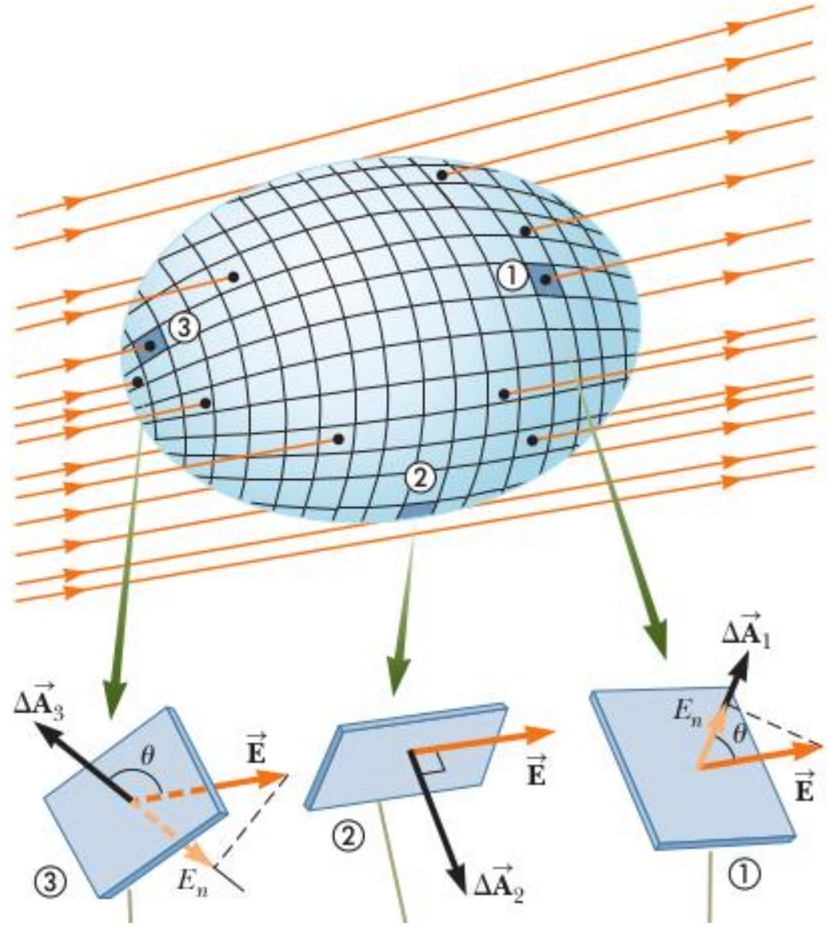
El área *efectiva* es $A_{\perp} = a\ b\ \cos\theta = A\cos\theta$

$\phi = E.A_{\perp} = E\ A\cos\theta \rightarrow \boxed{\phi = \vec{E}.\underbrace{\hat{n}\ A}_{\vec{S}}}$



Flujo del campo electrico

Que pasa en situaciones más generales?
Si la superficie es de forma arbitraria?
Si $\vec{E}$ no es constante sobre la superficie?



$\delta\phi_i < 0$ $\delta\phi_i = 0$ $\delta\phi_i > 0$

Se divide la superficie a analizar en *baldositas* de área infinitesimal (δS) de manea que:

a) ajusten bien a la superficie de interés
b) El campo sobre cada *baldosita* pueda ser considerado constante

El flujo sobre cada elemento diferencial de superficie resulta:

$$\delta\phi_i = \vec{E}_i.\hat{n}_i.\delta S$$

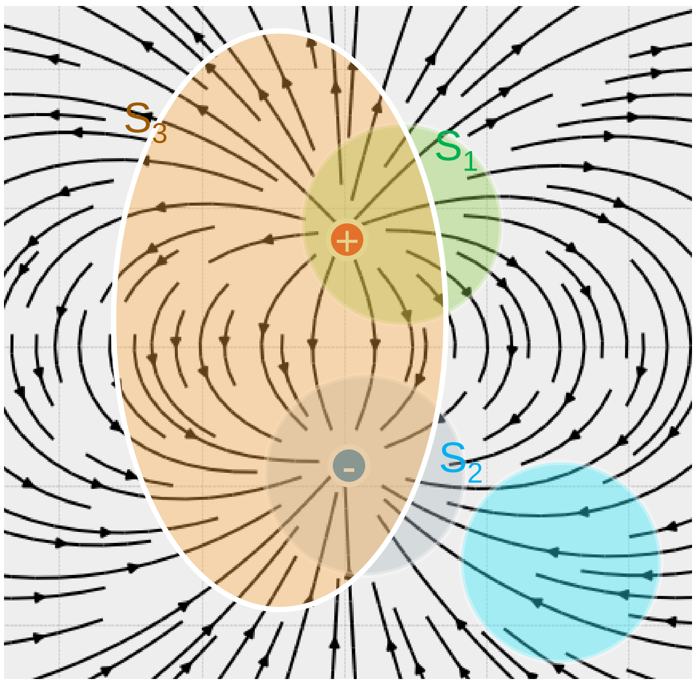
$$\phi = \sum_{i=1}^{N}\delta\phi_i = \sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i.\hat{n}_i.\delta S \xrightarrow[\substack{\delta S \to 0 \\ N \to \infty}]{} \boxed{\phi = \iint \vec{E}.\hat{n}\, dS}$$

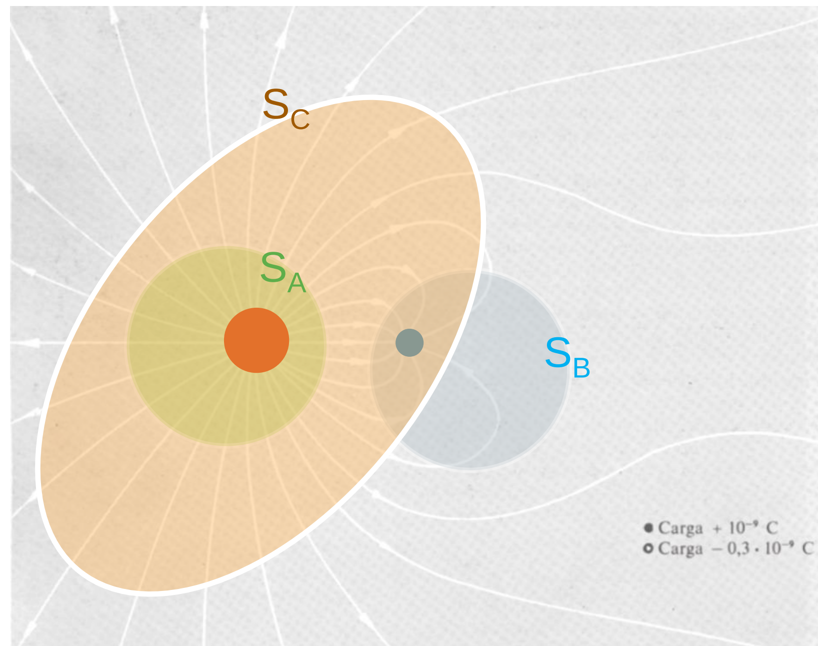
Puedo calcular flujos sobre superficies **abiertas** o **cerradas**

Para superficies cerradas se toma por convención siempre $\hat{n}$ apuntando hacia el exterior

Campo eléctrico y superficies cerradas: **Ley de Gauss**

$$\phi_S = \oiint_S \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, Q_{encerrada}$$





Existe una relación entre la **carga encerrada** por una superficie cerrada y el **flujo del campo electrico** que la atraviesa

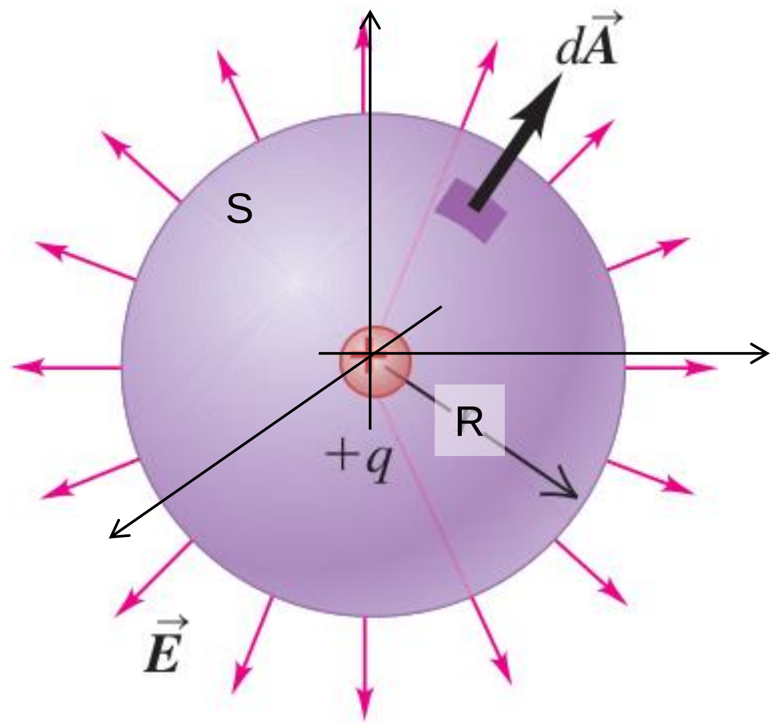
Ley de Gauss

Ley de Gauss, ejemplo 1: carga aislada

$$\phi_S = \oiint_S \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, Q_{encerrada}$$

La ley es valida para cualquier superficie cerrada

Considero como superficie de Gauss a una esfera, porque la simetría simplifica la cuenta que tengo que hacer



$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q'}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

$$\hat{n} = \hat{r}$$

$$\phi_S = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = \oiint k\frac{q'}{|\vec{r}|^2}\hat{r}.\hat{n}\, dS$$

$$\phi_S = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = kq' \oiint \frac{dS}{|\vec{r}|^2} = kq' \oiint \frac{dS}{R^2}$$

$$\phi_S = \frac{kq'}{R^2}\oiint dS = \frac{kq'}{R^2}4\pi R^2 \longrightarrow \boxed{\phi_S = 4\pi k\, q'}$$

Ley de Gauss, ejemplo 1: carga aislada

$$\phi_S = \oiint_S \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, Q_{encerrada}$$

La ley es valida para cualquier superficie cerrada

Considero como superficie de Gauss a una esfera, porque la simetría simplifica la cuenta que tengo que hacer

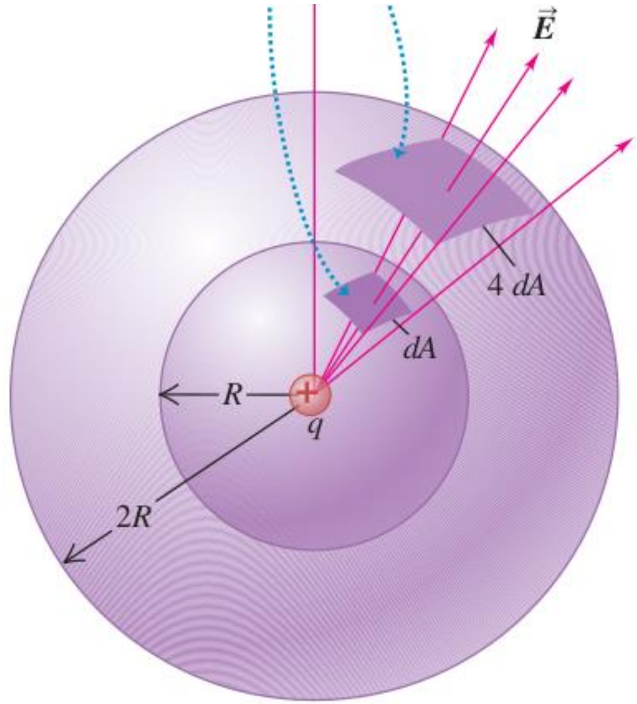
$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q'}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

$$\hat{n} = \hat{r}$$

$$\phi_S = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = \oiint k\frac{q'}{|\vec{r}|^2}\hat{r}.\hat{n}\, dS$$

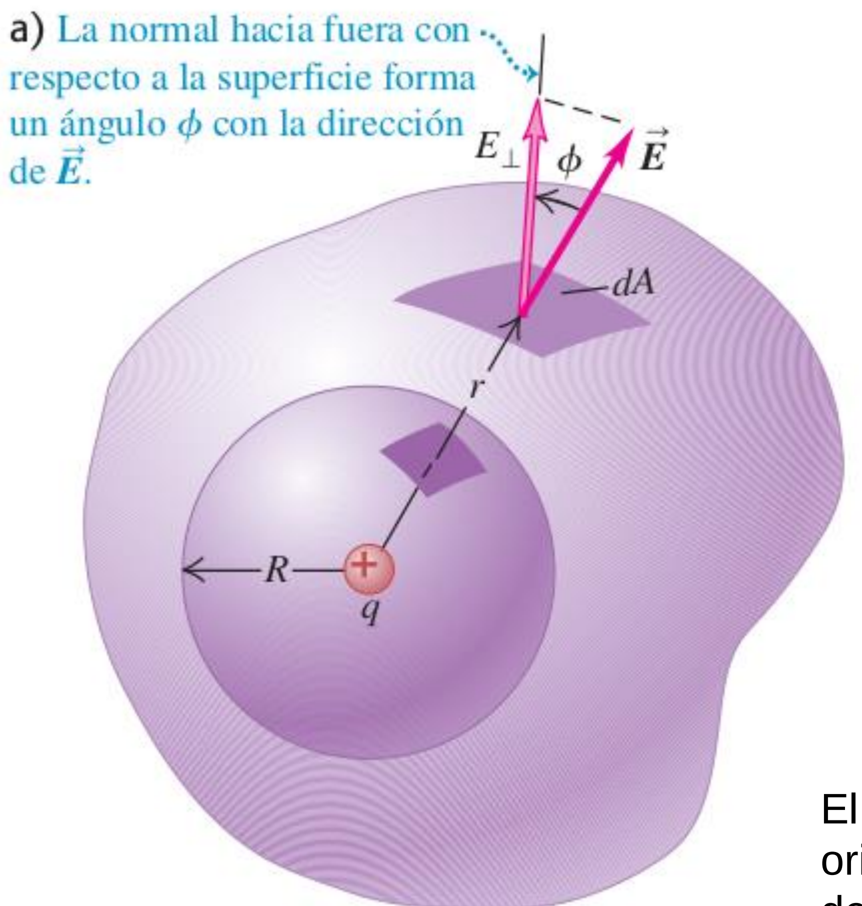
$$\phi_S = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = kq'\oiint \frac{dS}{|\vec{r}|^2} = kq'\oiint \frac{dS}{R^2}$$

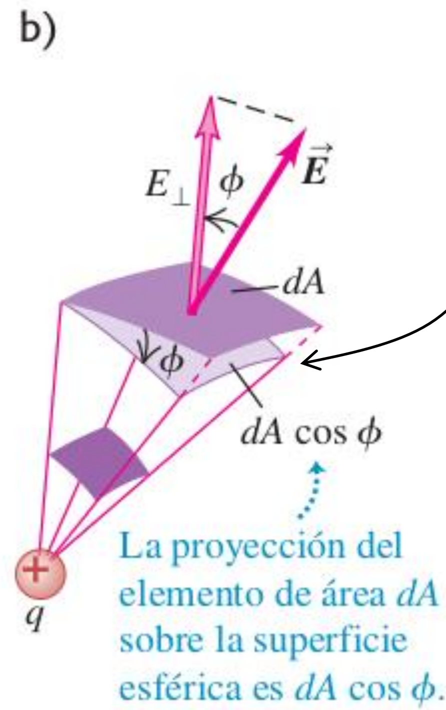
$$\phi_S = \frac{kq'}{R^2}\oiint dS = \frac{kq'}{R^2}4\pi R^2 \longrightarrow \boxed{\phi_S = 4\pi k\, q'}$$



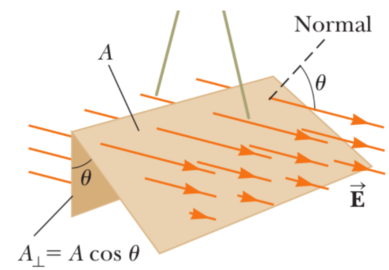
Notar que el flujo es independiente de R
(El área crece como R^2, per la intensidad del campo decrece como $1/R^2$)

De verdad puedo elegir cualquier superficie de Gauss y da lo mismo ?





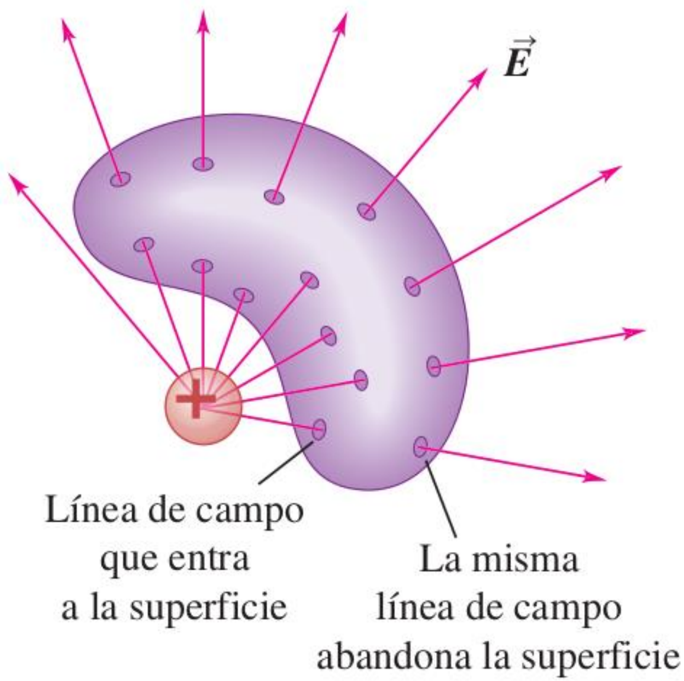
area efectiva para el calculo de flujo



El flujo sobre cada elemento de area de la sup original es igual al flujo sobre el elemento de area de la esfera de radio R=1 asociado.

Y entonces… $\phi_S = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, q'$

De verdad puedo elegir cualquier superficie de Gauss?



$$\phi_S = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = 0$$

Usando Gauss para calcular $\vec{E}$

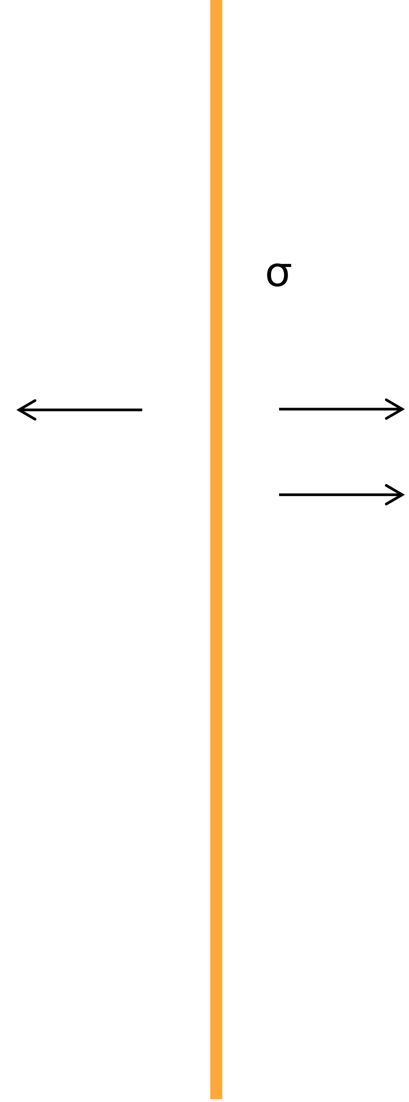
$$\oiint \vec{E}.\hat{n}\,dS = 4\pi k\; q_{encerrada}$$

La ley de Gauss vincula una **integral de superficie** de $\vec{E}$ con la **carga encerrada**

Pero, **en situaciones de muy alta simetría**, es posible encontrar una expresión para $\vec{E}$ a partir dicha ley.

Usemos Gauss para calcular $\vec{E}$ de un plano infinito

Consideremos un plano infinito cargado con densidad superficial de carga σ=cte



Por simetría:

- $\vec{E}$ tiene que ser perpendicular al plano
- $\vec{E}$debe tener sentidos opuestos a ambos lados
- Su intensidad sólo puede depender de la distancia al plano

Entonces…

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(x)\hat{x}$$

$$E(-x) = -E(x)$$

Usemos Gauss para calcular $\vec{E}$ de un plano infinito

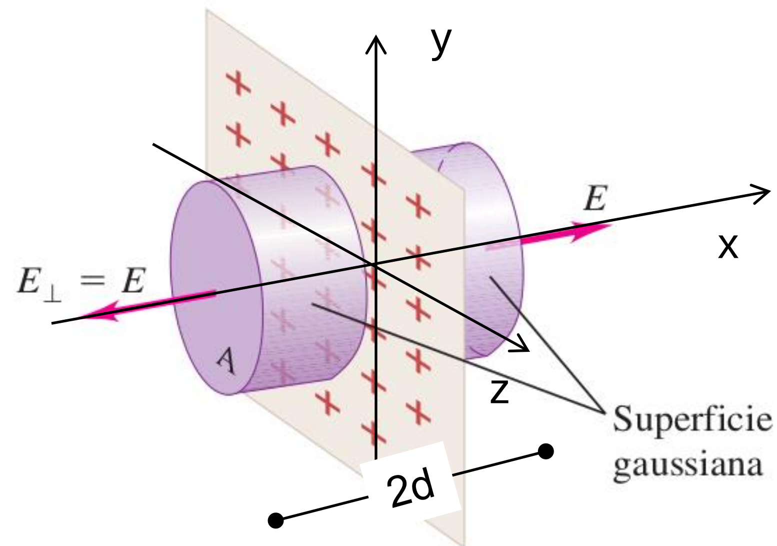
Por consideraciones de simetría…

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(x)\hat{x}$$

?

Elegimos como superficie de Gauss a un cilindro que atraviesa el plano cargado.

$$\phi = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, q_{encerrada}$$



Sabiendo que la ecuación de arriba se tiene que cumplir…podemos decir como es $\vec{E}$?

$$\phi = \phi_{tapa1} + \phi_{tapa2} + \phi_{sup.lateral}$$

$$= \vec{E}_1.\hat{n}_1\, A + \vec{E}_2.\hat{n}_2\, A + \vec{E}_{sup.lat}.\hat{n}_{sup.lat}\, A$$

$$= E(d)(-\hat{x}).(-\hat{x})A + E(d)\hat{x}.\hat{x}A + 0$$

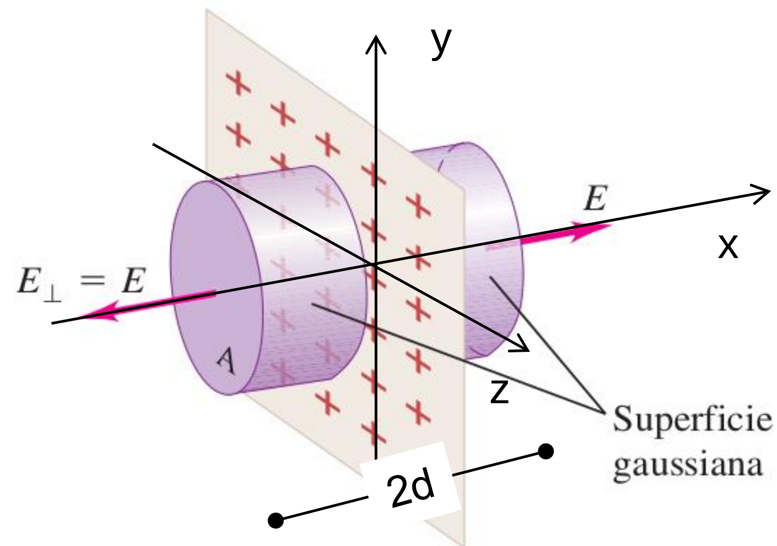
$$\boxed{\phi = 2\, E(d)\, A}$$

$$q_{encerrada} = \sigma\, A$$

Usemos Gauss para calcular $\vec{E}$ de un plano infinito

Entonces…por Gauss:

$$\phi = \oiint \vec{E}.\hat{n}\; dS = 4\pi k\; q_{encerrada}$$



pero ademas, calculando explicitamente el flujo:

$$\phi = 2\, E(d)\, A$$

Igualando

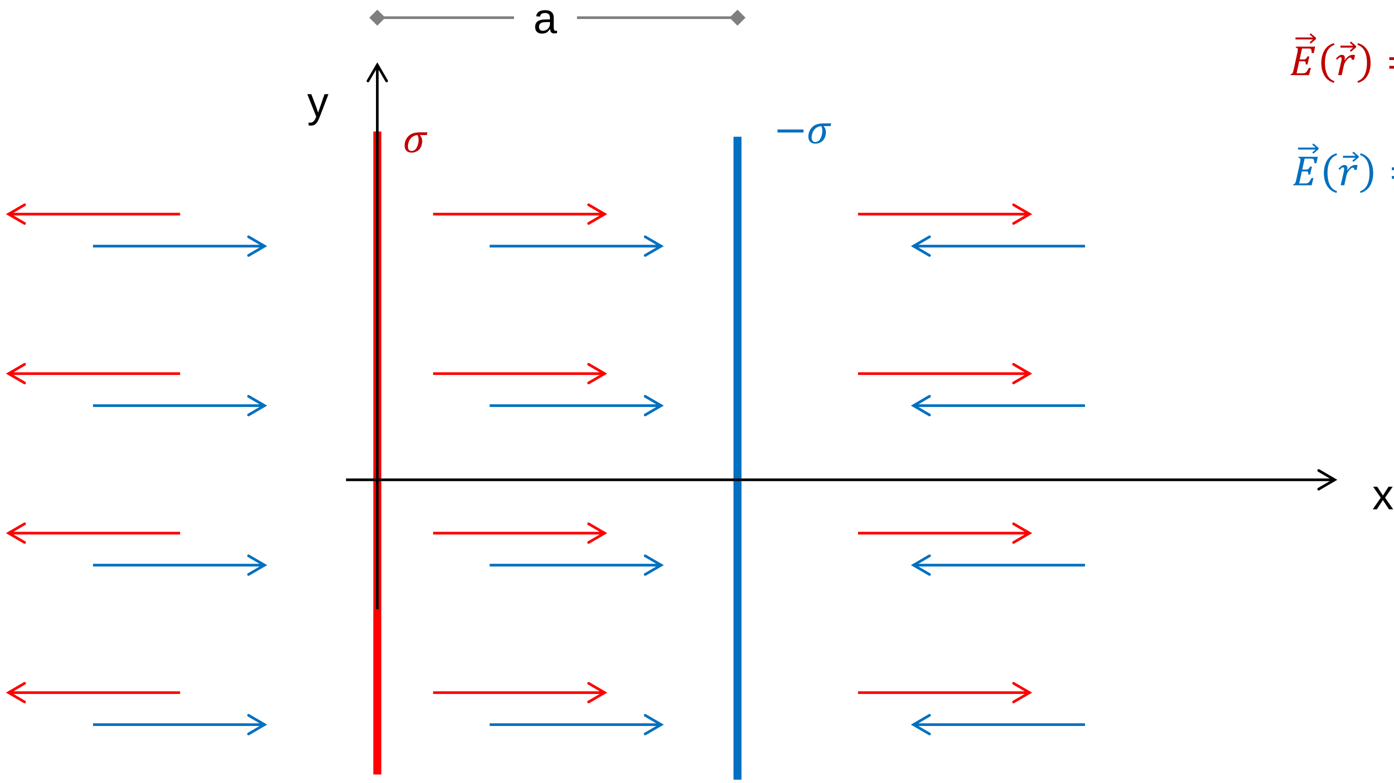
$$2\, E(d)\, A = 4\pi k\; \sigma\; A$$

$$E(d) \;= 2\pi k\; \sigma$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\hat{x} = 2\pi k\; \sigma\; sign(x)\hat{x}}$$

Fijarse que la intensidad del campo es independiente de la distancia al plano!

Dos planos infinitos

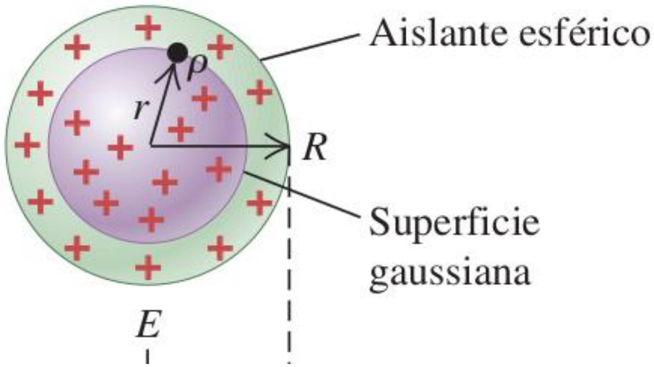


$$\vec{E}(\vec{r}) = 2\pi k\ \sigma\ sign(x)\hat{x}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -2\pi k\ \sigma\ sign(x-a)\hat{x}$$

$\vec{E} = 0$ $\qquad$ $\vec{E} = 4\pi k\ \sigma\ \hat{x}$ $\qquad$ $\vec{E} = 0$

Esfera cargada con ρ uniforme



Por simetría

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$\phi = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, q_{encerrada}$$

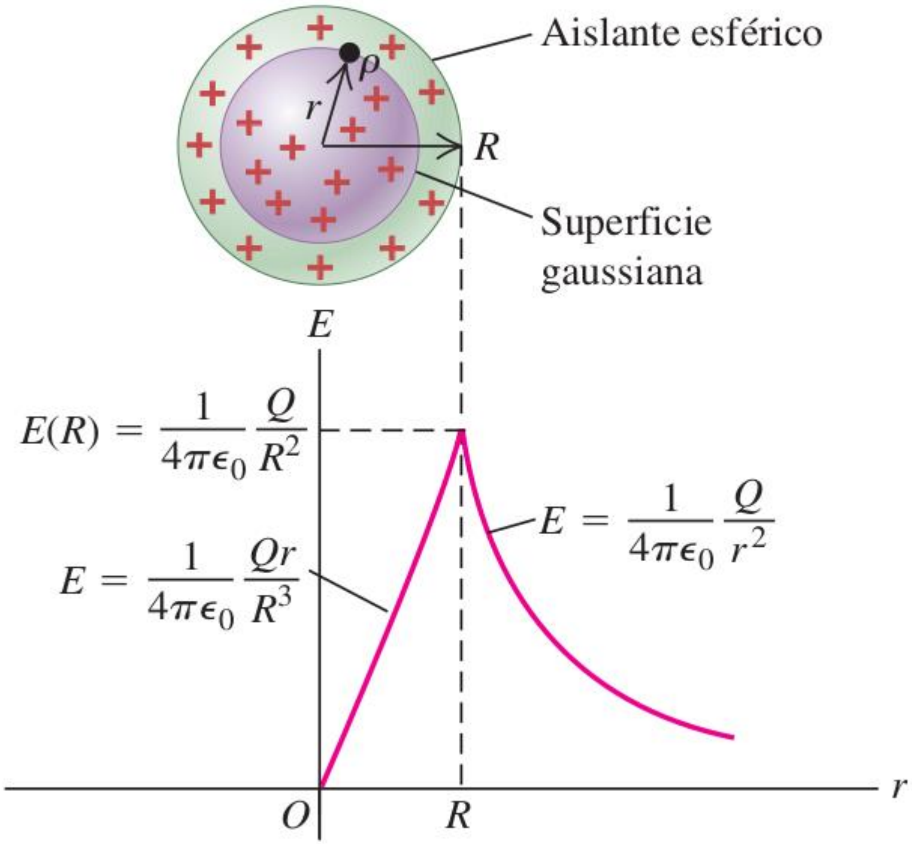
$$= \oiint E(r)\hat{r}.\hat{r}\, dS = E(r) \oiint dS = E(r)\, 4\pi r^2$$

$$\iiint \rho dV = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho r^3, si\ r < R \\ \frac{4\pi}{3}\rho R^3, si\ r > R \end{cases}$$

$$E(r)\, 4\pi r^2 = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}\rho r^3, si\ r < R \\ \frac{4\pi}{3}\rho R^3, si\ r > R \end{cases}$$

$$\boxed{E(r) = \begin{cases} \frac{\rho r}{3}, si\ r < R \\ \frac{\rho R^3}{3r^2}, si\ r > R \end{cases}}$$

Esfera cargada con ρ uniforme



Por simetría

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$\phi = \oiint \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, q_{encerrada}$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3}, si\ r < R \\ \dfrac{\rho R^3}{3r^2}, si\ r > R \end{cases}$$

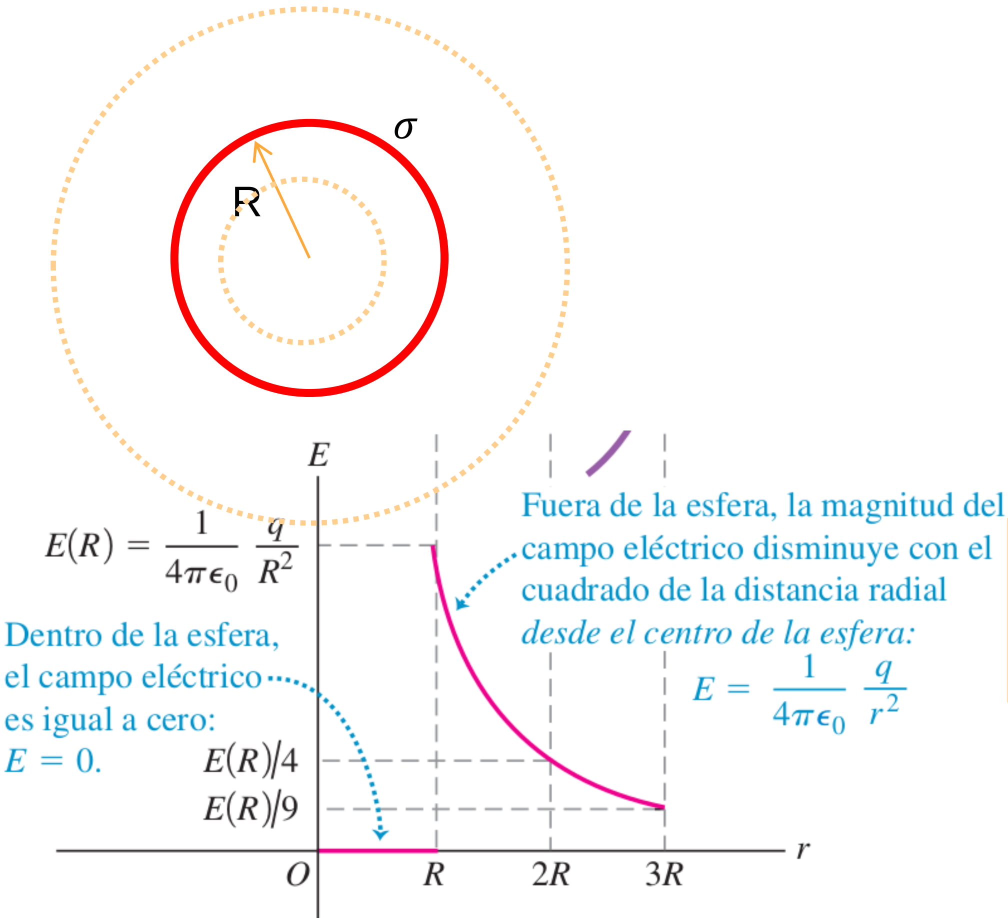
Esfera cargada en superficie

Por simetría

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

$$q_{encerrada} = \begin{cases} 0 & , si\ r < R \\ \sigma 4\pi R^2 & si\ r > R \end{cases}$$

$$\phi = E(r) \oiint dS = E(r)\ 4\pi r^2$$



$$E(r) = \begin{cases} 0\ , si\ r < R \\ \frac{k 4\pi\sigma R^2}{r^2}, si\ r > R \end{cases}$$

$$Q = 4\pi R^2 \sigma$$

$$E(r) = \begin{cases} 0\ , si\ r < R \\ \frac{4\pi k\ Q}{r^2}, si\ r > R \end{cases}$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k}$$