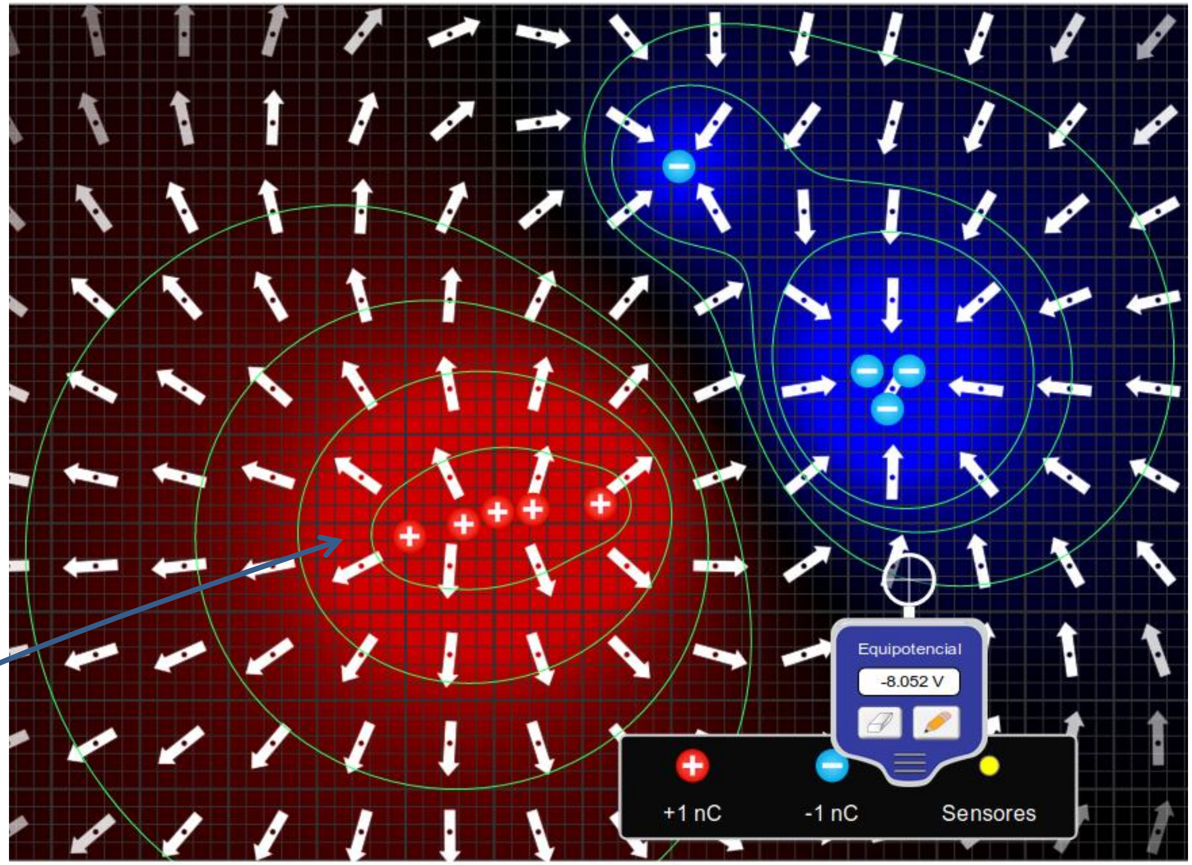
04. Energia de configuracion

Conductores

Capacitores

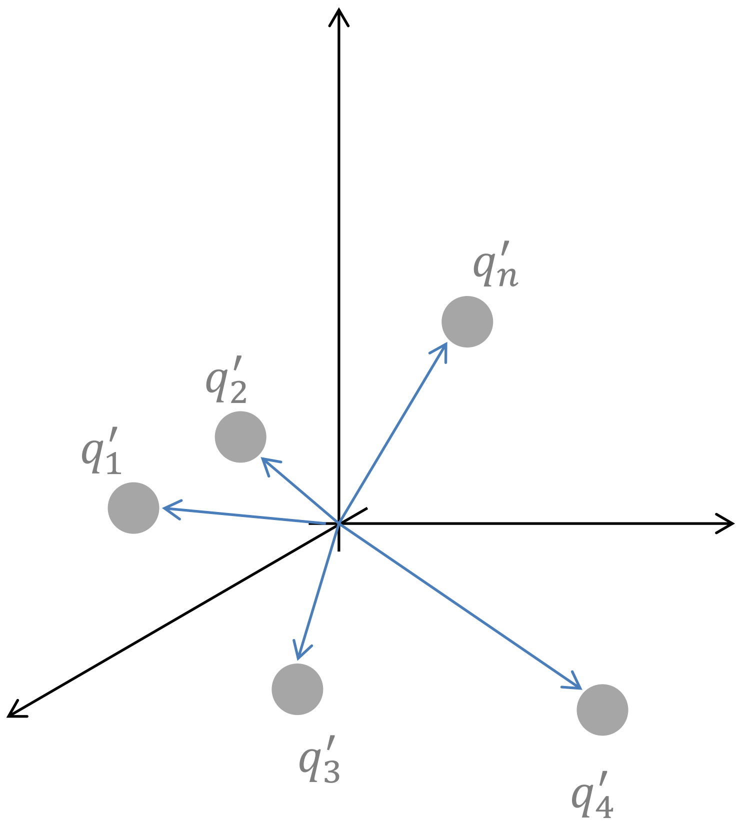
Clase anterior



$\vec{E}(\vec{r})$ y $V(\vec{r})$ reflejan propiedades de la distribución de cargas

Esta region tiene alto V porque tengo que hacer mucho trabajo contre F_{elec} para acercar cuasiestaticamete una carga a esta region del espacio (alta concentracion de cargas positivas cercanas)

Energía de una configuración

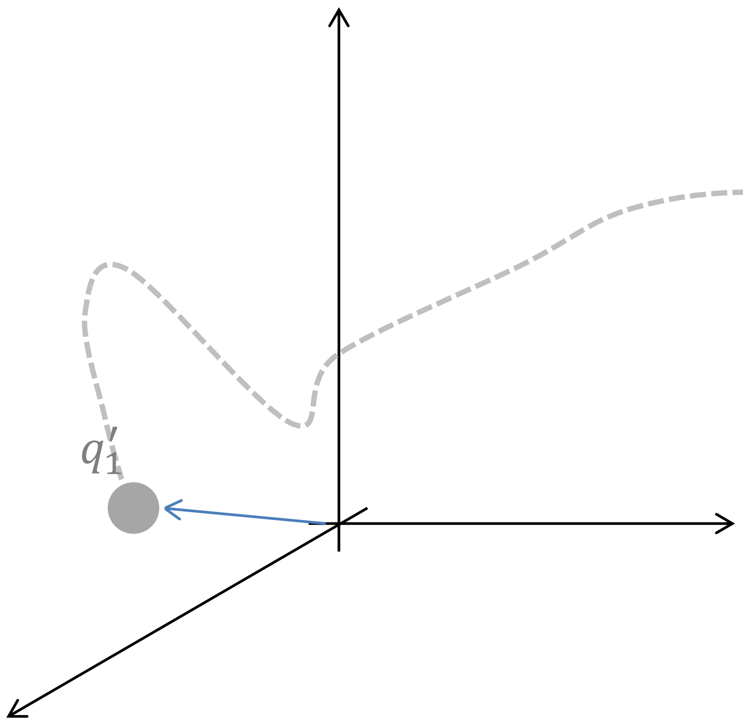


Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración

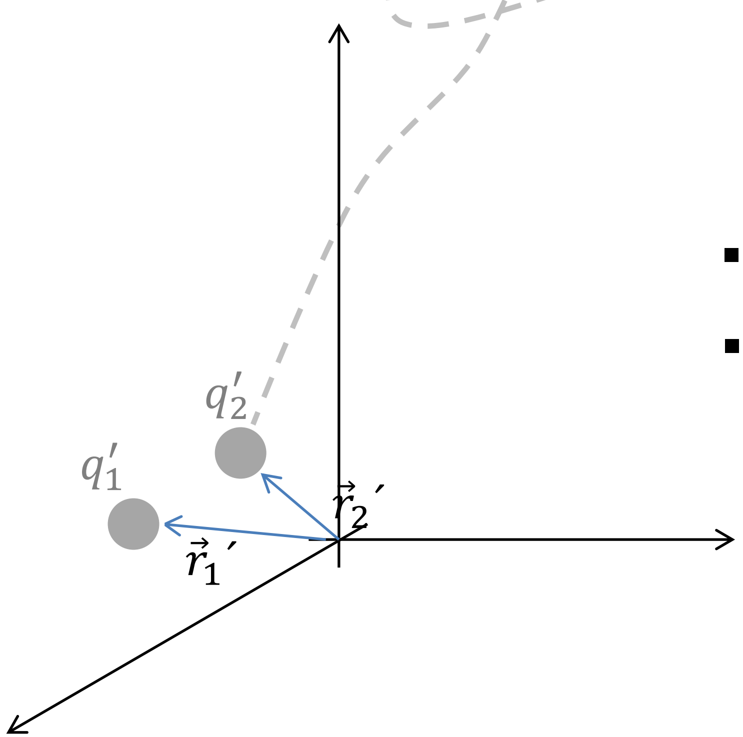
Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?



La primer carga no me cuesta nada (no tengo que hacer trabajo contra ningún campo externo)

Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración



Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

- La primer carga no me cuesta nada
- Para traer la 2da carga tengo que hacer trabajo contra el campo generado por q_1'

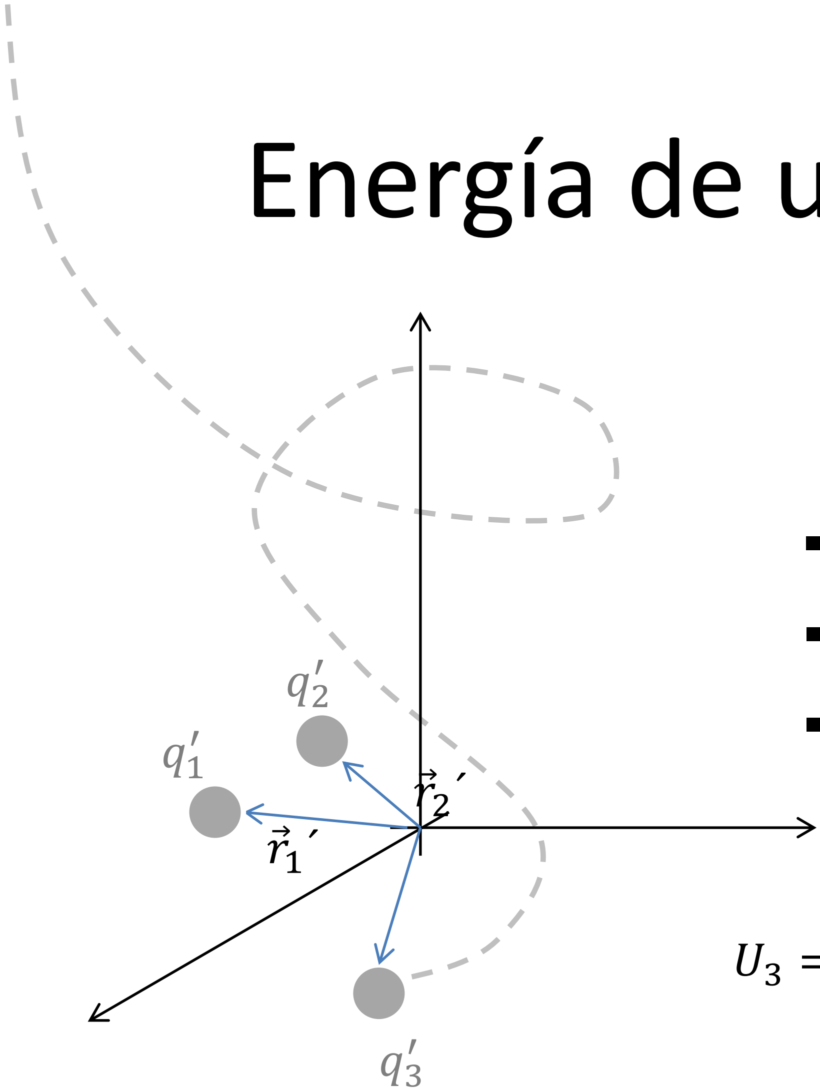
$$U_{21} = q_2' \, V_{q_1'}(\vec{r}_2{}') = \frac{k q_2' q_1'}{r_{21}} = q_2' \; V_{21}$$

notación

V_{21}

Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración



Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

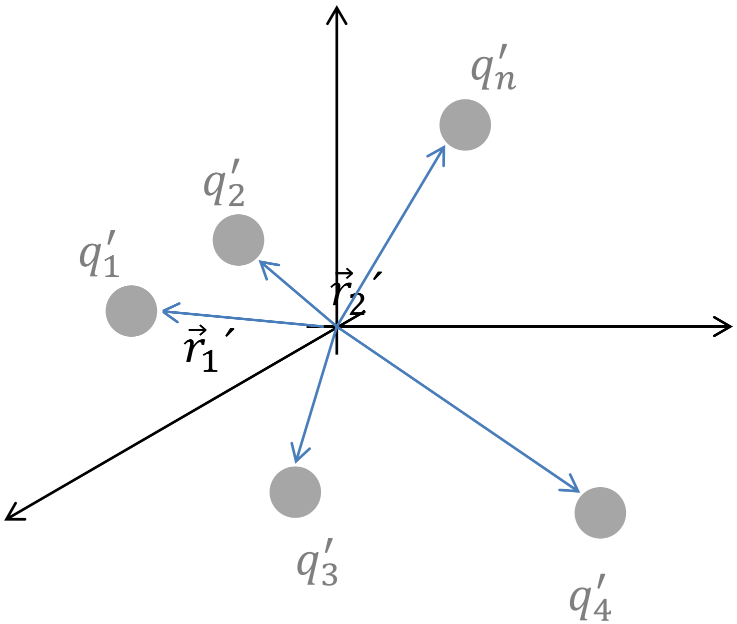
- La primer carga no me cuesta nada
- Trabajo para traer la 2da carga: $U_2 = U_{21} = q_2' \, V_{21}$
- Trabajo para traer la 3ra carga:

$$U_3 = U_{31} + U_{32} = q_3' \, \left(V_{q_1'}(\vec{r}_3\,') + V_{q_2'}(\vec{r}_3\,') \right)$$

$$= q_3' \, (V_{31} + V_{32})$$

Nota: Como siempre, vamos a pensar que, en su configuración final, las cargas se encuentran fijas gracias a la presencia (implícita) de fuerzas de carácter no-electrostático que impiden que las mismas se muevan

Energía de una configuración



Cuánto trabajo se tuvo que hacer para **armar** esta configuración?

- La primer carga no me cuesta nada
- Trabajo para traer la 2da carga: $U_2 = U_{21} = q_2'\,V_{21}$
- Trabajo para traer la 3ra carga: $U_3 = U_{31} + U_{32}$
- Trabajo para traer la 4ta carga: $U_4 = U_{41} + U_{42} + U_{43}$

- Para traer **todas** las cargas (armar la configuración)

$$U_{Tot} = U_{21} + U_{31} + U_{32} + U_{41} + U_{42} + U_{43} + \cdots$$

$$U_{Tot} = \sum_{i>j} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} q_i' V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i q_i' \underbrace{\sum_{j\neq i} V_{ij}}_{V_i} = \frac{1}{2}\sum_i q_i'\,V_i$$

Potencial total del **resto** de las cargas sobre la carga-i

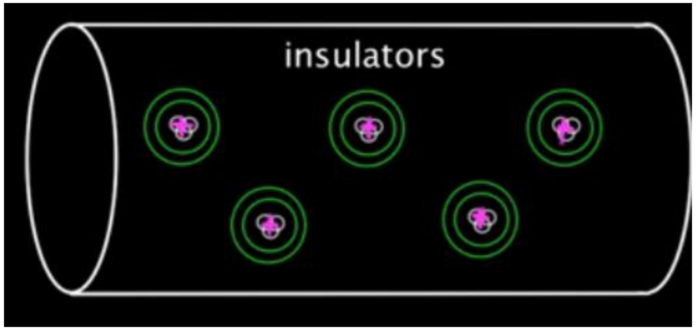
$$\boxed{U_{Tot} = \frac{1}{2}\sum_i q_i'\,V_i}$$

Para distr. continua

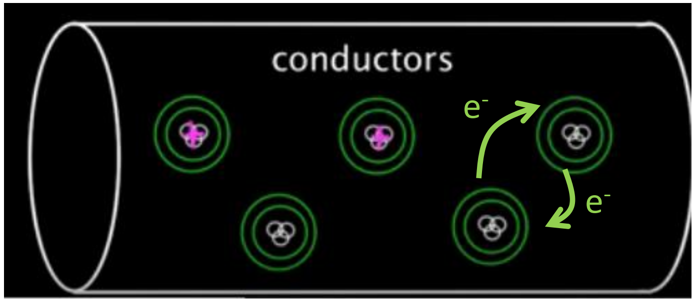
$$\boxed{U_{Tot} = \frac{1}{2}\int \rho\, V\, dv}$$

Materiales

- **Dielectricos:** materiales en los que los electrones se encuentran localizados junto a sus centros atómicos



- **Conductores:** materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas



Atomos en los nodos de la estructura molecular del material. Cada átomo tiene carga positiva en su núcleo rodeada por idéntica carga negativa (nube electrónica)

Kahn Academy https://youtu.be/ZgDIX2GOaxQ

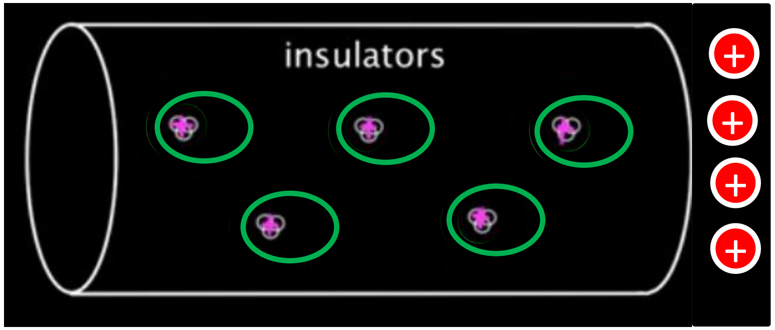
Materiales

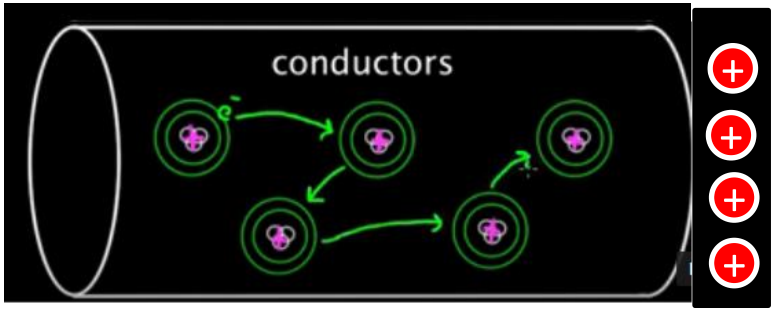
- **Dielectricos:** materiales en los que los electrones se encuentran localizados junto a sus centros atómicos

- **Conductores:** materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas

En presencia de **campos externos**

Nubes electrónicas se deforman





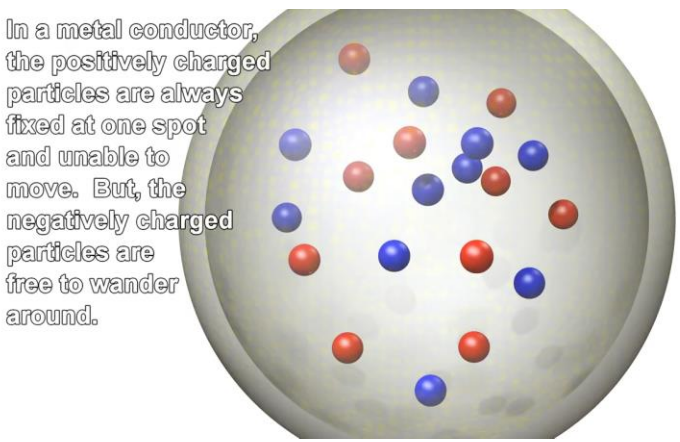
Electrones más externos pueden *saltar* de órbitas y desplazarse distancias macroscópicas

Kahn Academy https://youtu.be/ZgDIX2GOaxQ

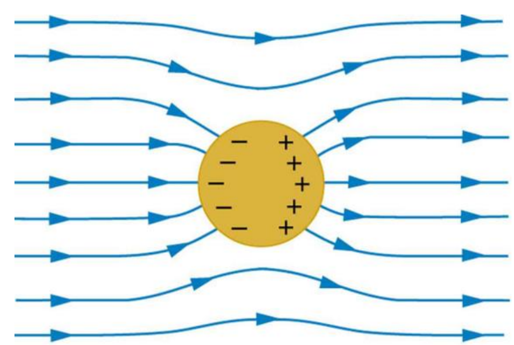
Conductores en equilibrio

En el equilibrio (cuando ya nada se mueve) siempre tiene que suceder que el campo $\vec{E}$ **dentro del conductor debe ser nulo** (de otra forma habría cargas moviendose, i.e. estaría en una situación fuera de equilibrio)

Las cargas se **redistribuyen** cuando hay campos externos



https://youtu.be/-Rb9guSEeVE?start=211&end=254

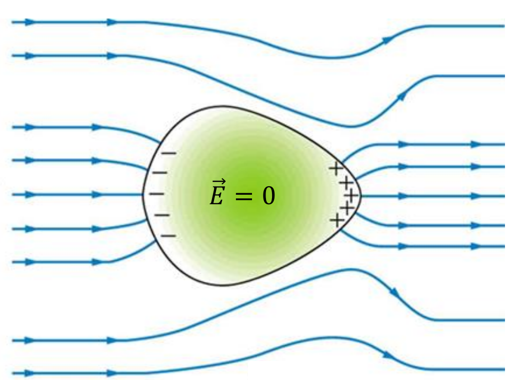


En el equilibrio el campo **total** (externo + cargas conductor) dentro del conductor debe ser nulo.

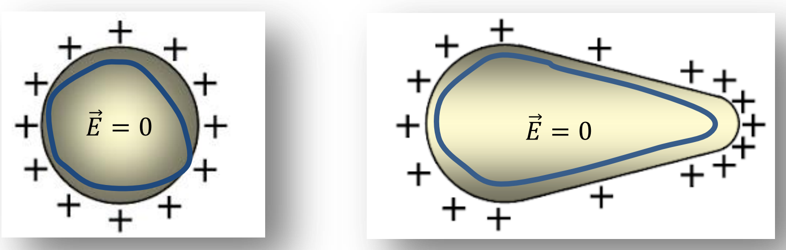
Conductores en equilibrio

En el equilibrio (cuando ya nada se mueve) siempre tiene que suceder que el campo $\vec{E}$ **dentro del conductor debe ser nulo** (de otra forma habría cargas moviendose, i.e. estaría en una situación fuera de equilibrio)

Las cargas se redistribuyen para anular el campo dentro del conductor



Para **conductores cargados**, el exceso de carga se encuentra en la superficie



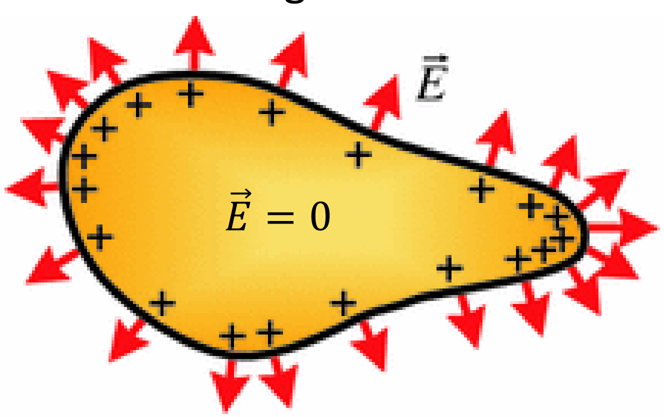
$$\phi_S = \oint\!\!\oint_S \cancelto{0}{\vec{E}.\hat{n}\, dS} = 4\pi k\, Q_{encerrada}$$

Campo fuera del conductor

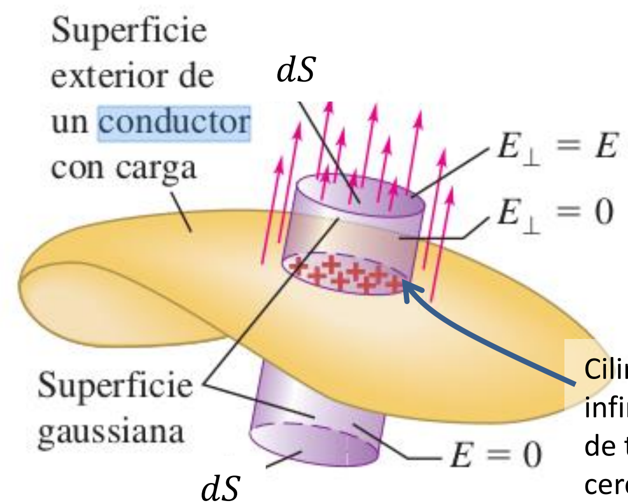
En el **equilibrio**, el campo **dentro** del conductor debe ser nulo….

…pero qué sucede **sobre la superficie**?

Conductor cargado



Uso ley de Gauss:



Cilindro infinitesimal de tapas muy cercanas a la sup

$$E_{//}^{sup} = 0$$ ← de otra forma las cargas libres se moverían sobre la superficie

$$E_{\perp}^{sup} = ?$$

$$\phi_S = \oiint_S \vec{E}.\hat{n}\, dS = 4\pi k\, Q_{encerrada}$$

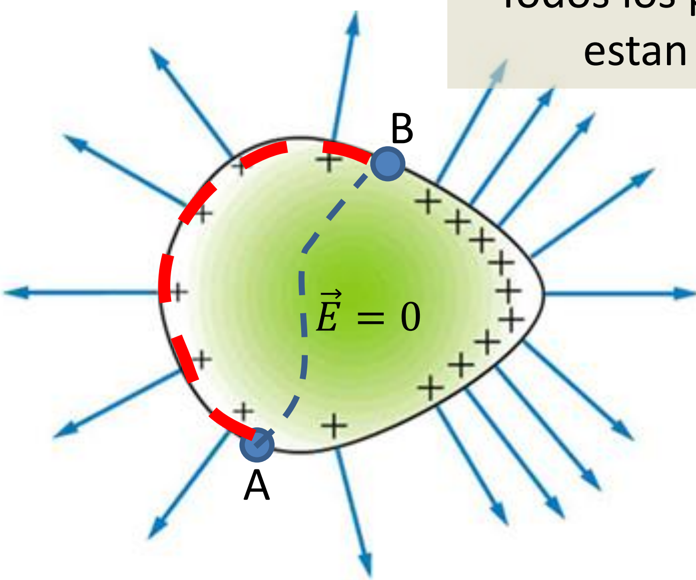
$$E_{\perp}^{sup}(tapa\ up)\hat{n}\,.\hat{n}dS = 4\pi k\sigma dS$$

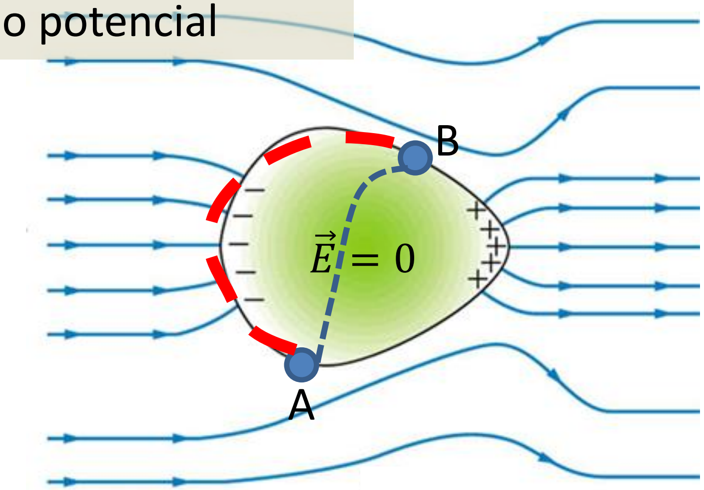
Entonces sobre la sup: $\vec{E}^{sup} = E_{\perp}^{sup}\hat{n}$

$$\boxed{E_{\perp}^{sup} = 4\pi k\sigma}$$

Potencial en un conductor

Todos los puntos de un conductor estan al mismo potencial





$$\vec{E}^{sup} = 4\pi k\sigma\hat{n}$$

Cuanto cambia el potencial cuando paso del punto A al punto B?

Γ: $dV = -\vec{E}^{sup}.\vec{dl} = 0$

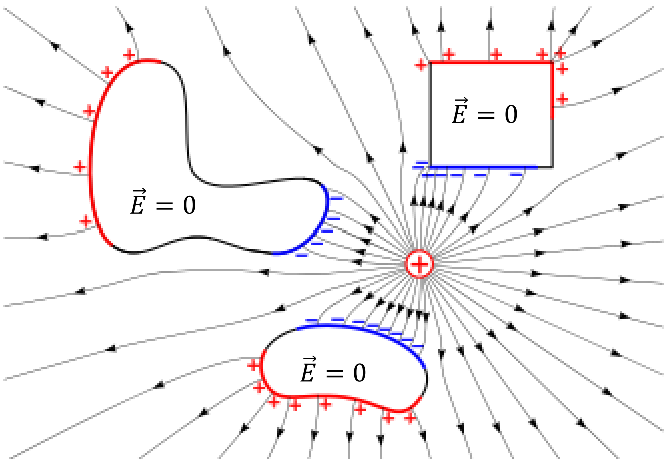
En todo punto de la trayectoria roja $\vec{E}^{sup}$ es perpendicular al desplazamiento

Γ: $dV = -\vec{E}.\vec{dl} = 0$

Notar que si elijo un camino como el azul encuentro tambien que el potencial no cambia (era obvio…no?)

Resumiendo: conductores en equilibrio

En presencia de campo externo



Conductores: materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas

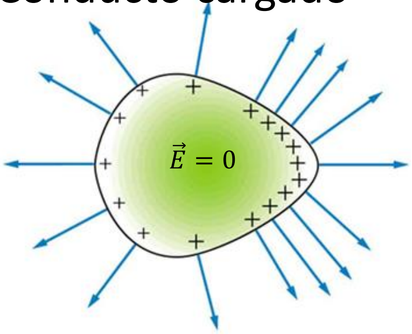
En el equilibrio las cargas se redistribuyen para anular el campo dentro del conductor: $\vec{E}^{interior} = 0$

Para **conductores cargados**, el exceso de carga se encuentra en la superficie

$$\vec{E}^{sup} = E_{\perp}^{sup}\hat{n} \qquad E_{\perp}^{sup} = 4\pi k\sigma$$

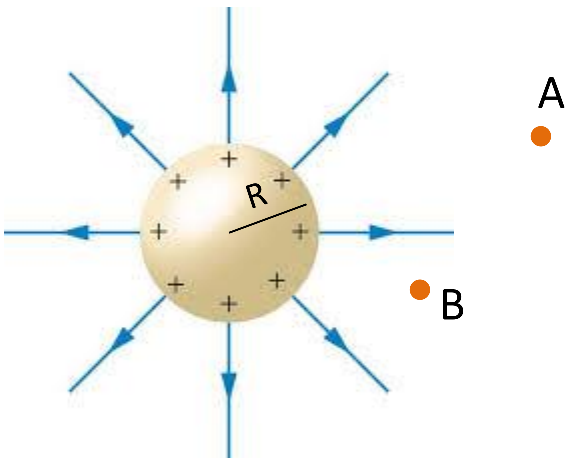
V es constante para todo punto del conductor

Conducto cargado



Potencial de un conductor esférico cargado

Q: carga en exceso sobre la superficie



$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases} \leftarrow \text{(usando Gauss)}$$

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}.\overrightarrow{dl} & r > R \end{cases}$$

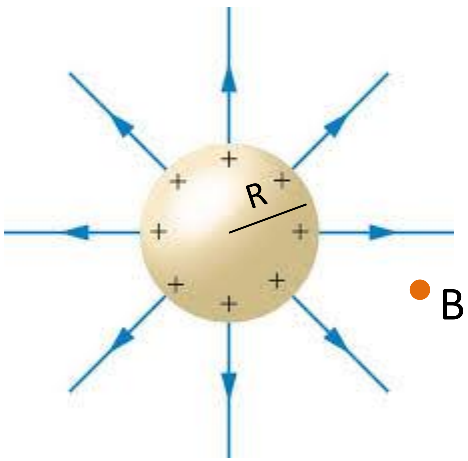
Recordemos lo que vimos la clase pasada en este ejemplo para *r>R*

$$\underbrace{\int_A^B dV}_{V_B - V_A} = -\int_A^B \frac{kQ}{r^2}\hat{r}.\overrightarrow{dl} = -\int_A^B \frac{kQ}{r^2}dr = \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A} \longrightarrow V_B = \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A} + V_A$$

Si elijo A como referencia asumo $A \to \infty$ y tomo $V_A = 0$ $\longrightarrow V_B = \dfrac{kQ}{r_B}$

Potencial de un conductor esférico cargado

Q: carga en exceso sobre la superficie

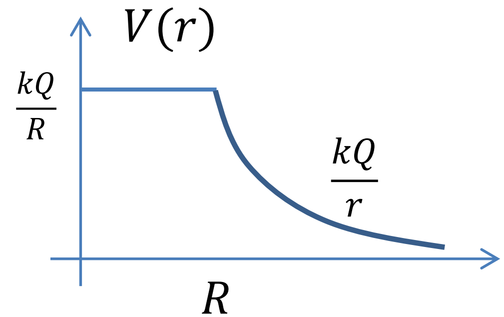


$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{kQ}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases} \leftarrow \text{(usando Gauss)}$$

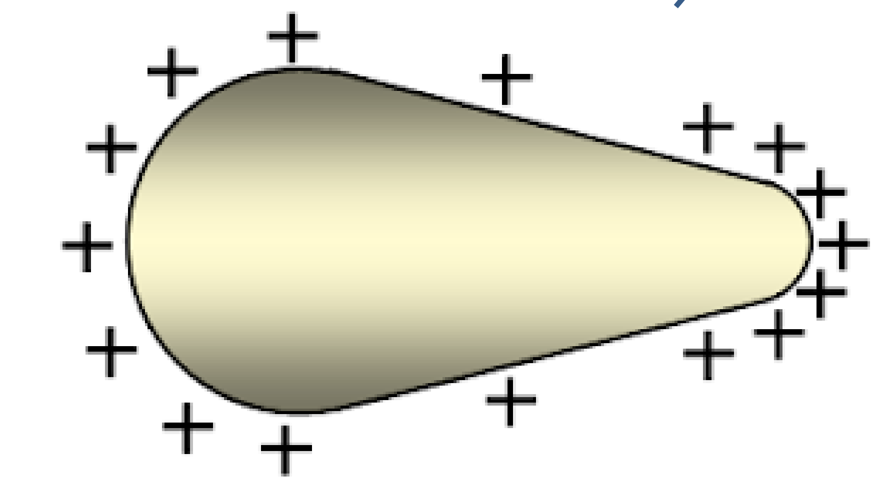
$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = \begin{cases} 0 & r < R \\ -\dfrac{kQ}{r^2}\hat{r}.\overrightarrow{dl} & r > R \end{cases}$$

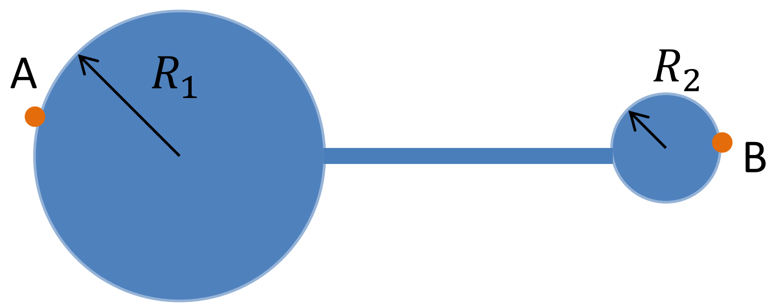
Recordemos lo que vimos la clase pasada en este ejemplo para *r>R:* $V_B = \dfrac{kQ}{r_B}$

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{kQ}{R} & r > R \\ \dfrac{kQ}{r} & r > R \end{cases}$$



Efecto de punta





$$V(A) \sim \frac{kQ_1}{R_1} \quad = \quad V(B) \sim \frac{kQ_2}{R_2}$$

Pero como ambas esferas están en contacto via un conductor (i.e. forman parte de un mismo conductor)

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q_2$$

Cómo es la densidad de carga en ambas esferas?

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Q_1}{4\pi {R_1}^2} = \frac{\frac{R_1}{R_2} Q_2}{4\pi {R_1}^2} = \frac{Q_2}{4\pi R_1 R_2} \\ \sigma_2 &= \frac{Q_2}{4\pi {R_2}^2} \end{aligned}\right\} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

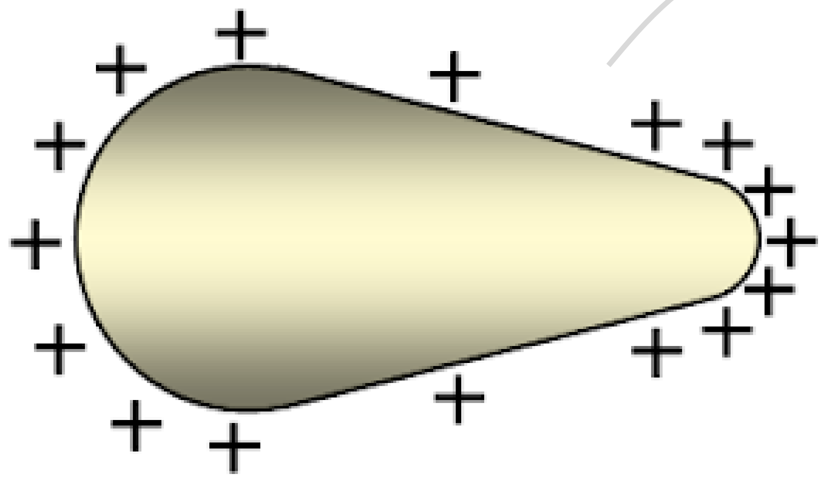
En nuestro ejemplo $R_1 >> R_2$

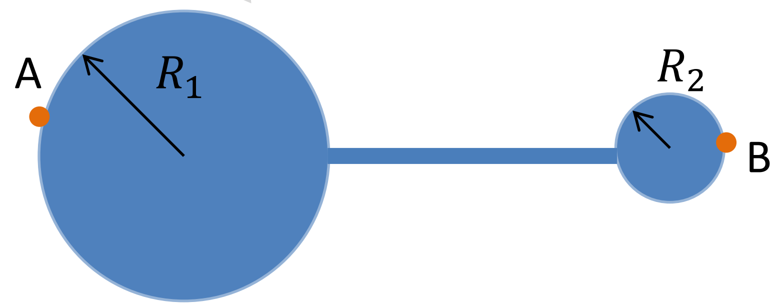
$\sigma_1 << \sigma_2$

Además como $E_{\perp}^{sup} = 4\pi k \sigma$

$$E_{\perp}^{sup}(B) \gg E_{\perp}^{sup}(A)$$

Efecto de punta

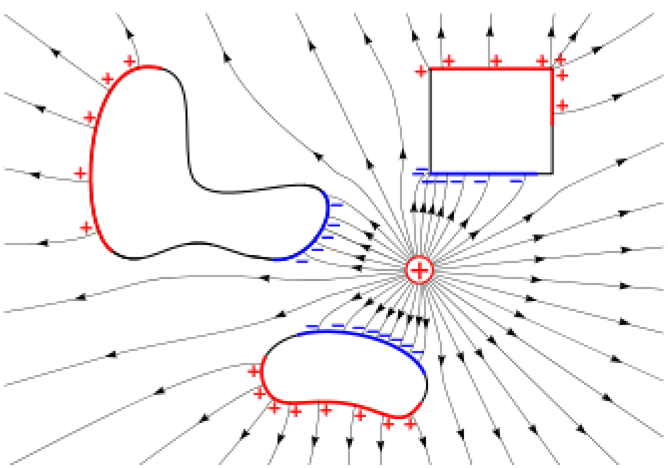


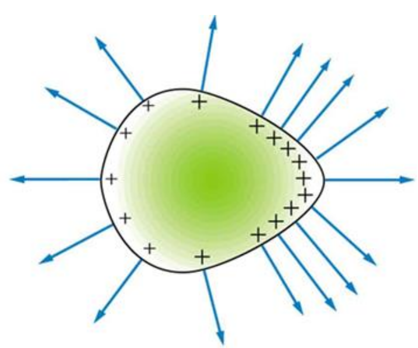


$$V(A) \sim \frac{kQ_1}{R_1} \qquad V(B) \sim \frac{kQ_2}{R_2}$$

Las **densidades** de carga y los **campos** electricos son **mayores** en las **puntas** de los conductores (zonas de bajo radio de curvatura)

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_2} Q_2$$





En nuestro ejemplo $R_1 >> R_2$

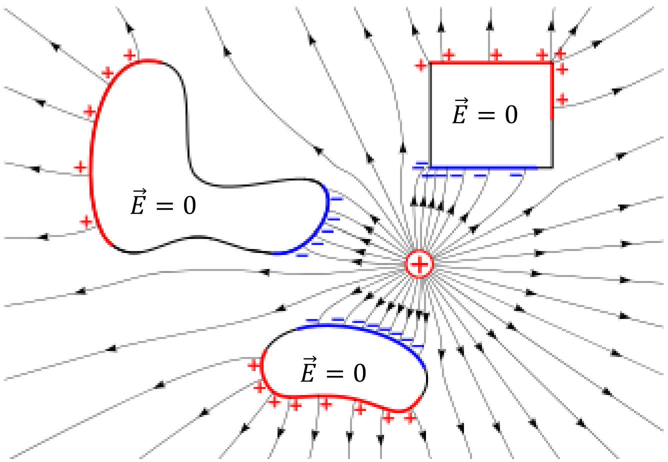
$\sigma_2 \gg \sigma_1$

Además como $E_{\perp}^{sup} = 4\pi k \sigma$

$E_{\perp}^{sup}(B) \gg E_{\perp}^{sup}(A)$

Resumiendo: conductores en equilibrio

En presencia de campo externo



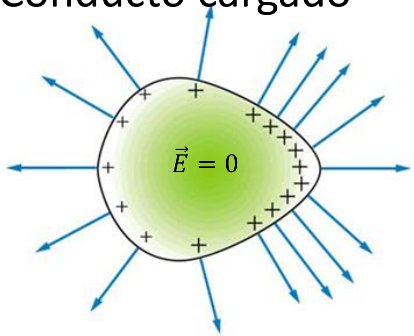
Conductores: materiales que poseen cargas capaz de desplazarse distancias macroscópicas

En el equilibrio las cargas se redistribuyen para anular el campo dentro del conductor: $\vec{E}^{interior} = 0$

Para **conductores cargados**, el exceso de carga se encuentra en la superficie

$$\vec{E}^{sup} = E_{\perp}^{sup}\hat{n} \qquad E_{\perp}^{sup} = 4\pi k\sigma$$

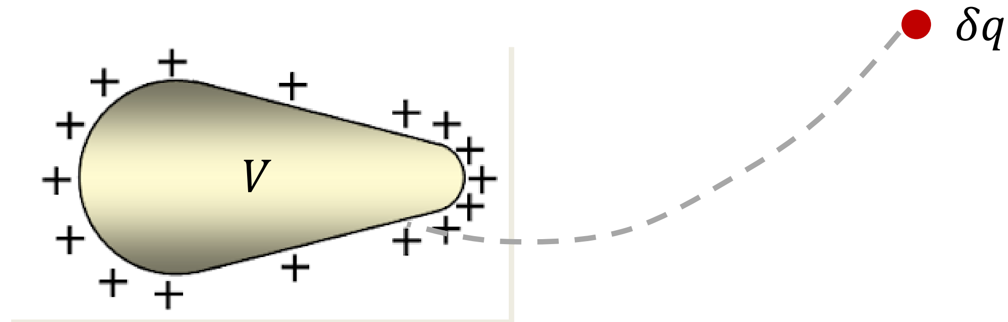
Conducto cargado



V es constante para todo punto del conductor

Las **densidades** de carga y los **campos** electricos son **mayores** en las **puntas** de los conductores (zonas de bajo radio de curvatura)

Energía electrostática de un conductor



Cuánto trabajo (i.e. energía) cuesta cargar a este conductor?

Dado un conductor con carga q cuanto cuesta agregarle una carga δq?

$$dU = V\delta q$$

Ahora…en general vale que $V = \alpha q$

$$\left.\begin{array}{r} dU = V\delta q \\ V = \alpha q \end{array}\right\} \; dU = \alpha q \delta q$$

Para cargarlo desde *0* hasta *Q*

$$\Delta U = \alpha \int_0^Q q \, dq = \alpha \frac{Q^2}{2} = \frac{1}{2} V Q$$

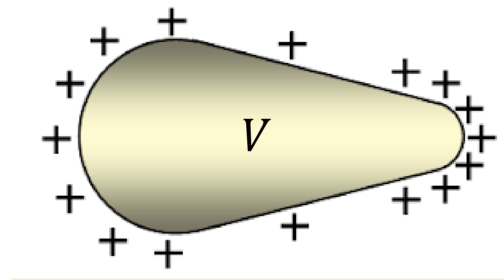
Notar: cargar a un conductor implica almacenar energía (en el mismo sentido que comprimir un resorte)

Capacidad de un conductor

Al cargar a un conductor habíamos visto que

$$V = \alpha Q$$

La constante de proporcionalidad depende de la geometrica del conductor



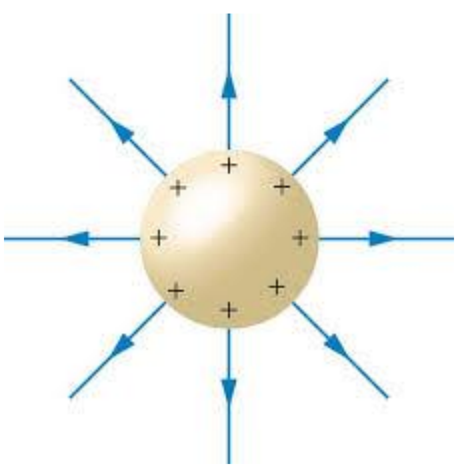
Se define como **capacidad** de un conductor a

$$C = \frac{Q}{V}$$

Cuanta carga tiene por unidad de voltaje

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = F\text{(Faradios)}$$

Ejemplo: conductor esférico



$$V = \frac{kQ}{R} = \frac{\overbrace{k}^{\alpha}}{R} Q$$

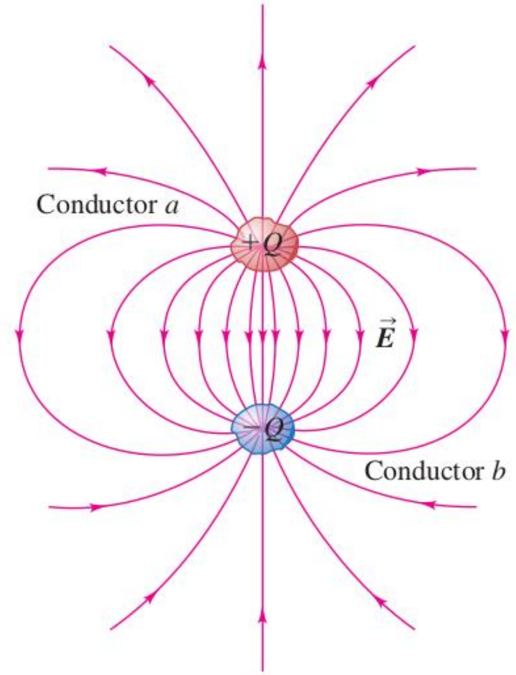
$$C = \frac{R}{k}$$

La energía almacenada en el conductor cargado

$$U = \frac{1}{2} VQ = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Capacitores

- Dos conductores cualesquiera, aislados uno del otro, forman un **capacitor**
- En general vamos a considerar situaciones donde inicialmente cada conductor tienen carga nula y electrones de uno de ellos son transferidos al otro…de esta manera quedan cargados con carga +Q y -Q
- Q : carga almacenada en el capacitor
- Va a existir ahra una diferencia de potencial V_{ab} entre los conductores cargados
- La capacitancia del capacitor resulta: $C = \dfrac{Q}{V_{ab}}$



Cuanto mayor C, más carga (o sea más energía) voy a poder acumular para una dada diferencia de potencial

Capacitor de placas paralelas (podemos calcular $\Delta V(Q)$)

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & fuera \\ -4\pi k\sigma\hat{y} & entre\ placas \end{cases}$$

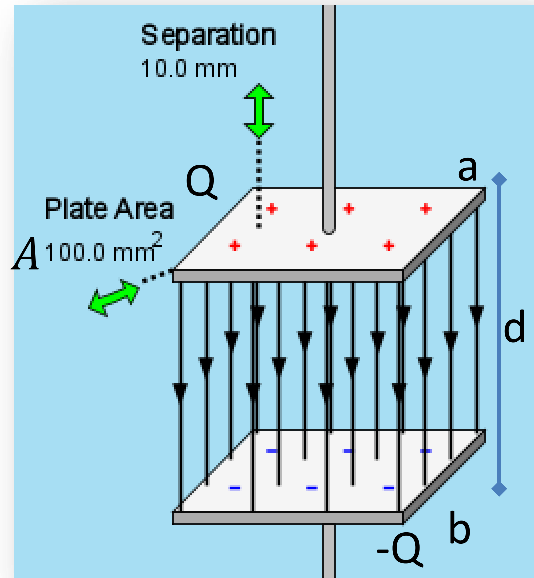
$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_B^A \vec{E}.\vec{dl}$$

$\vec{dl} = \hat{y}dy$

$$= -\int_B^A -4\pi k\sigma\hat{y}.\hat{y}dy$$

$$= 4\pi k\sigma \int_B^A dy$$

$$V_a - V_b = 4\pi k\sigma\, d$$



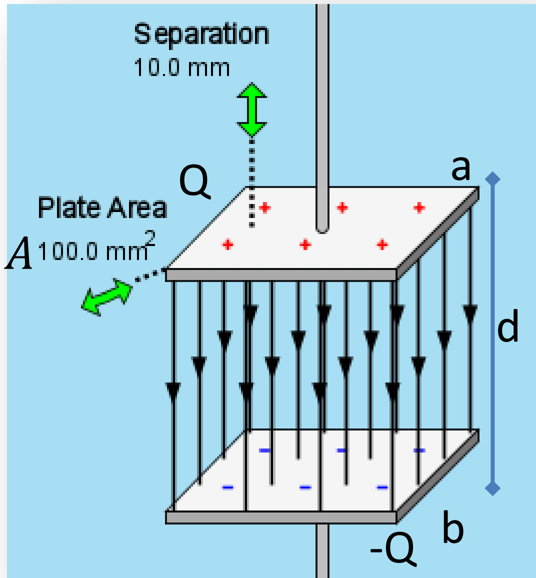
$$\Delta V = \underbrace{\frac{4\pi k d}{A}}_{\alpha} Q \qquad Q = \underbrace{\frac{A}{4\pi k\, d}}_{C} \Delta V$$

Notar*: α y C* dependen de la **geometria** del arreglo de conductores y del **medio**

Notación:

$$\Delta V \leftrightarrow V$$

Energía almacenada en un capacitor



Habiamos dicho que en general vamos a considerar situaciones donde inicialmente cada conductor tiene carga nula y electrones de uno de ellos son transferidos al otro…de esta manera quedan cargados con carga +Q y -Q

Cuanta energía necesitamos para hacer esto?
(repito lo que ya hicimos nates para un conductor)

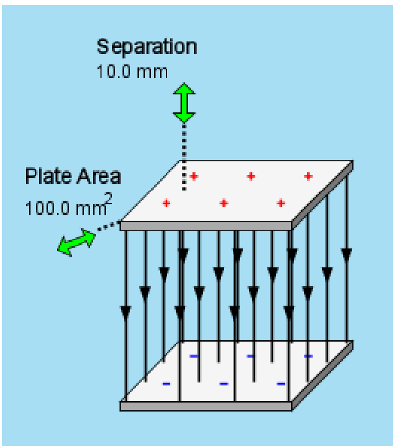
En una etapa intermedia supongamos que las placas están cargadas con q a una dif de potencial $\Delta v \equiv v$

$$q = Cv$$

Para incrementar la carga en un δq necesito hacer un trabajo: $dU = v\,\delta q = \dfrac{q\delta q}{C}$

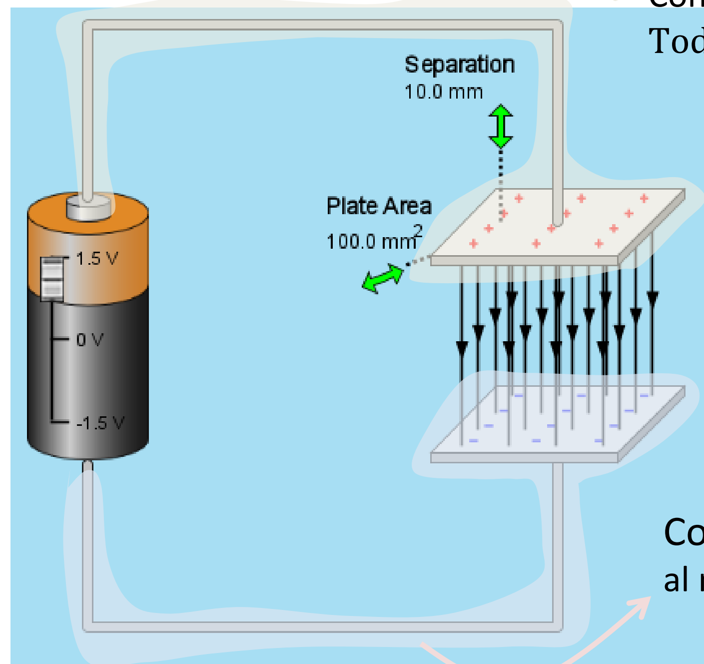
$$U = \int_0^Q \frac{q\delta q}{C} = \frac{Q^2}{2C} \quad = \frac{1}{2}CV^2 \quad = \frac{1}{2}VQ$$

Capacitores **aislados** vs **no-aislados**



Q esta dado. $V = \frac{1}{C} Q$

Dispositivo que fija la diferencia de potencial entre las placas a un valor fijo ε



Conductor 1: Todo al mismo potencial

$\Delta V = \varepsilon$

Conductor 2: todo al mismo potencial

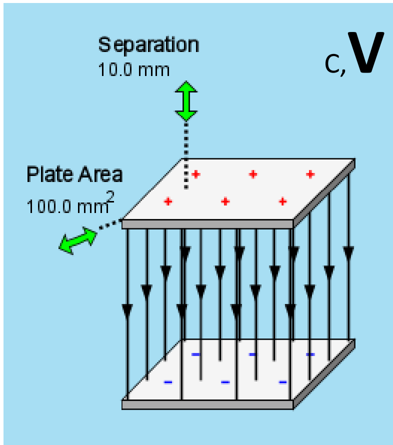
ΔV fijado por la pila $\qquad Q = CV$

Si un capacitor se carga transfiriendo carga de una placa a otra, un incremento de *C* provoca una disminución y de la energía almacenada. Será más facil darle una carga dada.

$$U = \frac{Q^2}{2C} \xleftarrow{V = \frac{1}{C}Q} U = \frac{1}{2} VQ \xrightarrow{Q = CV} U = \frac{1}{2} C V^2$$

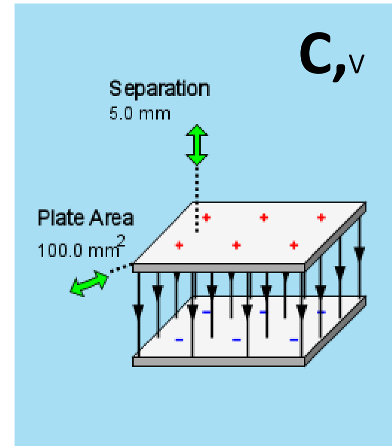
Para capacitores que se cargan a V constante, un incremento de *C* da un incremento de Q y de la energía almacenada

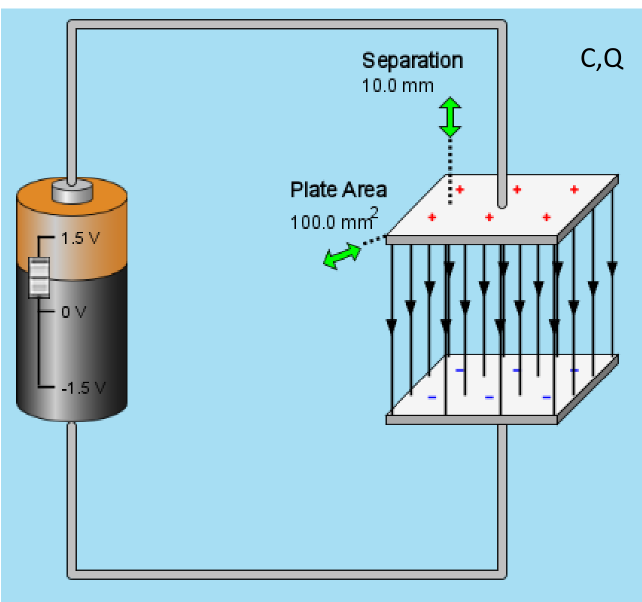
Capacitores **aislados** vs **no-aislados**



1/C

$$V = \frac{4\pi k\ d}{A} Q$$

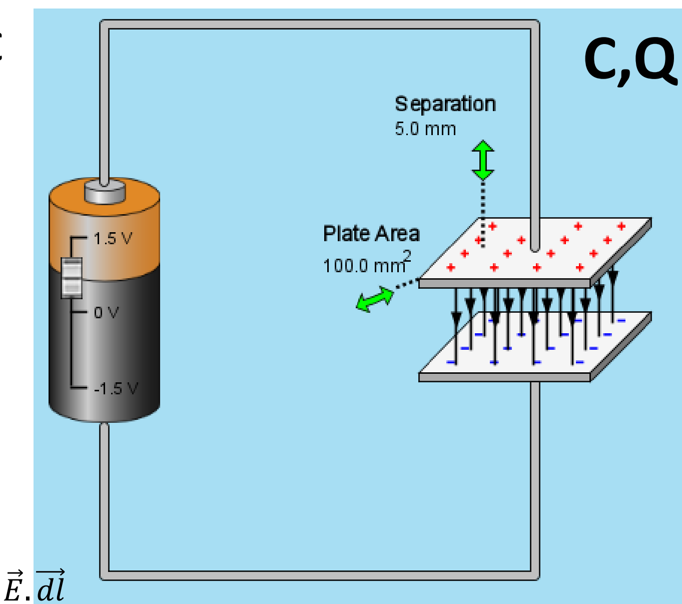




C

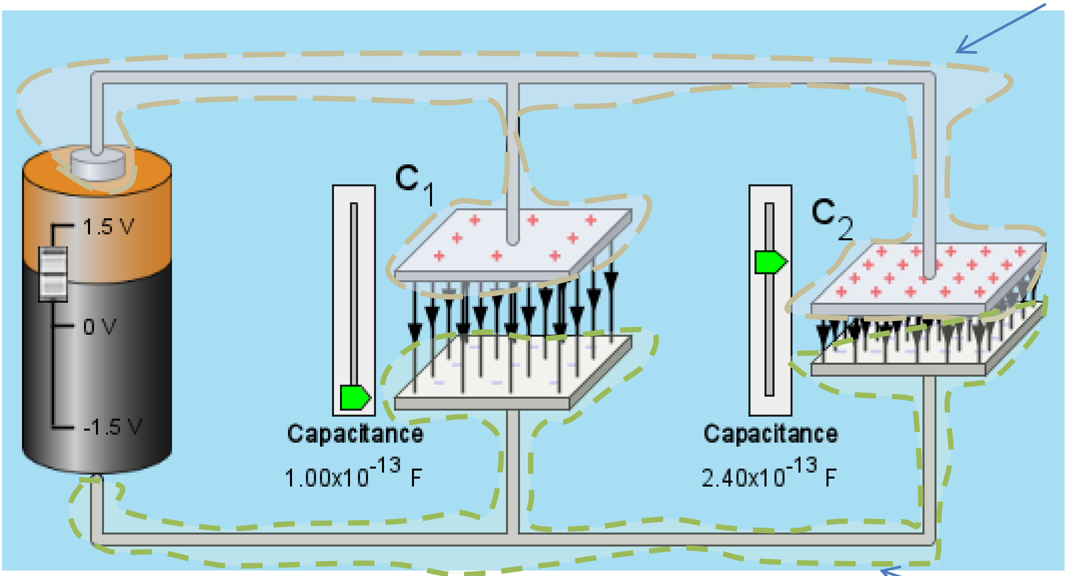
$$Q = \frac{A}{4\pi k\ d} V$$

$$V = \Delta V = V_a - V_b = -\int_B^A \vec{E}.\overrightarrow{dl}$$



Capacitores en paralelo

Todo al mismo potencial



$\varepsilon = 1.5V$

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \varepsilon$$

Todo al mismo potencial

Para cada capacitor $Q = CV$

$$Q_1 = C_1 V_1 = C_1 \varepsilon$$

$$Q_2 = C_2 V_2 = C_2 \varepsilon$$

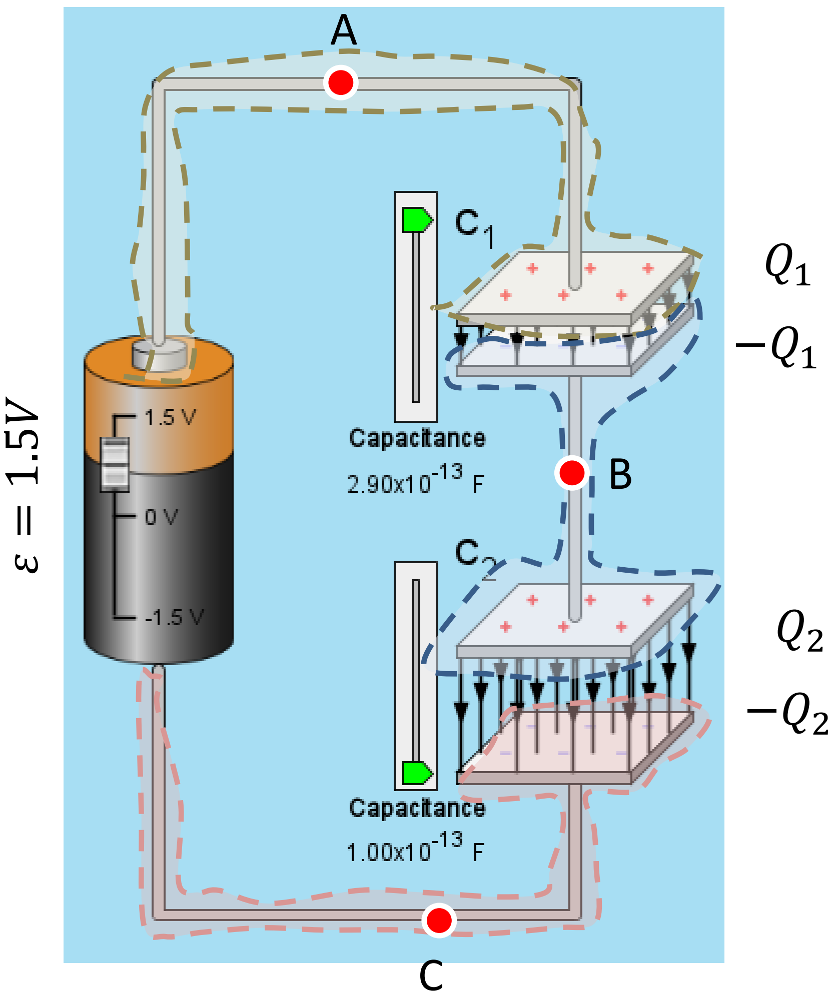
La carga total que reparte la pila a las placas : $Q = Q_1 + Q_2$

$$Q = \underbrace{(C_1 + C_2)}_{C_p}\varepsilon$$

Capacidad *equivalente*

Si hubiese utilizado un unico capacitor de capacidad C_p la pila lo hubiera cargado con identica cantidad de carga Q

Capacitores en serie



Hay tres conductores, cada uno a un potencial diferente

El conductor central estaba inicialmente descargado, por lo que:

$$Q_2 = Q_1 = Q$$

$$\Delta V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V_{AC} = \varepsilon$$

$$\Delta V_{AB} = \Delta V_1 = \frac{Q}{C_1}$$

$$\Delta V_{BC} = \Delta V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$\Delta V_{AC} = \Delta V_{AB} + \Delta V_{BC}$$

$$\varepsilon = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

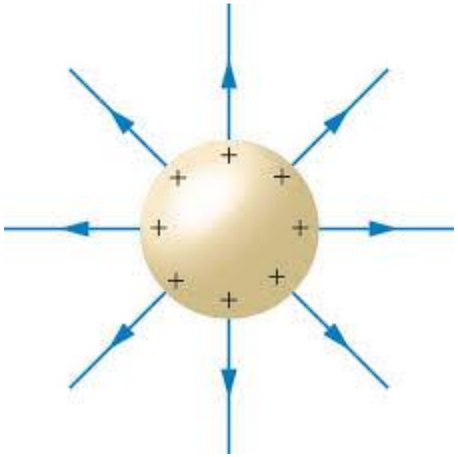
$$\varepsilon = \underbrace{\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} Q$$

$$\varepsilon = \frac{1}{C_s} Q$$

Si hubiese utilizado un unico capacitor de capacidad C_s la pila lo hubiera cargado con identica cantidad de carga Q

Por que son útiles los capacitores de placas paralelas?

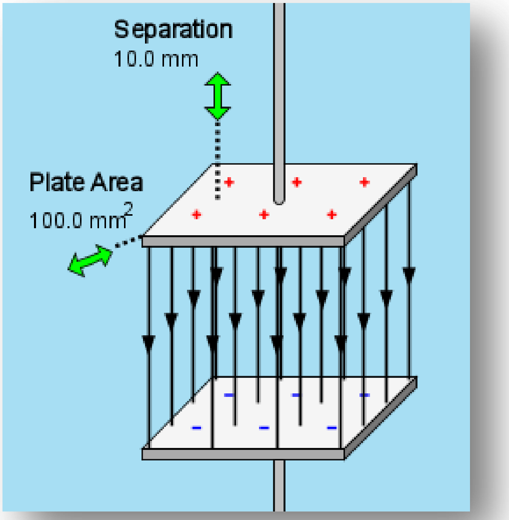
Conductor esférico



$$V = \frac{kQ}{R}$$

C

$$Q = \frac{R}{k} V$$



C

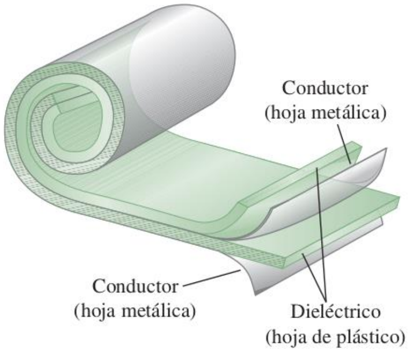
$$Q = \frac{A}{4\pi k\, d} \Delta V$$

C crece con el radio

C crece como 1/d

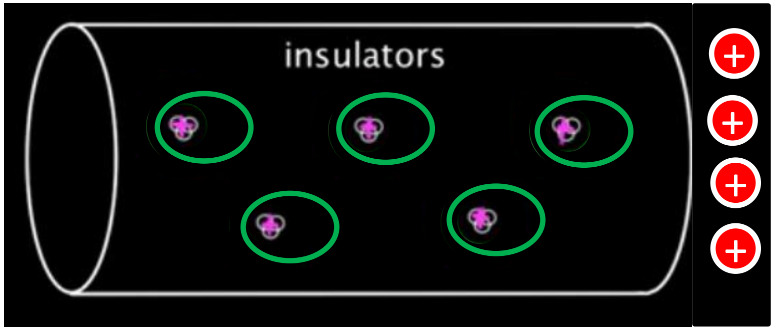
$$U = \frac{1}{2} C V^2$$

Con esta geometria de conductores puedo construir dispositivos con **alta capacitancia** en espacios muy reducidos



Dieléctricos

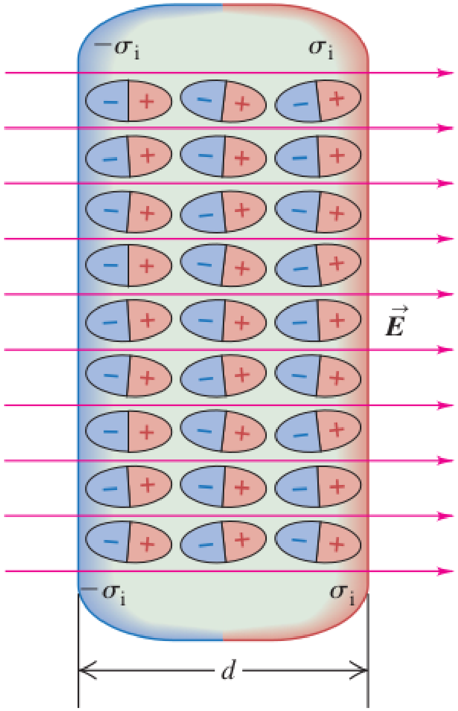
Habíamos visto que en materiales dieléctricos (aislantes) no había cargas de conducción, pero las nubes electrónicas se deformaban.



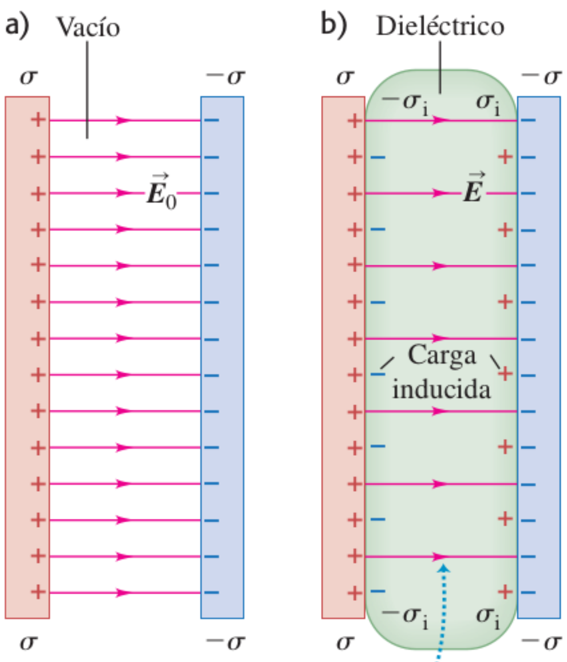
A nivel molecular…aparecen **dipolos inducidos** por el campo externo.

El efecto es que pueden aparecer **cargas netas superficiales**, σ_i, que habrá que tener en cuenta para calcluar el Etotal

La intensidad del efecto (grado de polarización y magnitud de las cargas de polarización que aparecen en la superficie) depende de cada material



Dieléctricos en capacitores



- La **densidad superficial de carga de polarización inducida** σ_i tiene el efecto de que sobre las placas hubiera una carga efectiva menor($\sigma' = \sigma - \sigma_i$)

- Por esta razón disminuye el campo total entre las placas del capacitor.

$$E = \frac{E_0}{K}$$ ← Cte dielectrica

$Q = CV$ $\quad$ $Q = C'V'$

el campo E es K veces mas chico que E_0: $V' = V/K$

$$C' = KC$$

$$C' = K\frac{A}{4\pi k_0 d}$$

$$\frac{K}{4\pi k_0} = K\varepsilon_0 = \varepsilon$$

Permitividad del material

material	K
Aire	1
Vidrio	5-10
Agua	78
Papel	3.5
Membrana Axon	8

Rigidez dieléctrica

Cuando a un material dieléctrico se lo somete a un campo eléctrico suficientemente intenso, el mismo puede alcanzar a arrancar electrones de sus moléculas que a su vez, al acelerarse, colisionan con otras moléculas arrancando más electrones generando un efecto en cascada.

Se produce la ruptura de la **rigidez dieléctrica** del material y el mismo se convierte en conductor.

	Rigidez dielectrica [V/m]
aire	$3\ 10^6$
policarbonato	$3\ 10^7$
Vidrio	$1\ 10^7$