Interferencia

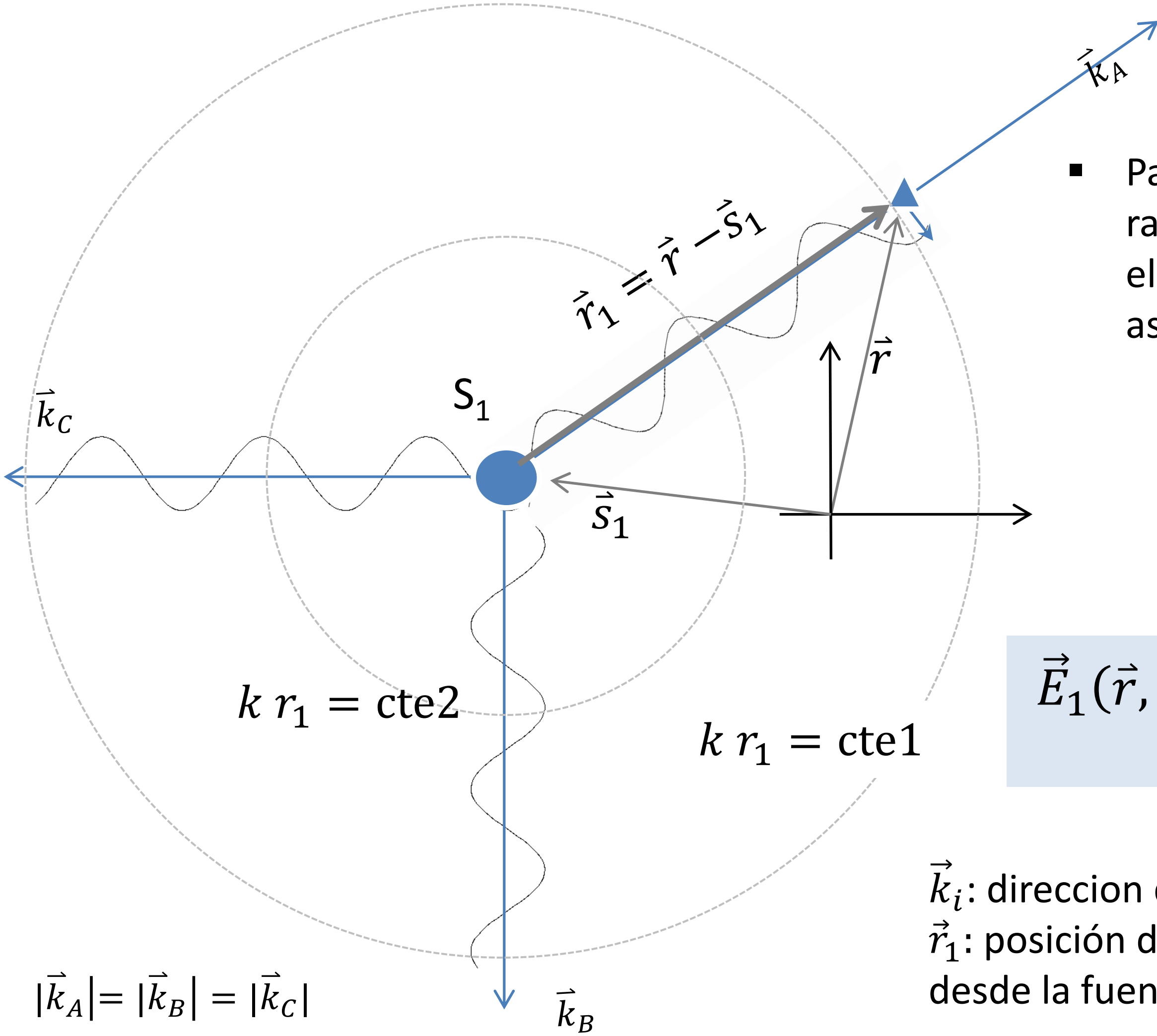
Parte 2

Habiamos visto...

Una fuente puntual

y tres de sus rayos

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}.\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$



- Para ondas esféricas la dirección de los rayos es **radial** desde la fuente, por lo que el rayo que pasa por el punto $\vec{r}$ tiene asociado un *vector de onda*:

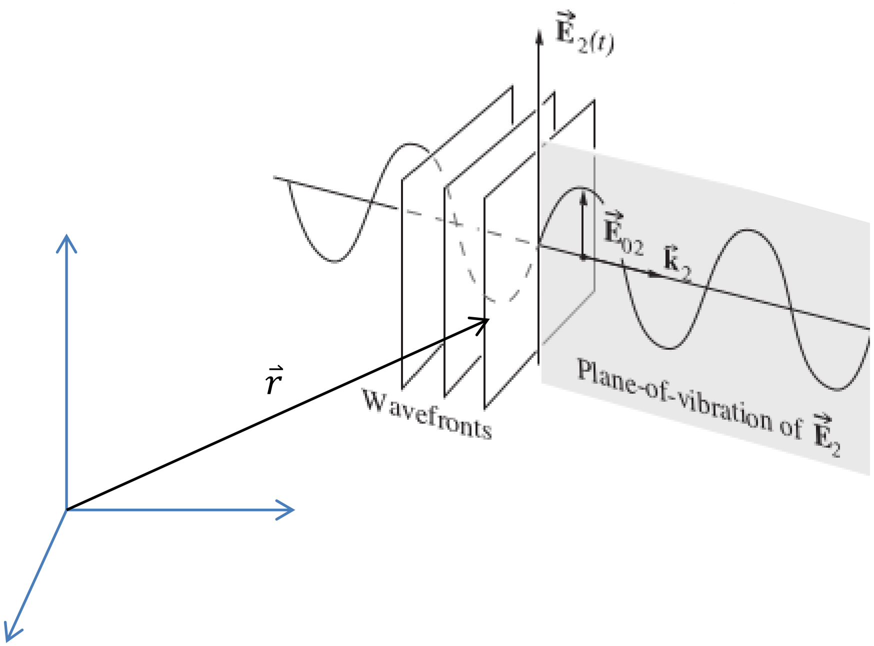
$$\vec{k} = k\,\hat{r}_1$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \vec{k}.\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon_1 \\ &= k\,r_1 - w\,t + \varepsilon_1\end{aligned}$$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k\,r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$

$\vec{k}_i$: direccion del rayo i
$\vec{r}_1$: posición del punto de interes $\vec{r}$, medida desde la fuente S_1

Como describo ondas planas?



$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\underbrace{\vec{k}_2.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$

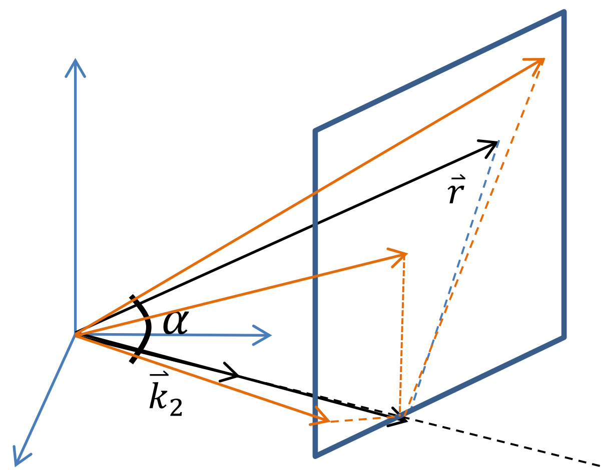
Onda de fase constante sobre planos perpendiculares a la dirección de propagación

La condición que satisfacen todos los puntos del plano perpendicular a $\vec{k}_2$ es:

Producto escalar

$$\vec{k}_2.\vec{r} = cte$$

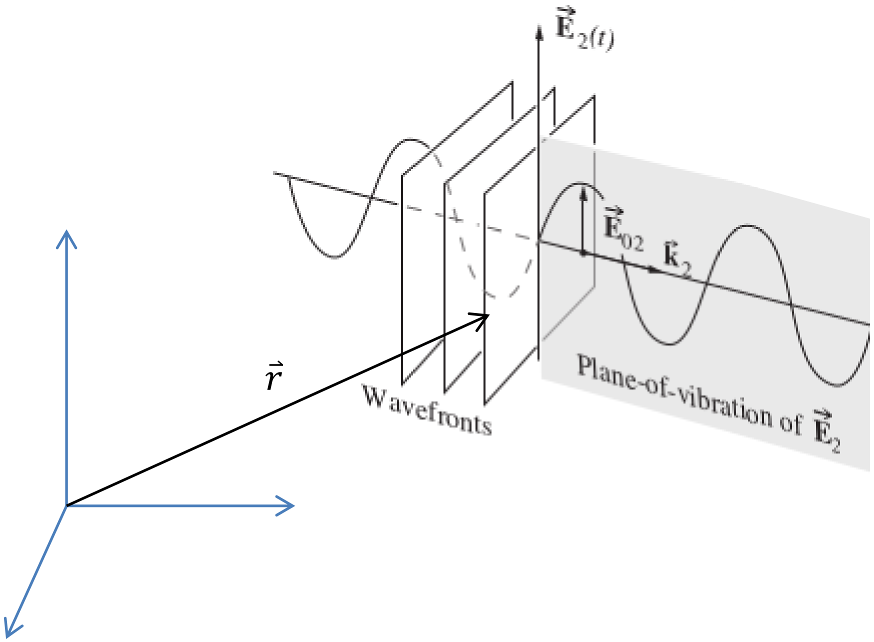
$$\vec{k}_2.\vec{r} = |\vec{k}_2|.|\vec{r}|\cos\alpha = cte$$



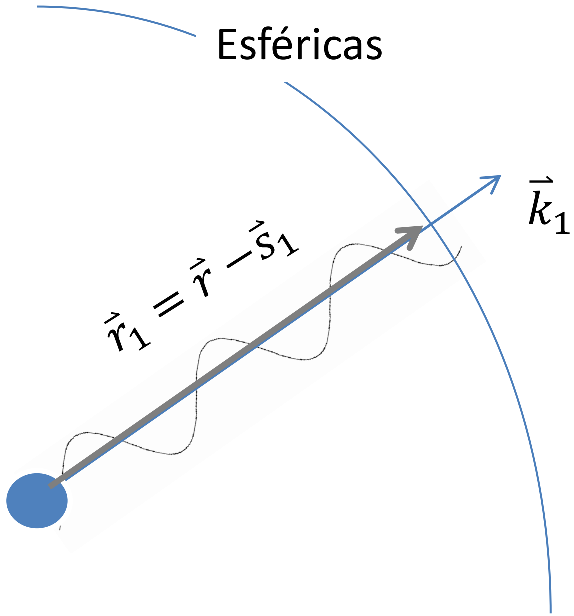
Dado $\vec{k}_2$, todos los puntos que tengan igual producto escalar con él, perteneceran a un mismo plano (perpendicular a $\vec{k}_2$)

Como describo ondas?

Planas



Esféricas



$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\underbrace{\vec{k}_2.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{\vec{k}_1.\vec{r}_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$

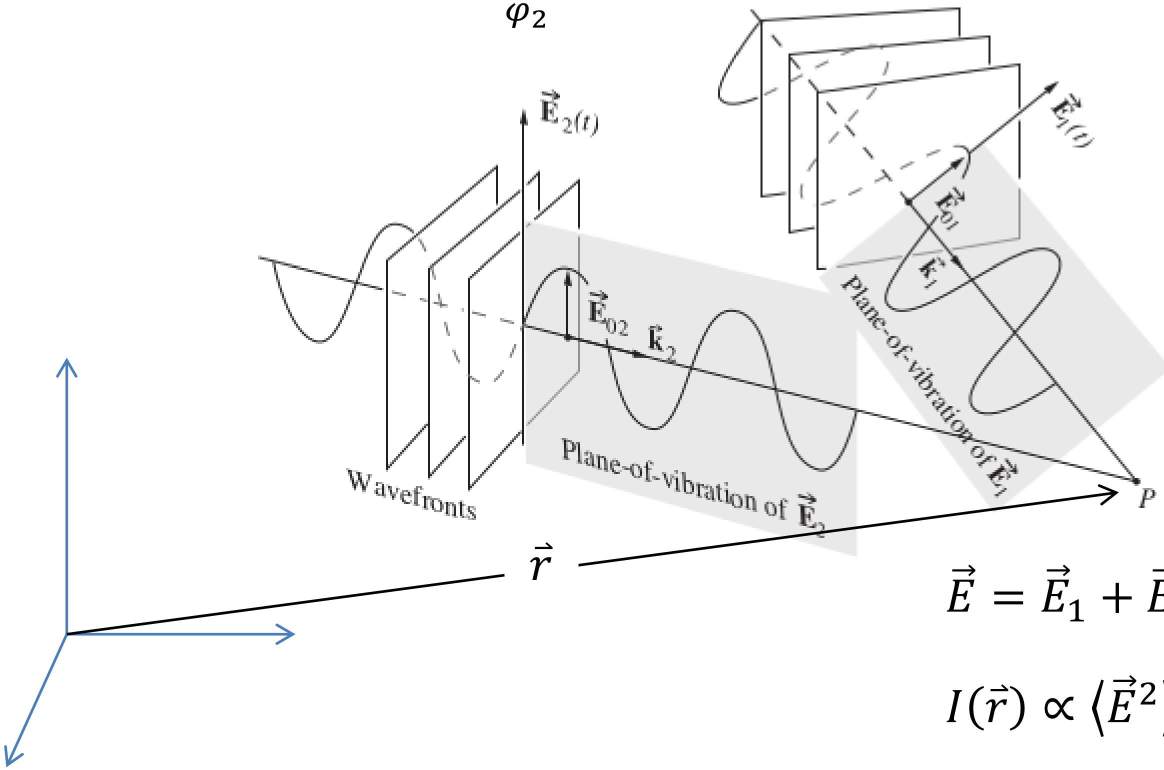
Onda de fase constante sobre planos perpendiculares a la dirección de propagación

Onda de fase constante sobre esferas centradas en S_1 (y por tanto… perpendiculares a la dirección de propagación)

Ahora si…sabemos como describirlas, sabemos lo que esperamos …calculemos como interfieren dos ondas planas*

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}\cos(\underbrace{\vec{k}_2.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}\cos(\underbrace{\vec{k}_1.\vec{r} - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$



$$\vec{E}^2 = (\vec{E}_1 + \vec{E}_2).(\vec{E}_1 + \vec{E}_2)$$

$$= \vec{E}_1^{\,2} + \vec{E}_2^{\,2} + 2\vec{E}_1.\vec{E}_2$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

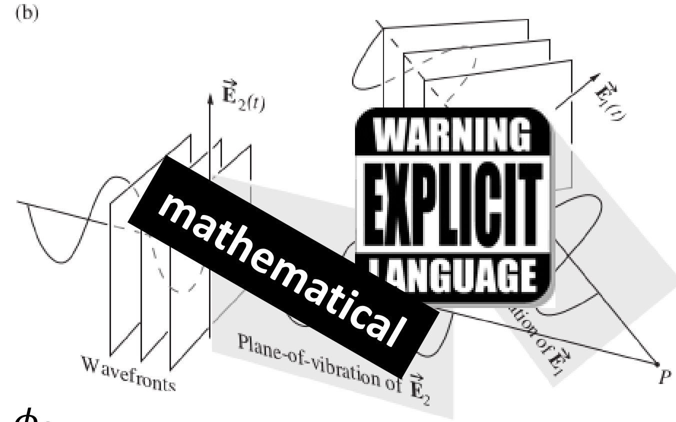
$$I(\vec{r}) \propto \langle \vec{E}^2 \rangle \quad = \left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle + \left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle + 2\langle \vec{E}_1.\vec{E}_2 \rangle$$

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}$$

Término de interferencia

*Para dos ondas esfericas se muy similar, solo que hay que usar la fase correspondiente

El término de interferencia



$$I = \underbrace{\left\langle {\vec{E}_1}^2 \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle {\vec{E}_2}^2 \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

$$\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle = \vec{E}_{01} . \vec{E}_{02} < \cos(\overbrace{\vec{k}_1 . \vec{r} + \varepsilon_1}^{\phi_1} - w\,t) \cos(\overbrace{\vec{k}_2 . \vec{r} + \varepsilon_2}^{\phi_2} - w\,t) >$$

$$= \vec{E}_{01} . \vec{E}_{02} < [\cos(\phi_1)\ \cos(w\,t) + \sin(\phi_1) \sin(w\,t)] *$$

$$[\cos(\phi_2)\ \cos(w\,t) + \sin(\phi_2) \sin(w\,t)]>$$

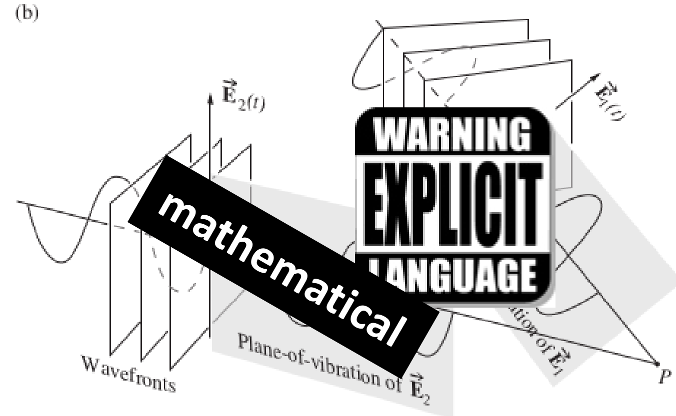
$$\cos(a - b) = \cos(a)\ \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

Como si fuera poca maldad … ahora distribuyo:

$$< \vec{E}_{01} . \vec{E}_{02}\ [\cos(\phi_1) \cos(\phi_2)\ \cos^2(w\,t) + \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) \sin^2(w\,t)\ +$$

$$\cos(\phi_1) \sin(\phi_2) \sin(w\,t) \cos(w\,t) + \sin(\phi_1) \cos(\phi_2)\ \cos(w\,t) \sin(w\,t)]>$$

El término de interferencia

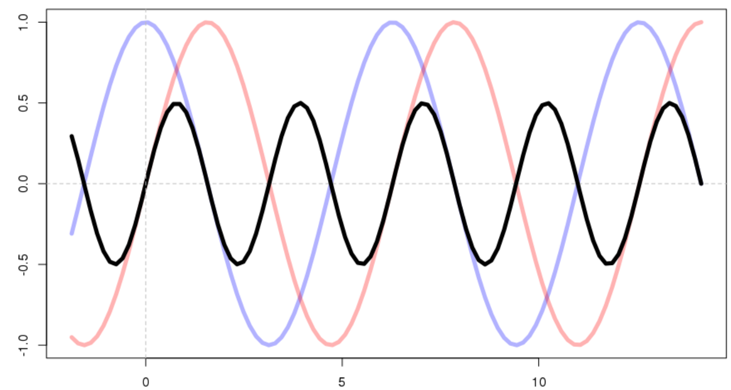


$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle}_{I_{12}}$$

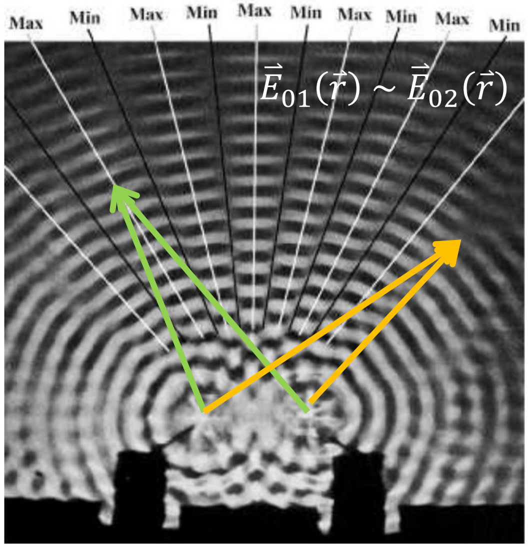
$$\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle =$$

$$\vec{E}_{01} . \vec{E}_{02} \, [\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) \; \overbrace{\langle \cos^2(w\,t) \rangle}^{1/2} + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2) \, \overbrace{\langle \sin^2(w\,t) \rangle}^{1/2} +$$

$$[\cos(\phi_1)\sin(\phi_2) + \sin(\phi_1)\cos(\phi_2)\,] \underbrace{\langle \cos(w\,t) \sin(w\,t) \rangle}_{0} \,]$$



El término de interferencia



$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

$$\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle = \frac{\vec{E}_{01} . \vec{E}_{02}}{2} [\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) \ + \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)]$$

$$\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle = \frac{\vec{E}_{01} . \vec{E}_{02}}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\vec{E}_{01} . \vec{E}_{02}}{2} \cos\Delta\varphi$$

$$\Delta\varphi = (\overbrace{\vec{k}_2 . \vec{r} + \varepsilon_2}^{\phi_2} - w\,t) - (\overbrace{\vec{k}_1 . \vec{r} + \varepsilon_1}^{\phi_1} - w\,t) = \Delta\phi$$

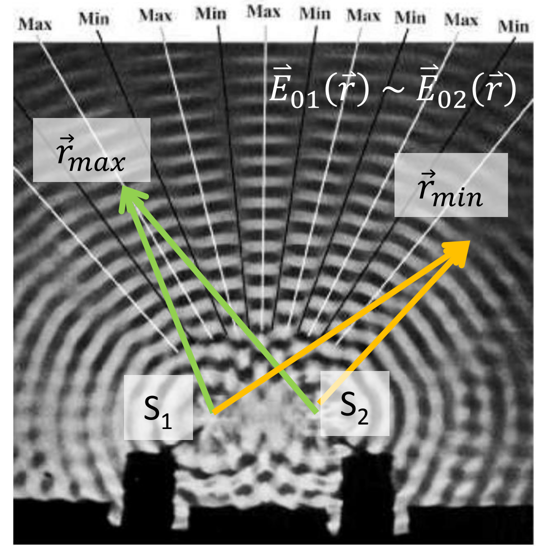
$$I = \frac{\vec{E}_{01}^{\,2}}{2} + \frac{\vec{E}_{02}^{\,2}}{2} + \vec{E}_{01} . \vec{E}_{02} \cos\Delta\varphi(\vec{r})$$

Notar:

- Los terminos I_1 e I_2 son constantes
- I_{12} varia en el espacio : $\Delta\varphi = \Delta\varphi(\vec{r})$
- I_{12} se anula si $\vec{E}_{01} \perp \vec{E}_{02}$

*Para dos ondas esfericas se muy similar, solo que hay que usar la fase correspondiente

El término de interferencia



$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\left\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \right\rangle}_{I_{12}}$$

$$\boxed{I = \frac{\vec{E}_{01}^{\,2}}{2} + \frac{\vec{E}_{02}^{\,2}}{2} + \vec{E}_{01}\,\vec{E}_{02}\cos\Delta\varphi(\vec{r})}$$

Notar:

- Los terminos I_1 e I_2 son constantes
- I_{12} varia en el espacio : $\Delta\varphi = \Delta\varphi(\vec{r})$
- I_{12} se anula si $\vec{E}_{01} \perp \vec{E}_{02}$

Nos vamos a concentrar en el caso particular de dos ondas que oscilan en la **misma dirección** con **igual amplitud**

$$\vec{E}_{01} = \vec{E}_{02} \equiv \vec{E}_0$$

$$I = \frac{E_0^{\,2}}{2} + \frac{E_0^{\,2}}{2} + E_0 E_0 \cos\Delta\varphi(\vec{r})$$

$$I = E_0^{\,2}\,(1 + \cos\Delta\varphi(\vec{r}))$$

$$I = 2\,I_0(1 + \cos\Delta\varphi(\vec{r}))$$

$$\boxed{I = 4\,I_0\cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)}$$

$$1 + \cos\Delta = 1 + \cos(\frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2})$$

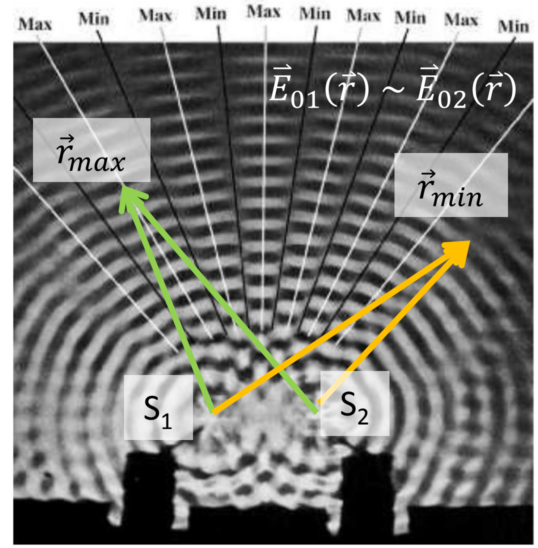
$$= 1 + \cos(\frac{\Delta}{2})\cos(\frac{\Delta}{2}) - \sin(\frac{\Delta}{2})\sin(\frac{\Delta}{2})$$

$$= 1 + \cos^2(\frac{\Delta}{2}) - \sin^2(\frac{\Delta}{2})$$

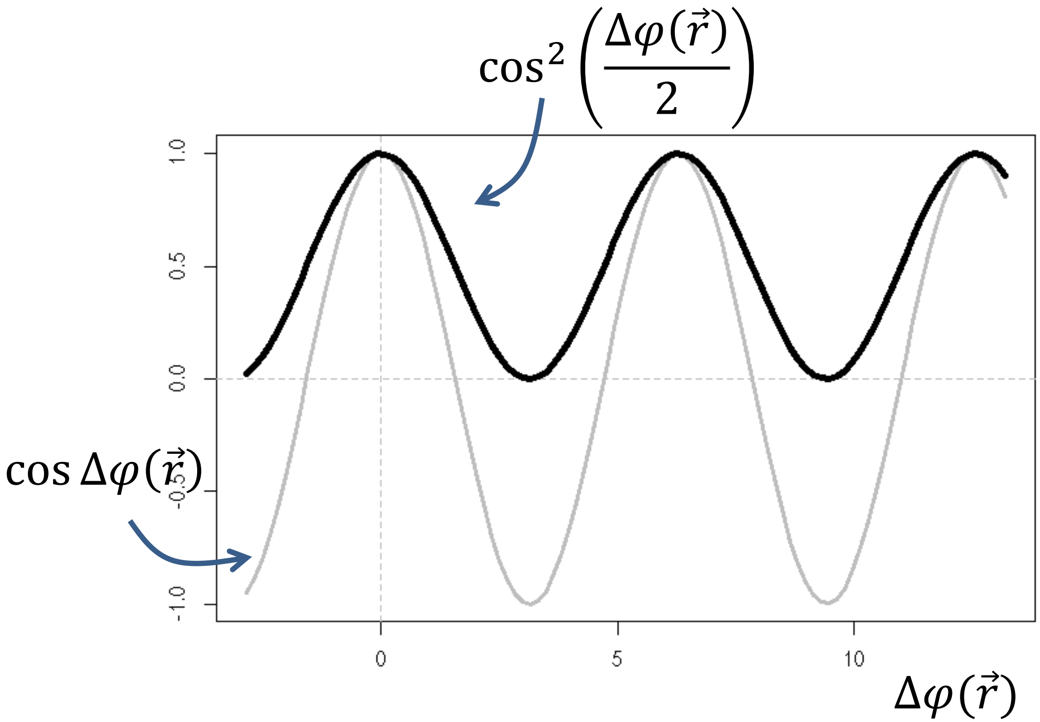
$$= \underbrace{1 - \sin^2(\frac{\Delta}{2})}_{\cos^2(\frac{\Delta}{2})} + \cos^2(\frac{\Delta}{2})$$

$$= 2\cos^2(\frac{\Delta}{2})$$

Perturbaciones paralelas



$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$



Habrá **máxima irradiancia** para aquellos sitios $\vec{r}_{max}$ tales que

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m$$

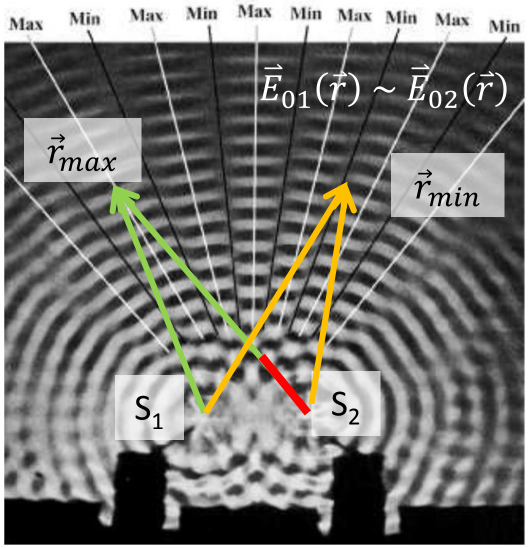
Habrá **mínima irradiancia** para aquellos sitios $\vec{r}_{min}$ tales que

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = \pi(2m+1)$$

Maximos

$$I = \underbrace{\left\langle \vec{E}_1^{\,2} \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle \vec{E}_2^{\,2} \right\rangle}_{I_2} + \underbrace{2\langle \vec{E}_1 . \vec{E}_2 \rangle}_{I_{12}}$$

$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$



$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m \longrightarrow I = 4\, I_0$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = \pi(2m+1) \longrightarrow I = 0$$

Empecemos analizando los **máximos** para fuentes que oscilan en fase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon)$:

$$\boxed{\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m}$$

$$(k_2 r_{max2} - w\,t + \varepsilon) - (k_1 r_{max1} - w\,t + \varepsilon) = 2\pi m$$

$$k(r_{max2} - r_{max1}) = 2\pi m$$

$$(r_{max2} - r_{max1}) = \frac{2\pi m}{k}$$

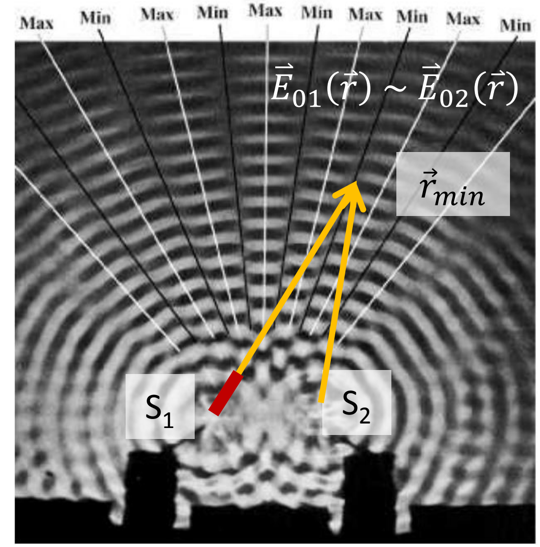
$$\boxed{(r_{max2} - r_{max1}) = m\lambda}$$

Los máximos ocurren en aquellas posiciones para las cuales:

- la diferencia de fases resulta un número entero de veces 2π
- O equivalentemente: la diferencia de caminos resulta un número entero de longitudes de onda

Applet

…y mínimos



$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m \longrightarrow I = 4\, I_0$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = \pi(2m+1) \longrightarrow I = 0$$

Ahora analicemos los **mínimos** para fuentes que oscilan en fase $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon)$:

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = (2m+1)\pi$$

$$(k_2 r_{min2} - w\,t + \varepsilon) - (k_1 r_{min1} - w\,t + \varepsilon) = (2m+1)\pi$$

$$k(r_{min2} - r_{min1}) = (2m+1)\pi$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = \frac{(2m+1)\pi}{k}$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

Los mínimos ocurren en aquellas posiciones para las cuales:

- la diferencia de fases resulta un número impar de veces π
- O equivalentemente: la diferencia de caminos resulta un número entero de longitudes de onda mas media onda.

Máximos y mínimos en el espacio

Las condiciones max y min definen hiperboloides de revolución

$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$

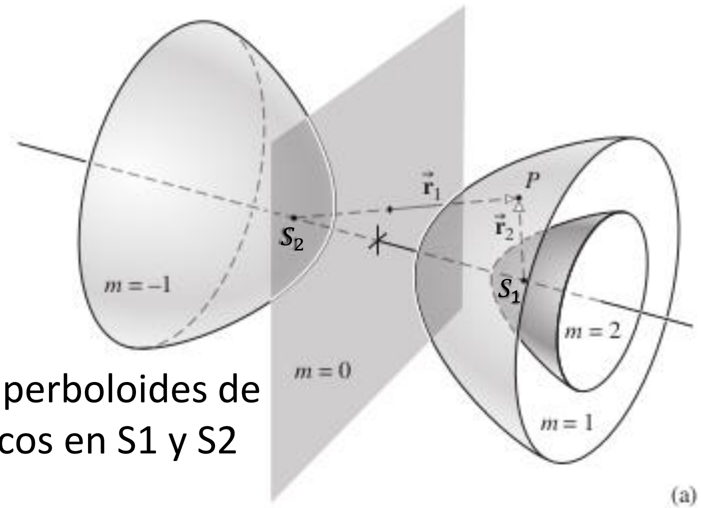
$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m$$

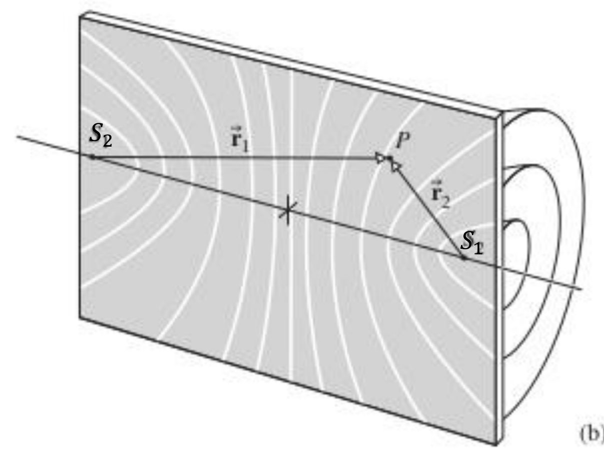
$$(r_{max2} - r_{max1}) = m\lambda$$

Ecs que definen hiperboloides de revolucion, con focos en S1 y S2

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = (2m+1)\pi$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = (m + \frac{1}{2})\lambda$$





Como se ´traducen´ estas condiciones en la disposición espacial de máximos y mínimos?

Máximos y mínimos en el espacio

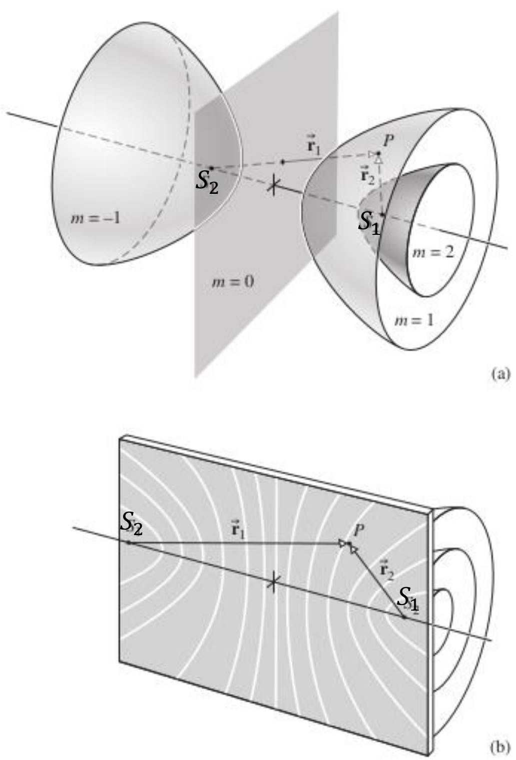
$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$

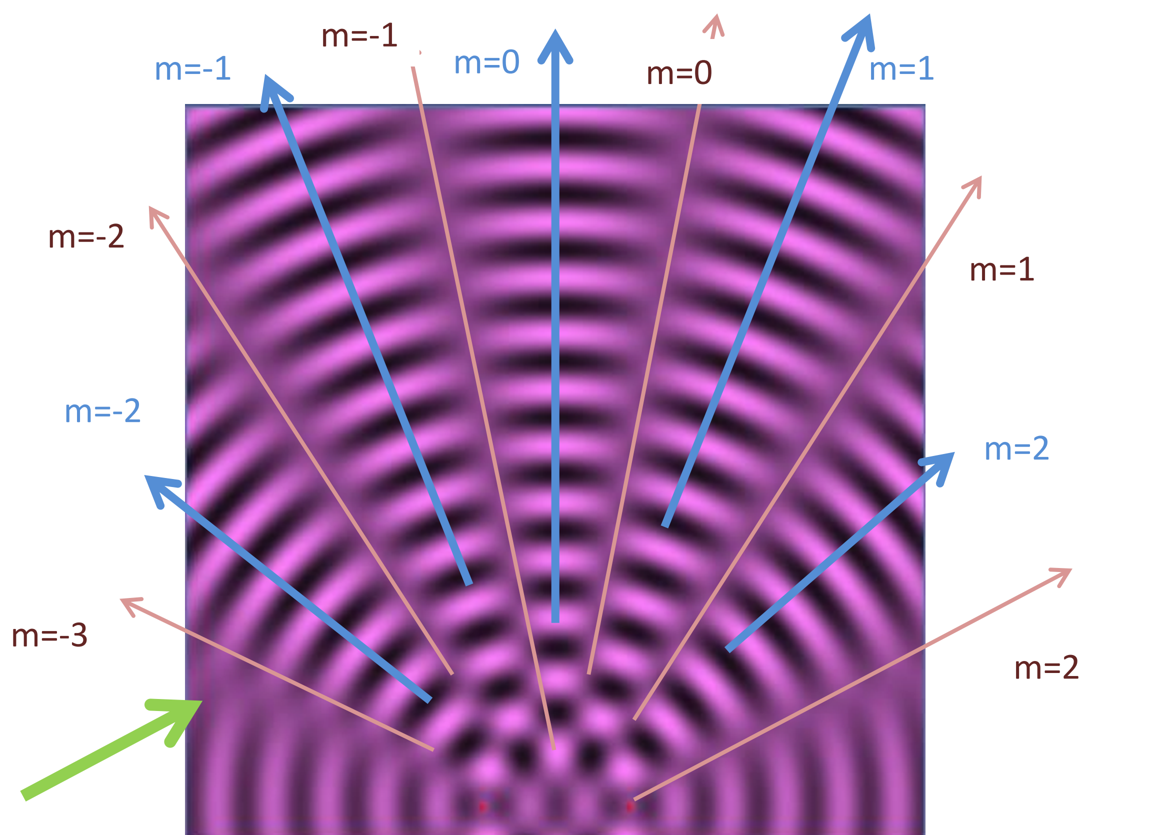
$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m$$

$$\boxed{(r_{max2} - r_{max1}) = m\lambda}$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = (2m+1)\pi$$

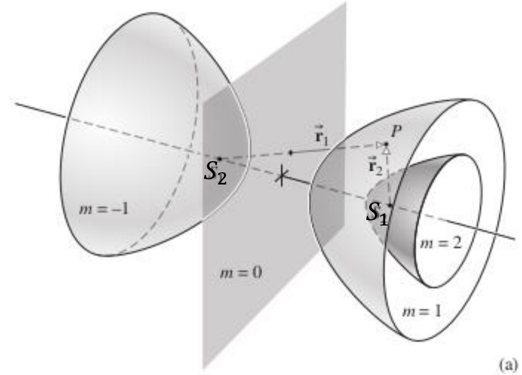
$$\boxed{(r_{min2} - r_{min1}) = (m + \frac{1}{2})\lambda}$$

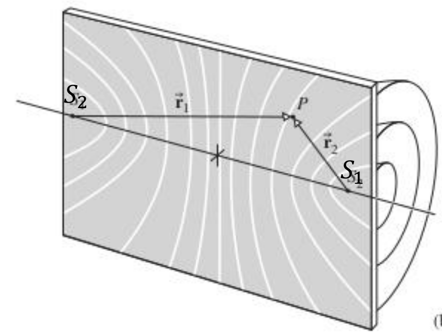


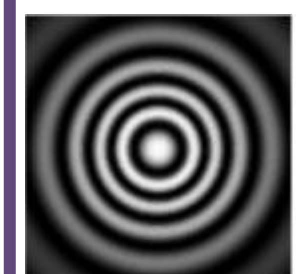


Ojo: no son rectas...son hiperbolas

Que veo?







$$(r_{max2} - r_{max1}) = m\lambda$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

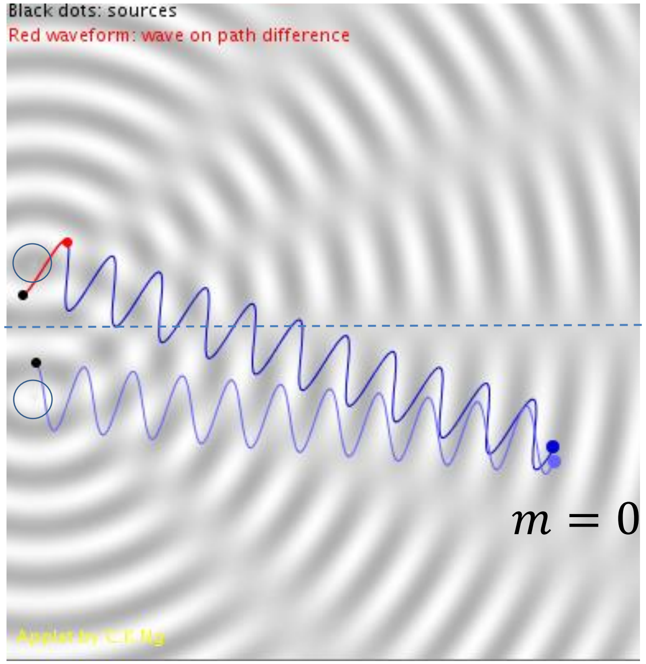
Maximos de fuentes desfasadas ($\varepsilon_2 \neq \varepsilon_1$)

$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m \longrightarrow I = 4\, I_0$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = \pi(2m+1) \longrightarrow I = 0$$

$\Delta\varepsilon = \pi$



Empecemos analizando los **máximos** :

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m$$

$$(k_2 r_{max2} - w\, t + \varepsilon_2) - (k_1 r_{max1} - w\, t + \varepsilon_1) = 2\pi m$$

$$k(r_{max2} - r_{max1}) + \Delta\varepsilon = 2\pi m$$

$$(r_{max2} - r_{max1}) = \frac{2\pi m}{k} - \frac{\Delta\varepsilon}{k}$$

$$(r_{max2} - r_{max1}) = m\lambda - \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\lambda \; = \lambda\left(m - \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\right)$$

El orden cero (m=0) se produce ahora cuando

$$r_{max2} - r_{max1} = -\frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\lambda$$

Applet

Mínimos de fuentes desfasadas

$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m \longrightarrow I = 4\, I_0$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = \pi(2m+1) \longrightarrow I = 0$$

Ahora analicemos los **mínimos**:

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = (2m+1)\pi$$

$$(k_2 r_{min2} - w\, t + \varepsilon_2) - (k_1 r_{min1} - w\, t + \varepsilon_1) = (2m+1)\pi$$

$$k(r_{min2} - r_{min1}) = (2m+1)\pi - \Delta\varepsilon$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = \frac{(2m+1)\pi - \Delta\varepsilon}{k}$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda - \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\lambda = \lambda\left(m + \frac{1}{2} - \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\right)$$

Máximos y mínimos para fuentes desfasadas

$$I = 4\, I_0 \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi(\vec{r})}{2}\right)$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{max}) = 2\pi m$$

$$(r_{max2} - r_{max1}) = \lambda\left(m - \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\right)$$

$$\Delta\varphi(\vec{r}_{min}) = (2m + 1)\pi$$

$$(r_{min2} - r_{min1}) = \lambda\left(m + \frac{1}{2} - \frac{\Delta\varepsilon}{2\pi}\right)$$

$\Delta\varepsilon = \pi$