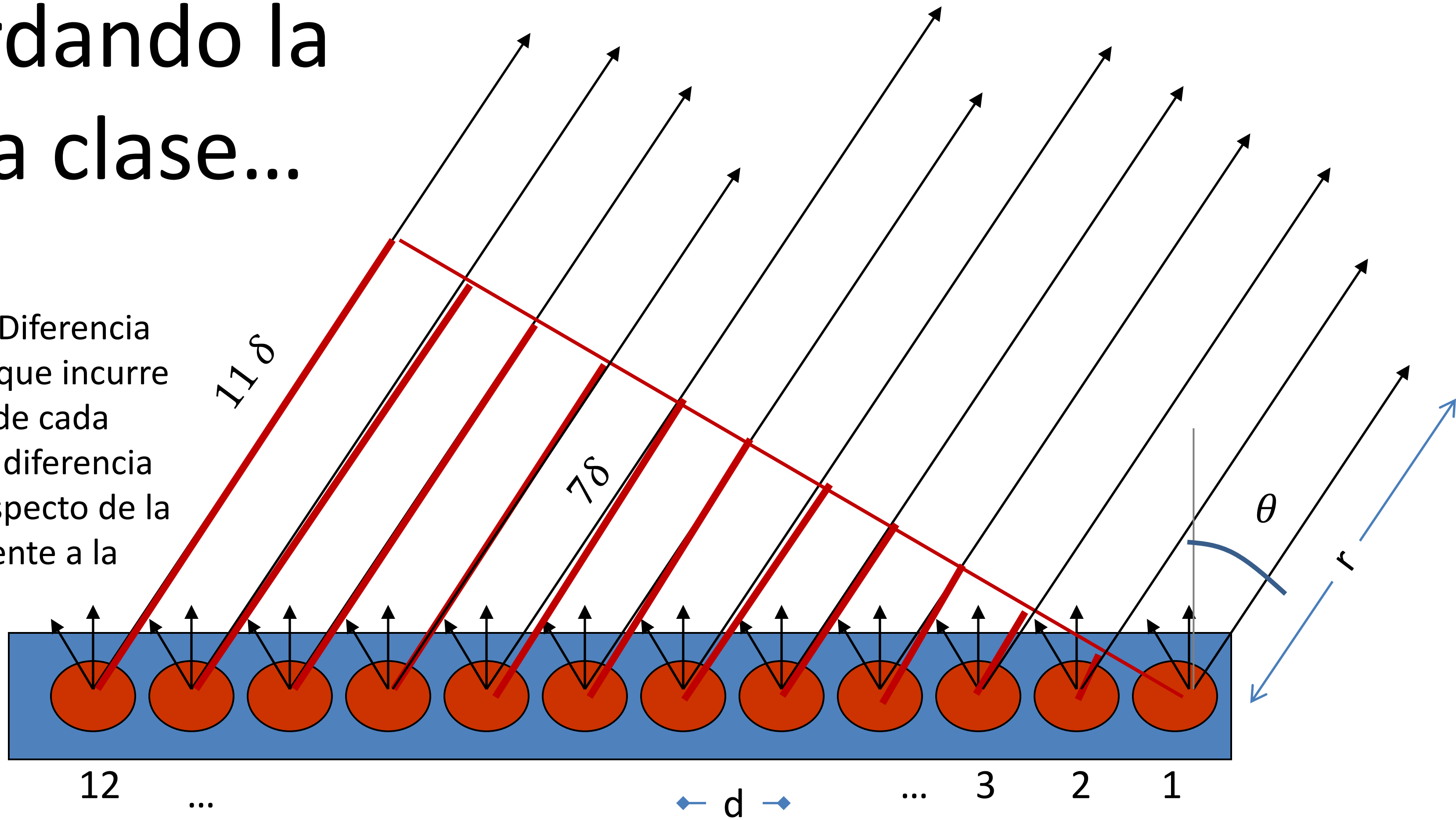
Difraccion 3/3

Ya casi estamos

Recordando la ultima clase…



Diferencia de camino que incurre la emisión de cada fuente (i.e. diferencia de fase) respecto de la primera fuente a la derecha

desfasaje entre una y la siguiente

Para la fuente i-esima, el desfasaje respecto a la primera resulta:

$$k(r_i - r_1) = k((i-1) * d) \sin\theta = (i-1) * \underbrace{k\ d\ \sin\theta}_{\delta} = (i-1) * \delta$$

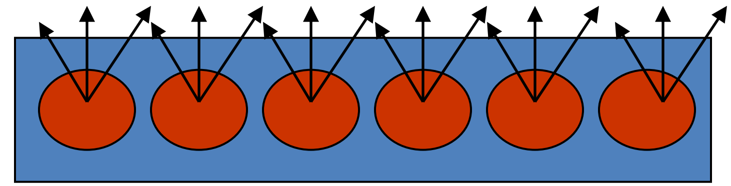
El campo resultante en direccion θ:

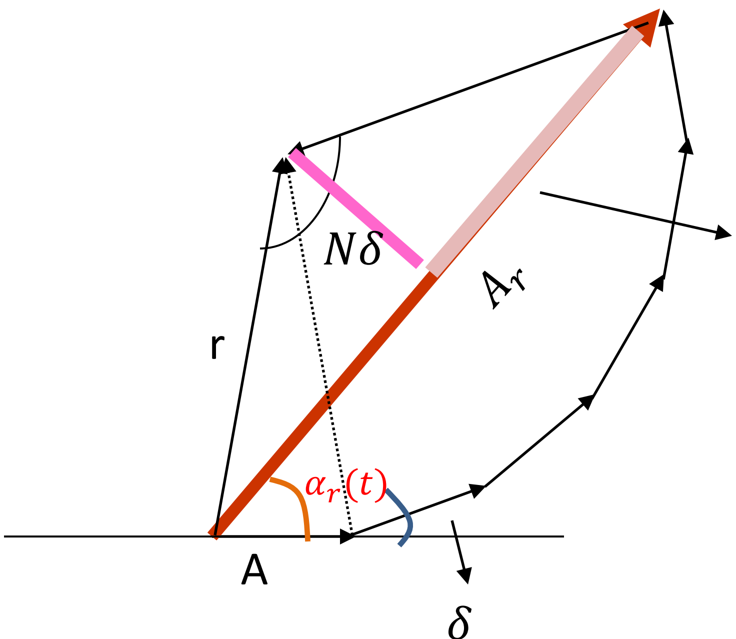
$$R = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) +$$
$$A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{\delta} + wt +$$

con $\delta = k\ d\ \sin\theta$

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

N=6





$$\frac{A_R}{2} = r\ \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$r = \frac{A}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

Amplitud de la onda resultante

$$A_R(\delta) = A\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

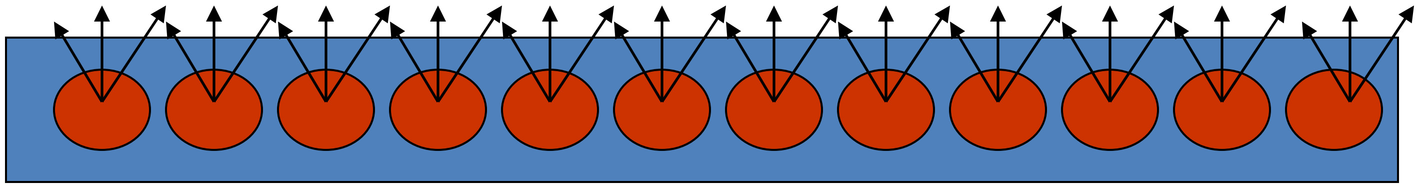
$$E_R = A_R \cos(\alpha_r(t)\ )$$

$$I_R = {A_R}^2 \langle \cos^2(\alpha_r(t)\ ) \rangle$$

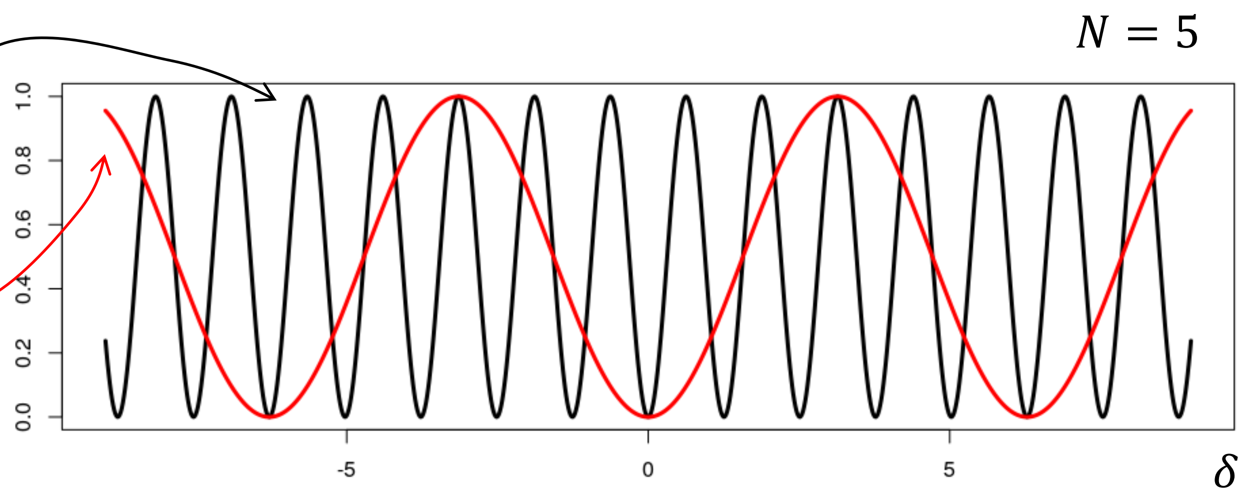
Irradiancia resultante en funcion del desfasaje entre fuentes δ

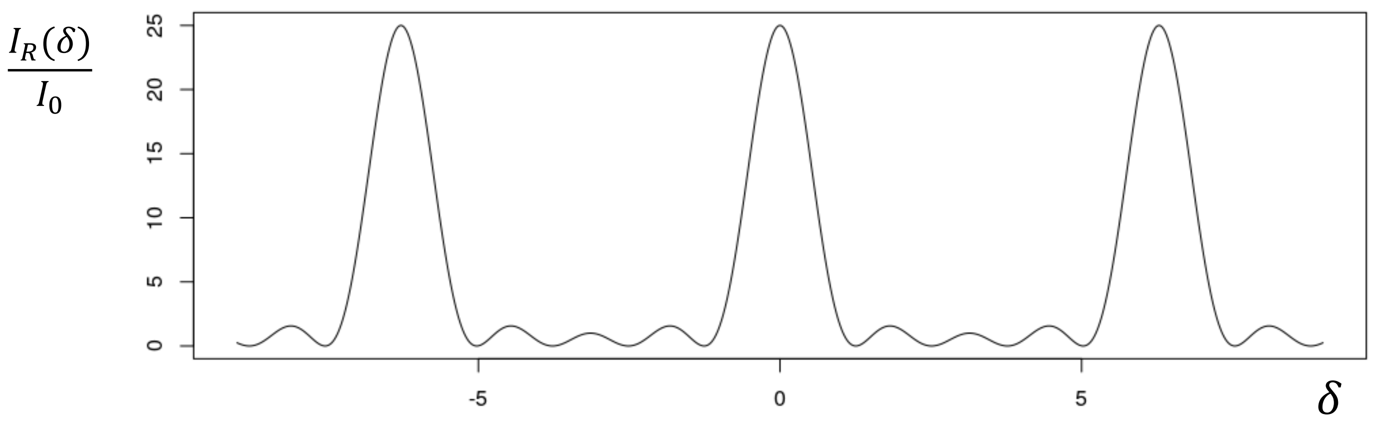
$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

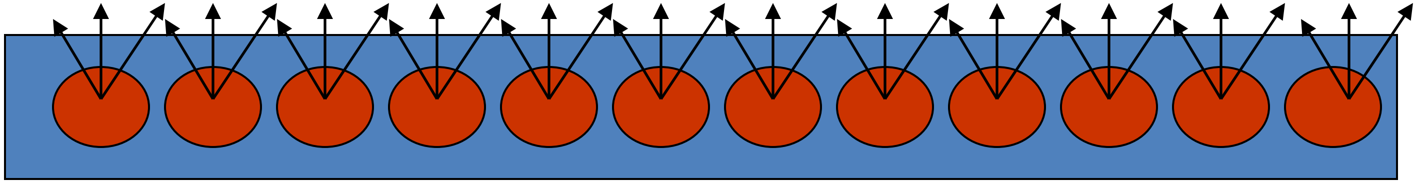


$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

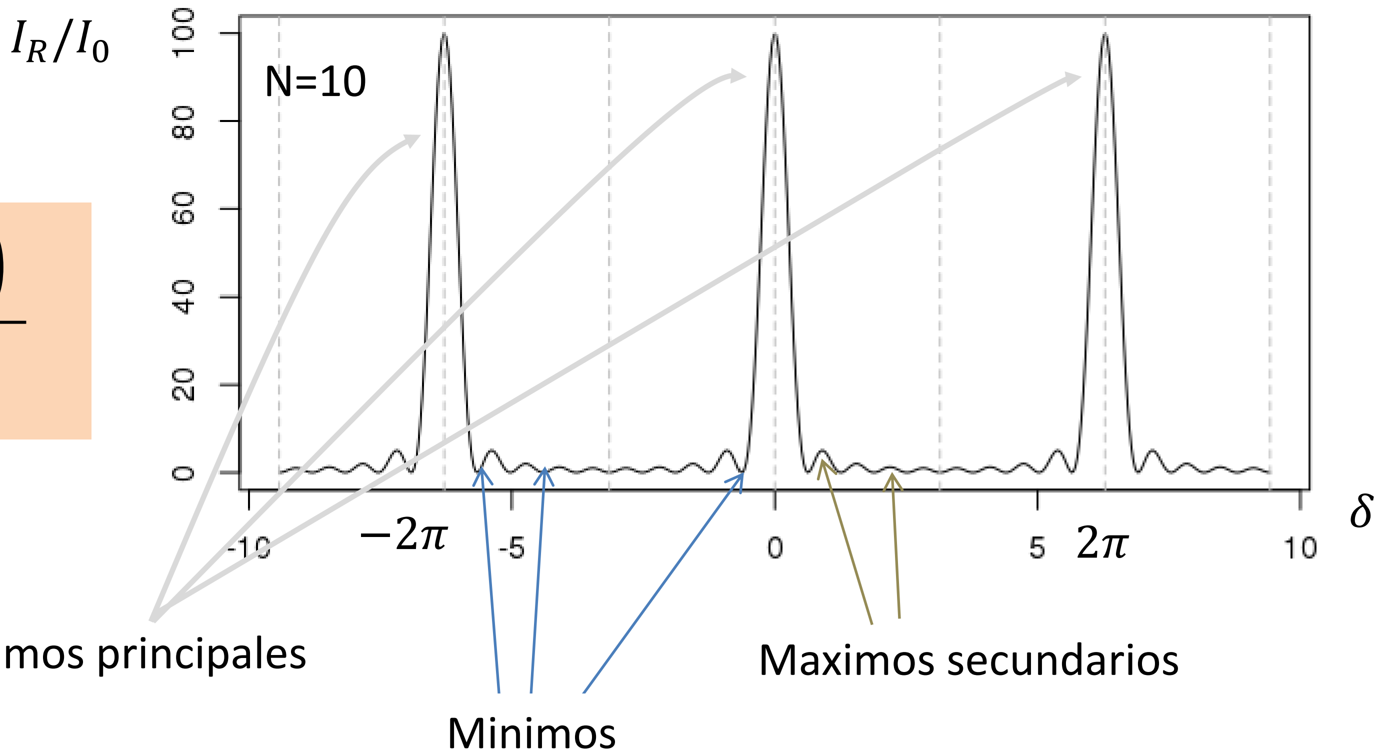




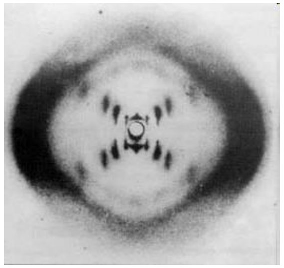
$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

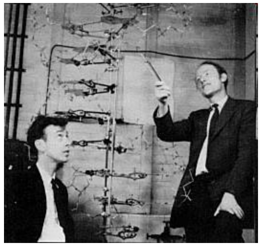


$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

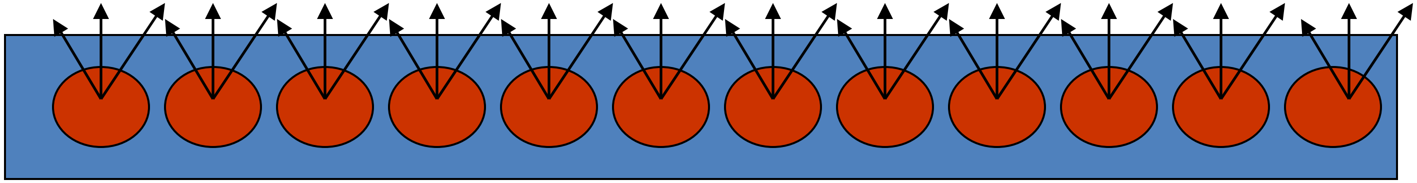


El patron de maximos y minimos tiene mucha estructura relacionada con la geometria de las fuentes. En esto se basan las aplicaciones derivadas de solucionar el **problema inverso** que mencionabamos antes

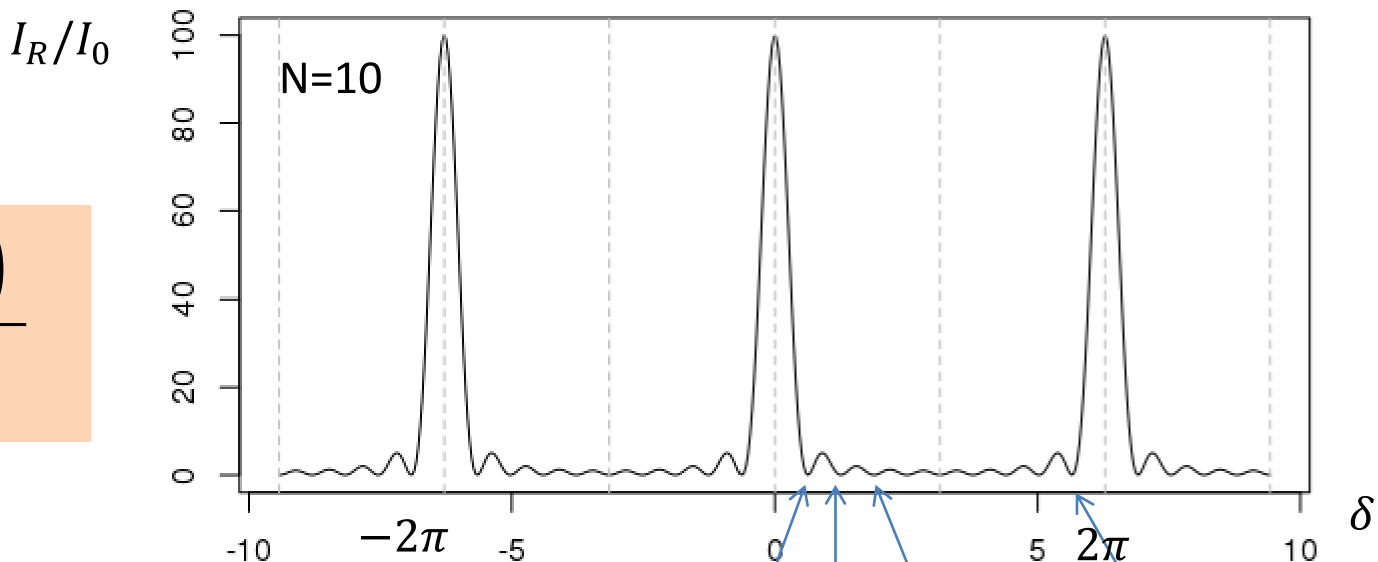




$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



Minimos se producen cuando se anula el numerador, <u>pero no</u> el denominador:

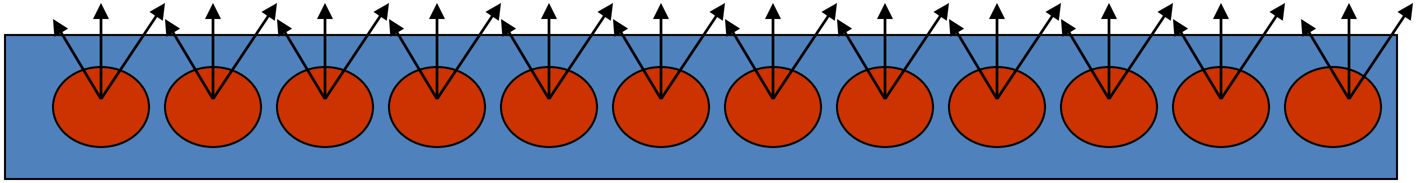
$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = 2m\frac{\pi}{N}$$

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} \neq n\pi \rightarrow \delta \neq 2n\pi$$

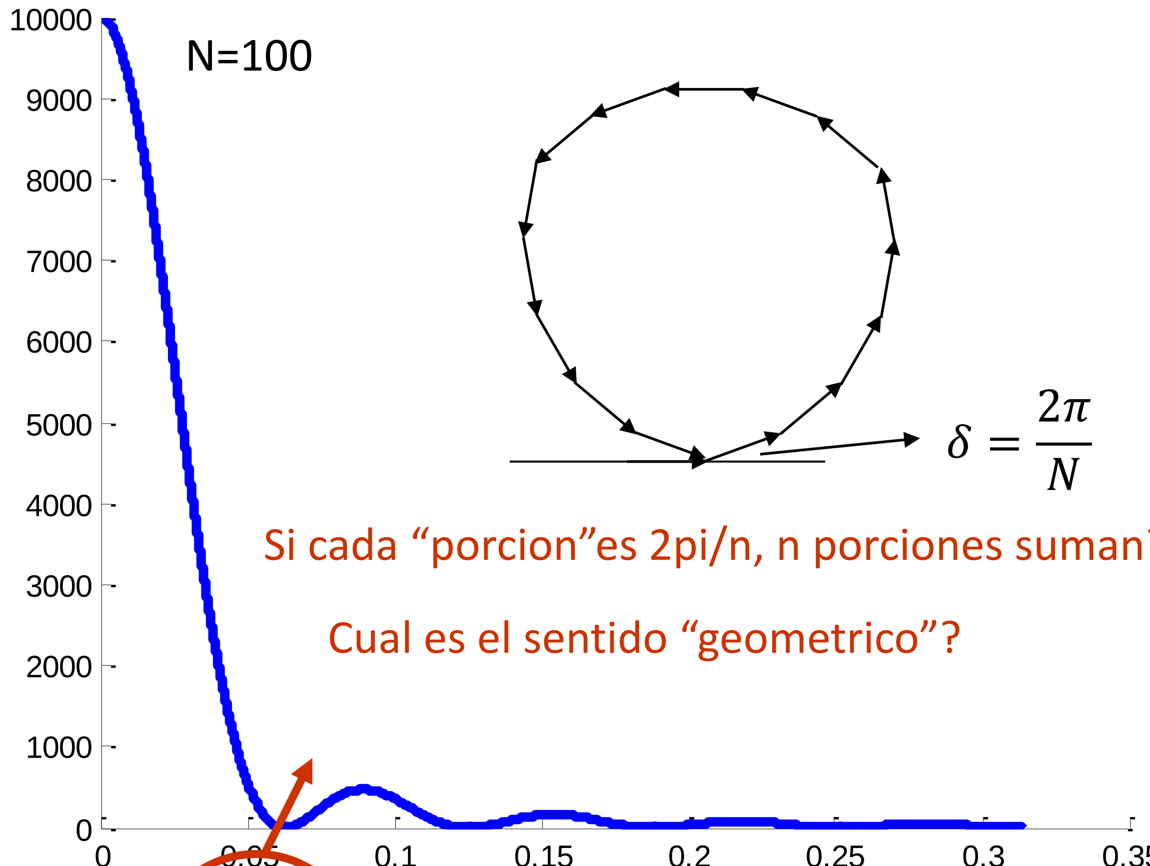
$$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, 3\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\frac{2\pi}{N}$$

Tengo N-1 minimos entre 2 maximos cualesquiera....contando minimos puedo saber cuantas fuentes tengo!

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N} - \boldsymbol{1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



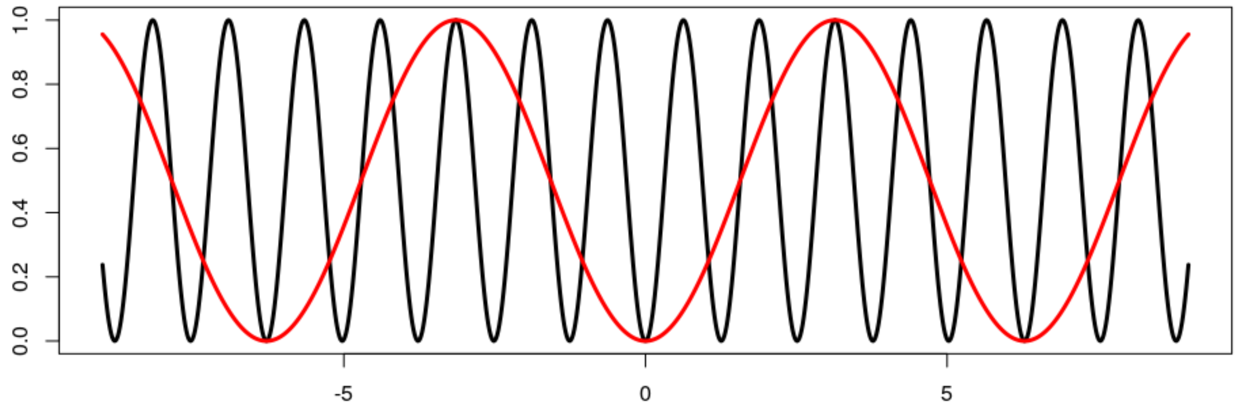
$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



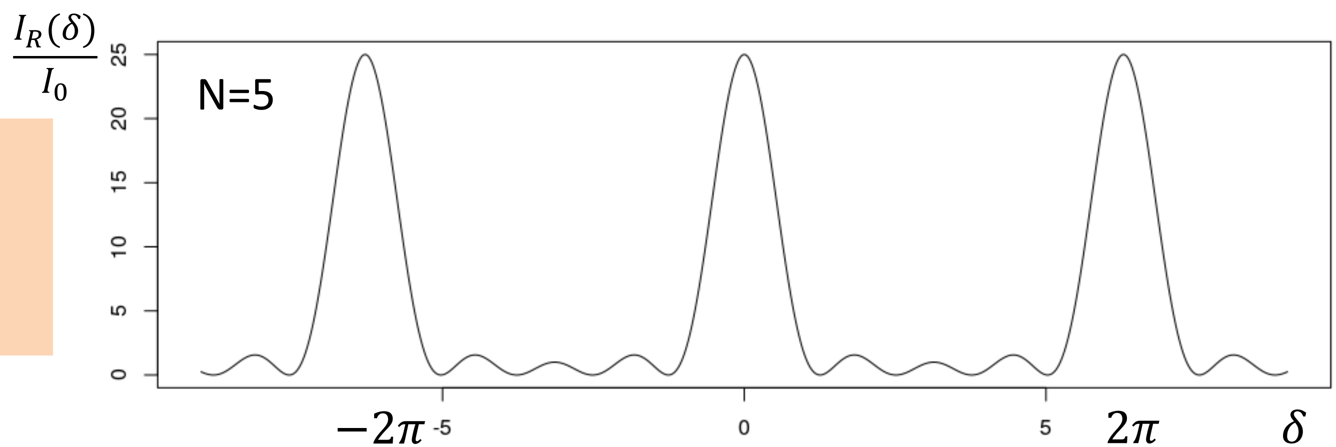
Si cada “porcion”es 2pi/n, n porciones suman?

Cual es el sentido “geometrico”?

$\frac{2\pi}{N}$ $\frac{4\pi}{N}$ $\frac{6\pi}{N}$ δ



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



Maximos principales se producen cuando se anula el denominador (y por tanto tambien el numerador):

$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = m\frac{2\pi}{N}$$

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} = n\pi \rightarrow \boxed{\delta = 2n\pi}$$

(si se cumple esto, se cumple lo de arriba: m=n*N)

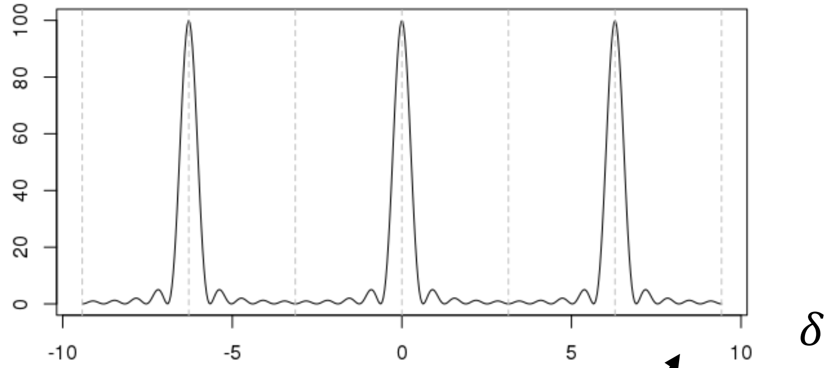
Vemos cuanto valen los max: Si $\delta \rightarrow 0$

$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{N\delta}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \qquad I_R(\delta = 0) = I_0 N^2$$

Ya entendimos como funciona la intensidad emitida de acuerdo al desfasaje

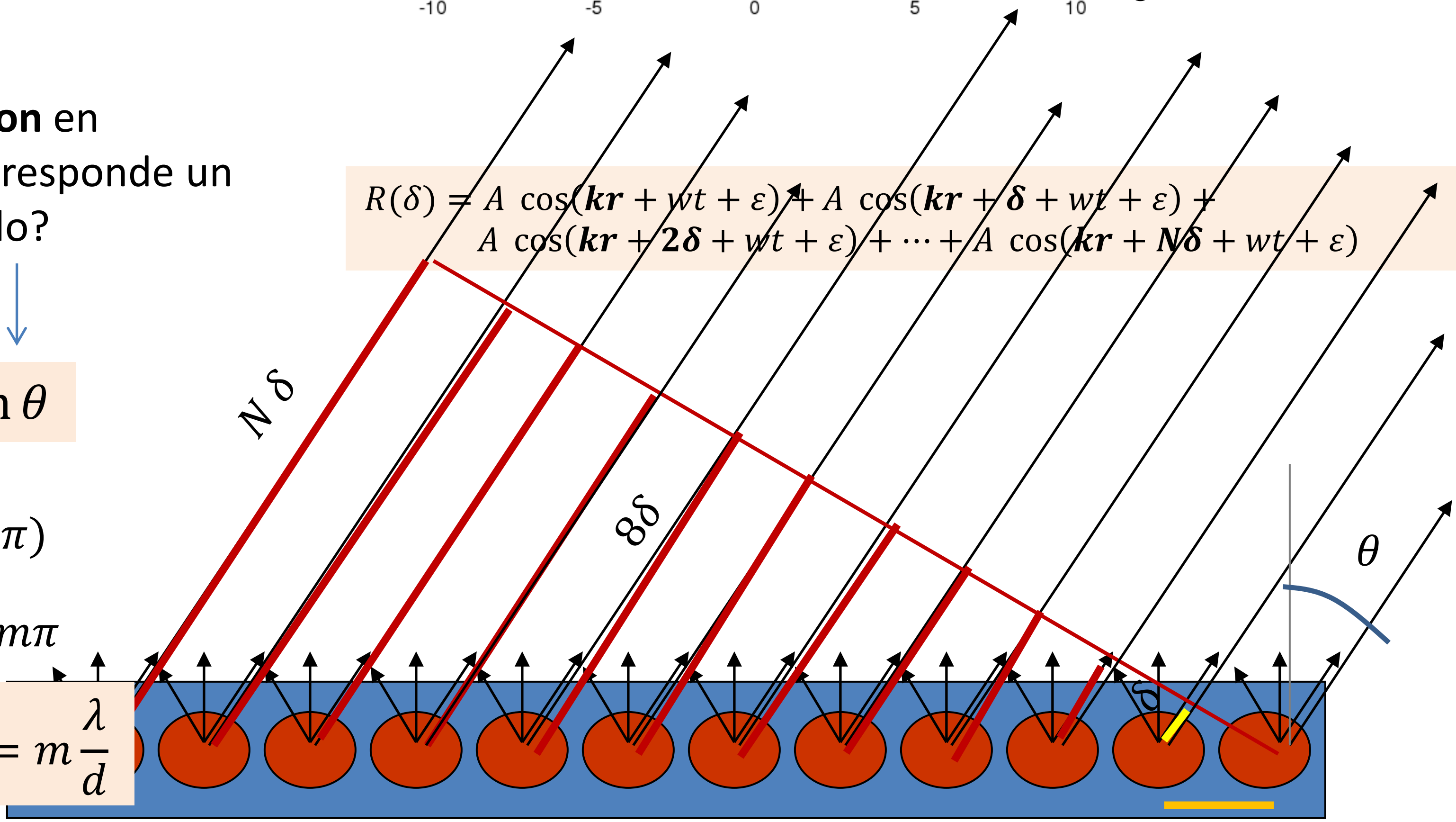
$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



A que **direccion** en particular corresponde un desfasaje dado?

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{N\delta} + wt + \varepsilon)$$

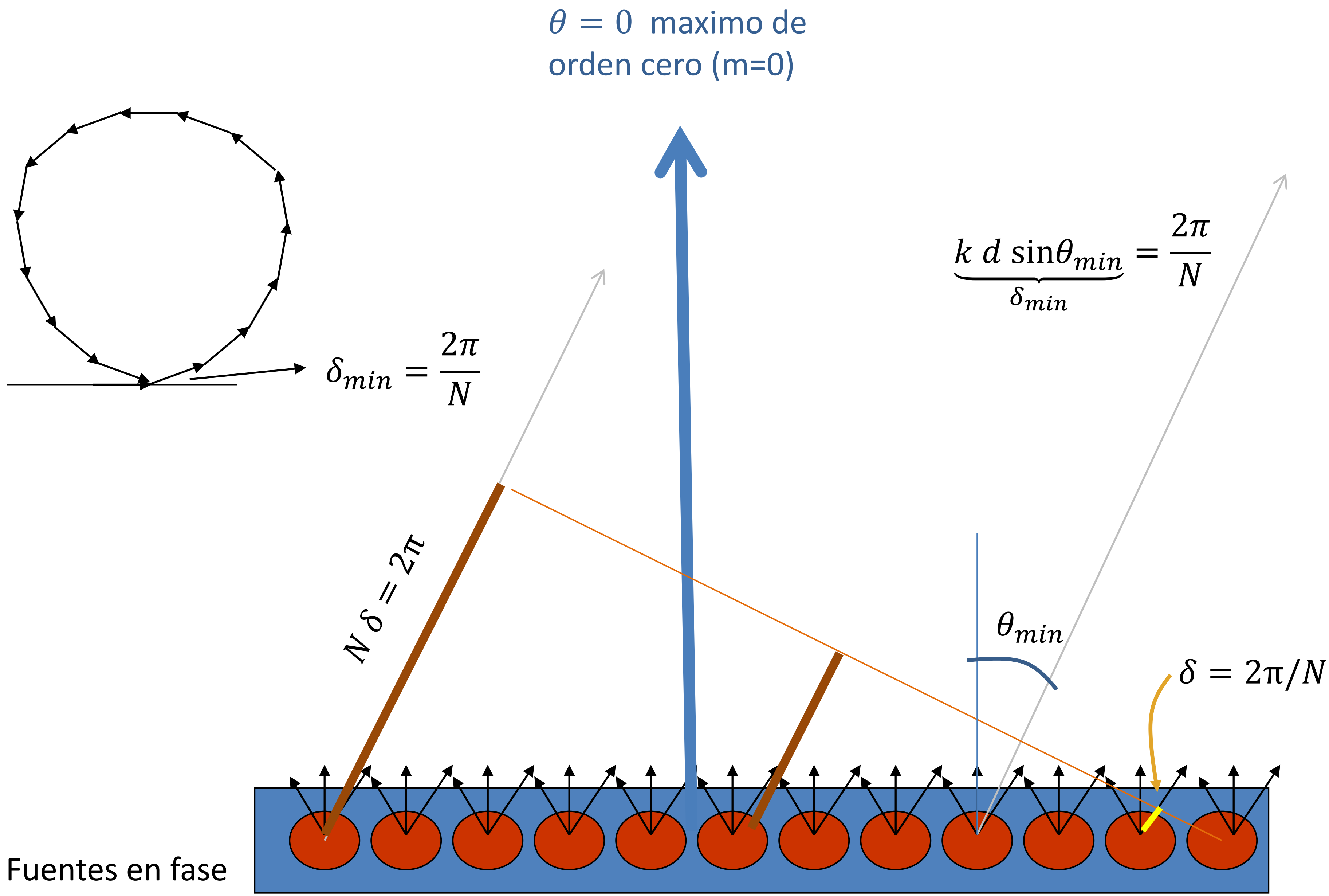


Maximos ($\delta = 2m\pi$)

$$k\ d\ \sin\theta_{max} = 2m\pi$$

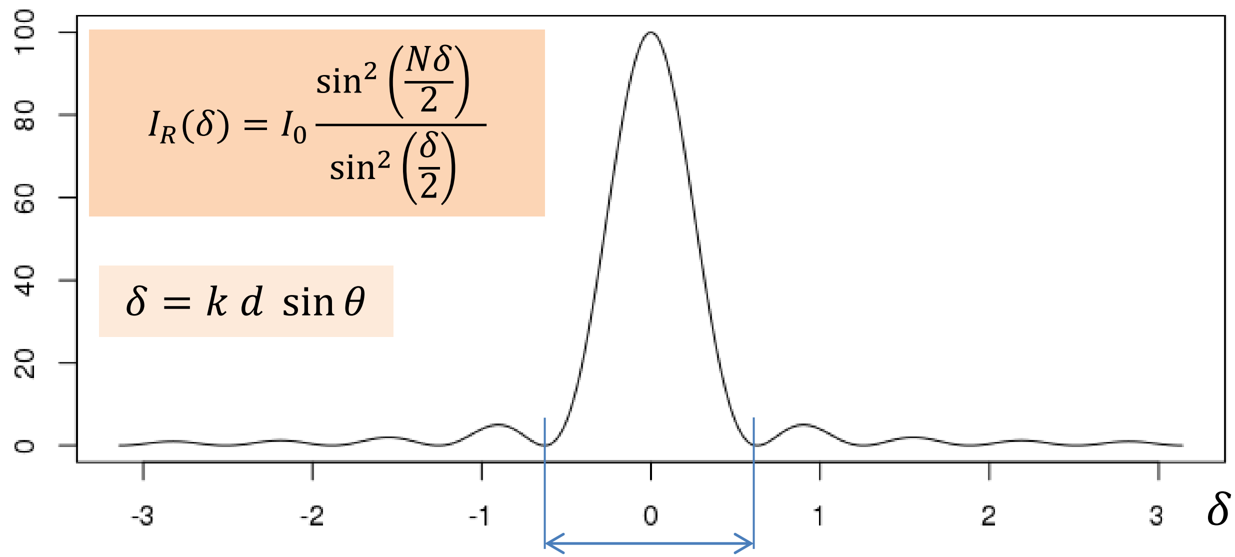
$$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k\ d} = m\frac{\lambda}{d}$$

Notar que si λ/d>1 tengo un unico maximo (!) correspondiente a m=0



$\theta = 0$ maximo de orden cero (m=0)
$\underbrace{k\ d\ \sin\theta_{min}}_{\delta_{min}} = \frac{2\pi}{N}$
$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}$
$N\,\delta = 2\pi$
θ_{min}
$\delta = 2\pi/N$
Fuentes en fase

La campana de interferencia de N fuentes



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

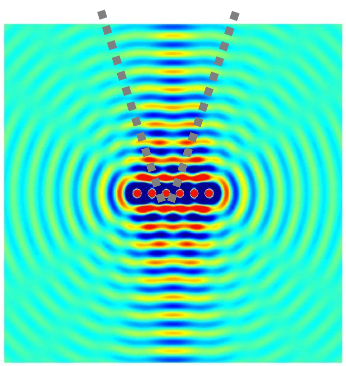
$$-\frac{2\pi}{N} \qquad \Delta_\delta \qquad \frac{2\pi}{N}$$

Maximos ($\delta = 2n\pi$)

$$k\ d\ \sin\theta_{max} = 2m\pi$$

$$d\ \sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k} = m\lambda$$

Notar que si $d < \lambda$ se produce un unico maximo correspondiente m=0

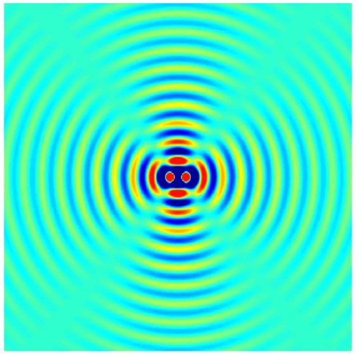


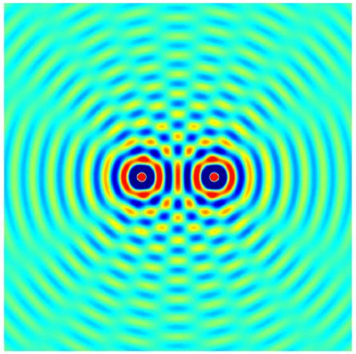
El ancho de la campana principal resulta de analizar los primeros minimos a izq y derecha

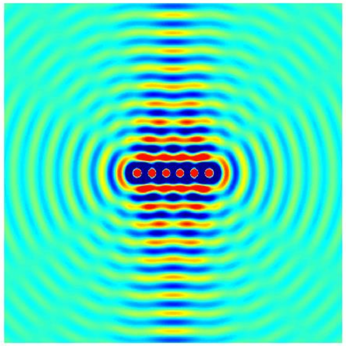
Minimos ($\delta = \pm 2\pi/N$)

$$k\ d\ \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{2\pi}{N} \rightarrow \boxed{\sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}}$$

- $d < \lambda$ para que haya un unico maximo
- Cuantas mas fuentes mas angosto ese maximo







$$\boxed{sen(\theta) = \frac{\lambda}{d}}$$

$$\boxed{sen(\theta) = \frac{\lambda}{D}}$$

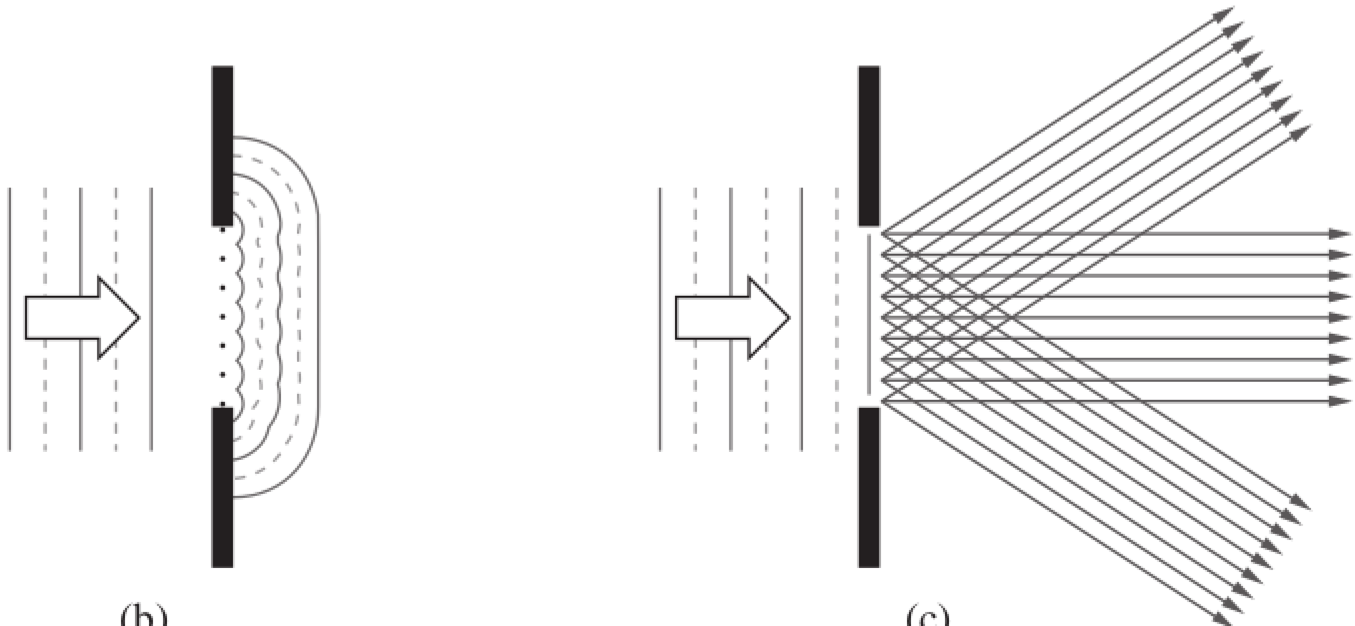
$$\boxed{sen(\theta) = \frac{\lambda}{nd} = \frac{\lambda}{D}}$$

Lo mejor de los dos mundos … un máximo central angosto sin máximos laterales.

Nuevamente una estrategia de borrado constructiva.
Para eliminar los máximos laterales, agregar mas fuentes.

En términos del problema inverso, de adivinar la fuente que emite (o la textura del material que difracta la luz) a partir del espectro. Hay algún problema?

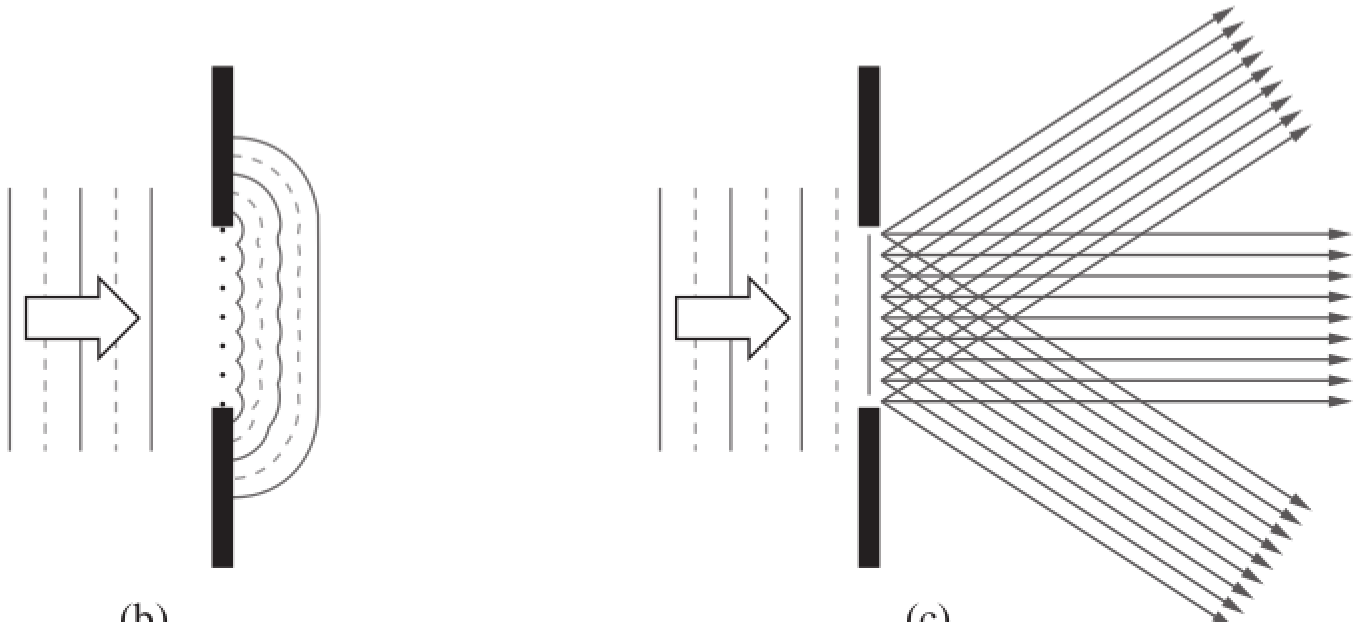
La rendija



(b) (c)

En una rendija de ancho D sobre la que incide luz
Cuantas fuentes hay?

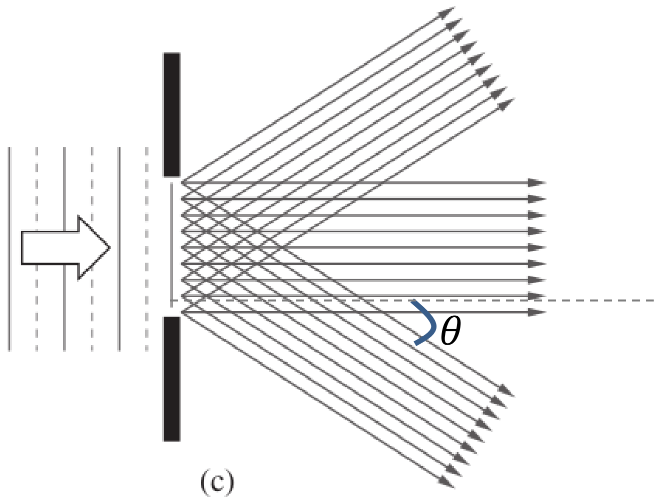
La rendija



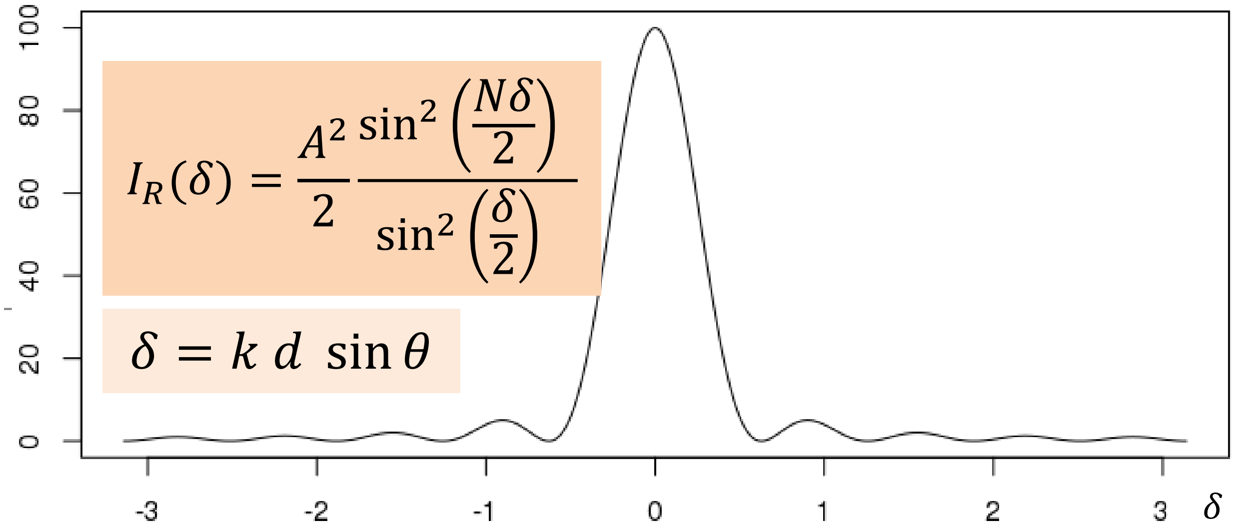
(b) (c)

En una rendija de ancho D sobre la que incide luz
Cuantas fuentes hay?

La rendija

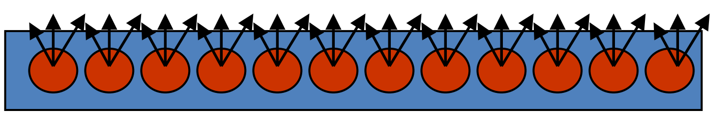


(c)



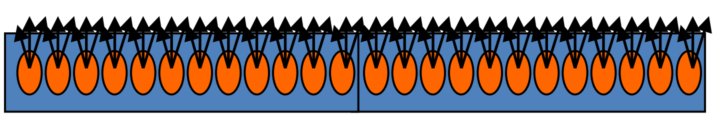
$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\, d\ \sin\theta$$



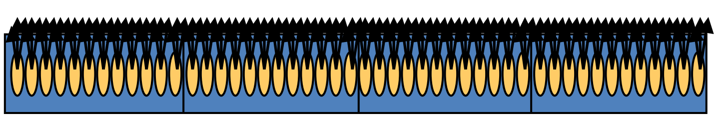
Tengo muchisisimas fuentes (Huygens)

$$\lim N \to \infty$$



Infinitamente cerca unas de otras

$$\lim d \to 0$$



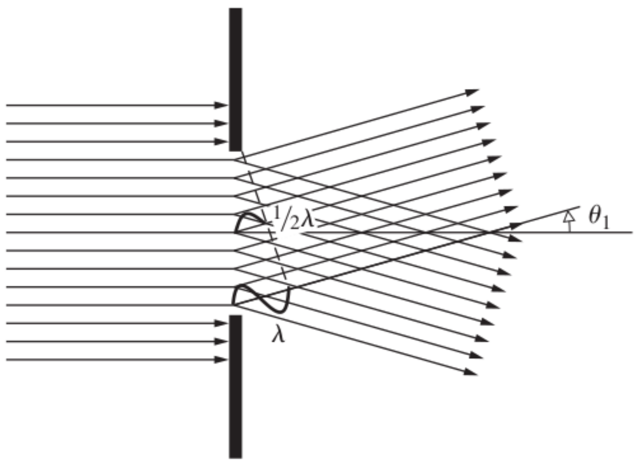
Cada una emite una amplitud diferencial

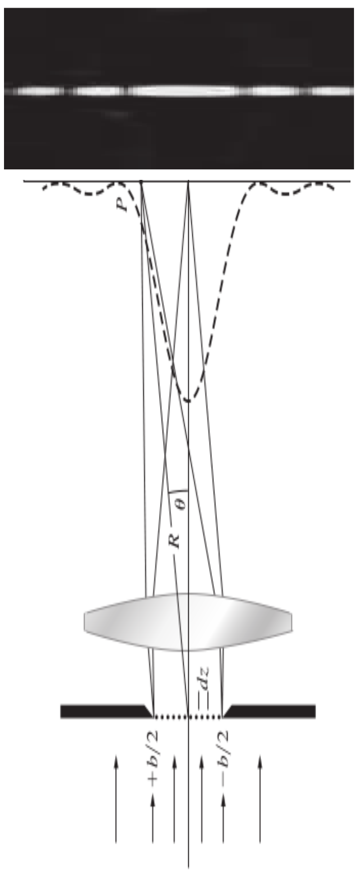
$$\lim A \to 0$$

$$N * d = cte = D$$

$$N * A = cte$$

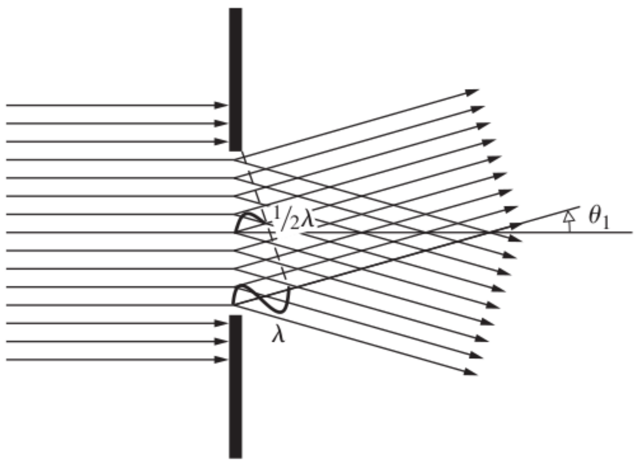
Una sombra ya pronto seras



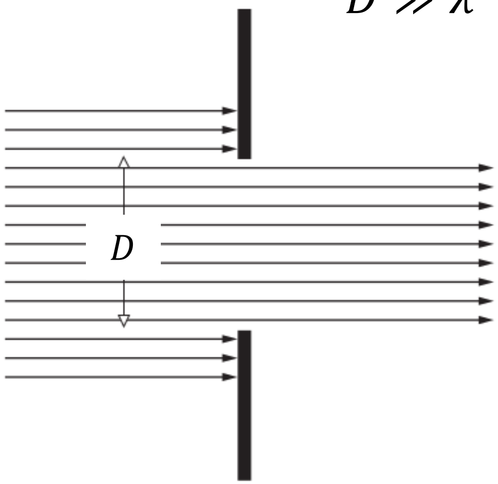


$$\sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

Sombra geometrica



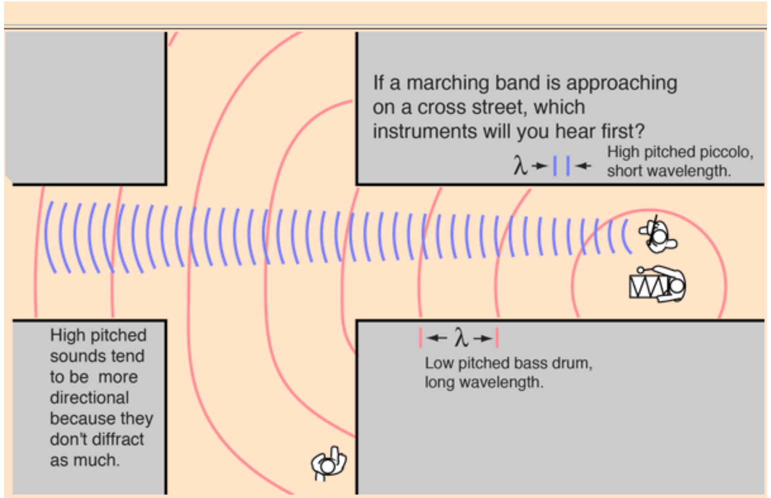
$D \gg \lambda$



$$\sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

Si $\frac{\lambda}{D} \ll 1$, $\theta_{min} \sim 0$ y se produce *sombra geométrica*

Para el sonido: $\lambda \in [17mm, 17m]$



Tomando limites para entender la rendija

(no prigunto cuantos son…sino que vayan saliendo)

$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial $\lim A \to 0$

$$\left.\begin{matrix} \lim N \to \infty \\ \lim d \to 0 \\ \lim A \to 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} N * d = cte = D \\ N * A = cte \end{matrix}$$

$$I_{Rendija}(\delta) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0 \\ A\to 0 \\ Nd=D \\ NA=cte}} \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{Nk\ d\ \sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\ d\ \sin\theta}{2}\right)} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\ d\ \sin\theta}{2}\right)}$$

$$\sim \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ d\ \sin\theta}{2}\right)^2} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ Nd\ \sin\theta}{2N}\right)^2} = \frac{(AN)^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\ D\ \sin\theta}{2}\right)^2}$$

$\sin\alpha \sim \alpha$

$\alpha \to 0$

Tomando limites para entender la rendija

$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\, d\, \sin\theta$$

Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial $\lim A \to 0$

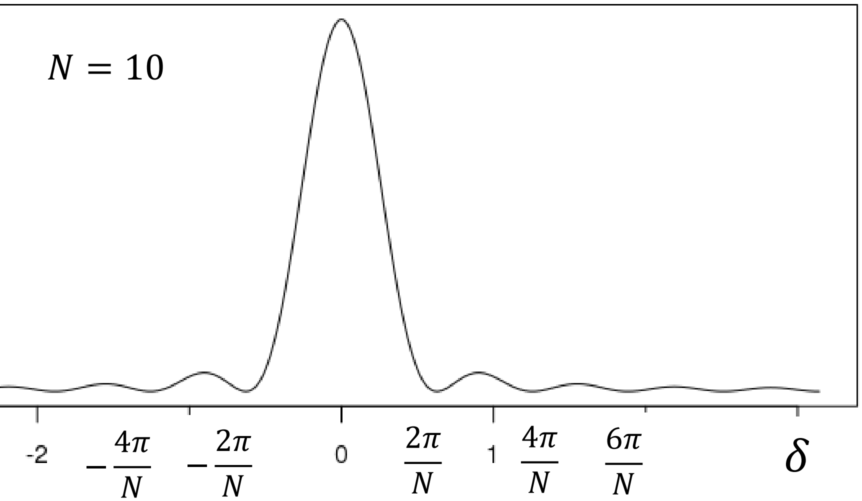
$$\left.\begin{matrix} \lim N \to \infty \\ \lim d \to 0 \\ \lim A \to 0 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} N * d = cte = D \\ N * A = cte = \mathcal{A} \end{matrix}$$

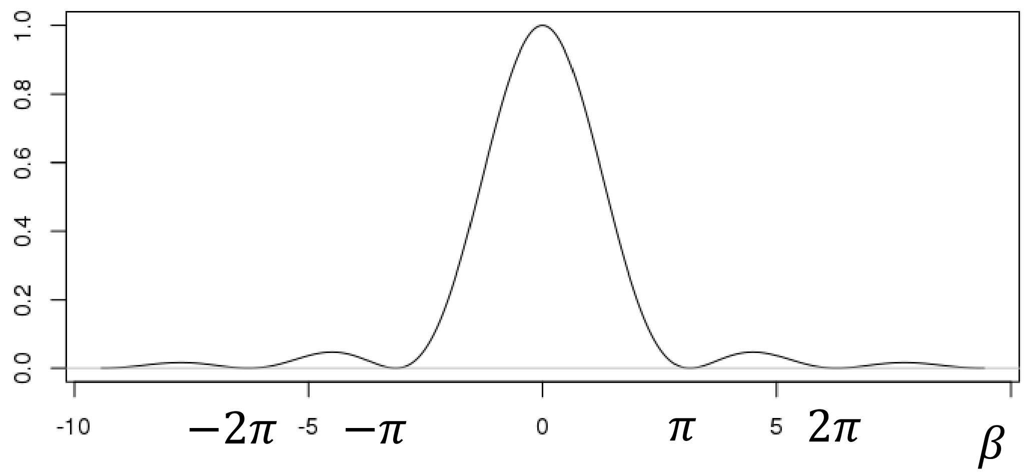
$$I_{Rendija} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0 \\ A\to 0 \\ Nd=D \\ NA=cte}} \frac{A^2}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\mathcal{A}^2}{2} \frac{\sin^2\left(\frac{k\, D\, \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\, D\, \sin\theta}{2}\right)^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2} \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\, D\, \sin\theta}{2}$$

$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2} \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

N fuentes vs 1 rendija





$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

$\lim N \to \infty$
$\lim d \to 0$
$\lim A \to 0$

$$I_{Rendija} = \frac{(AN)^2}{2} \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$$

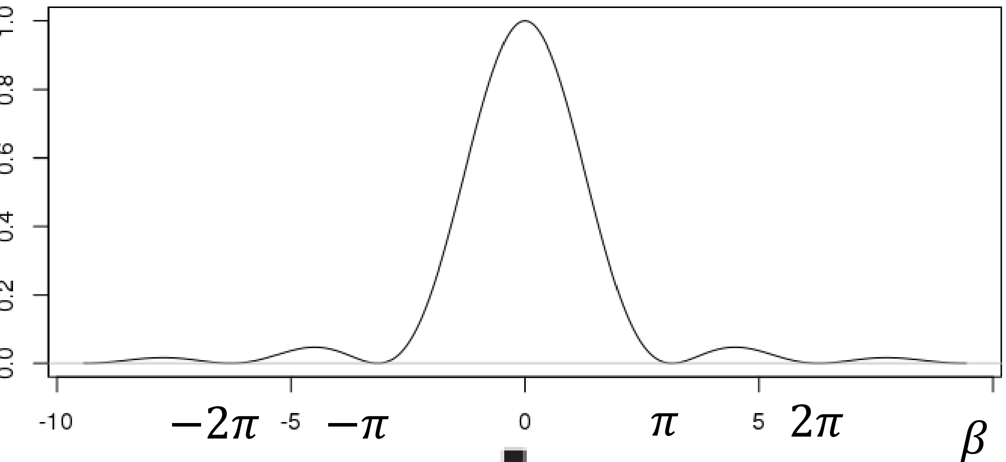
Ancho campana (minimos $\delta = \pm 2\pi/N$)

$$k\ d\ \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{2\pi}{N} \qquad \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}$$

(**minimos** $\beta = \pm\pi$)

$$\frac{\pi\ D\ \sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi \qquad \sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

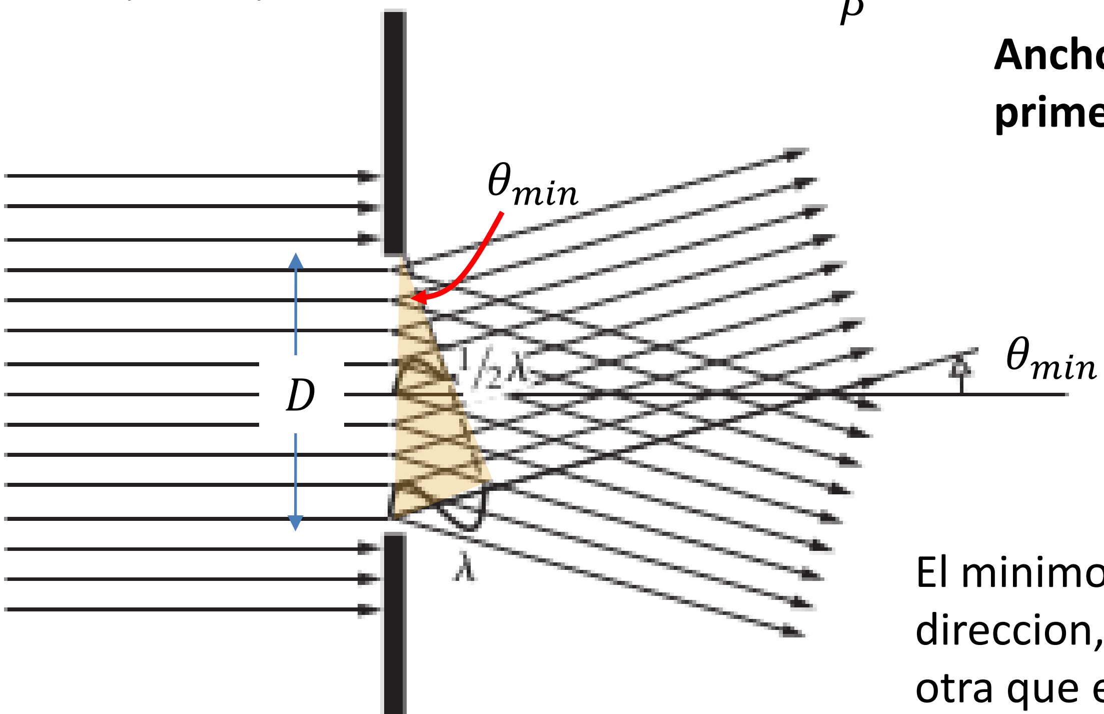
Entendamos los minimos de la rendija



$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\operatorname{sinc}^2\beta$$

con $\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$

manera ñoña de escribir $\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$



Ancho de la campana de difraccion: primeros minimos a izq y derecha

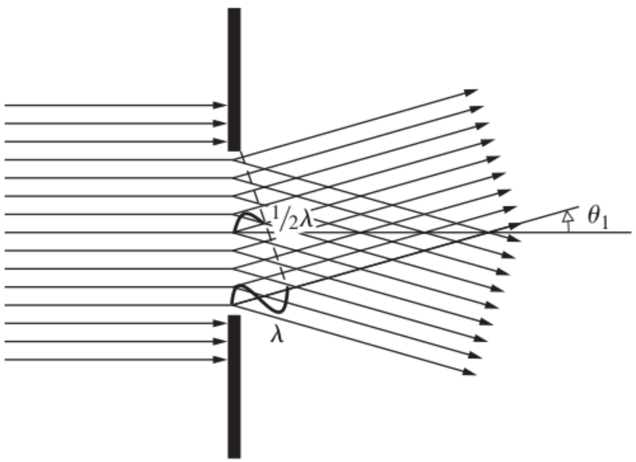
$$\beta = \pm\pi$$

$$\frac{\pi\ D\ \sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi$$

$$D\sin\theta_{min} = \pm\lambda$$

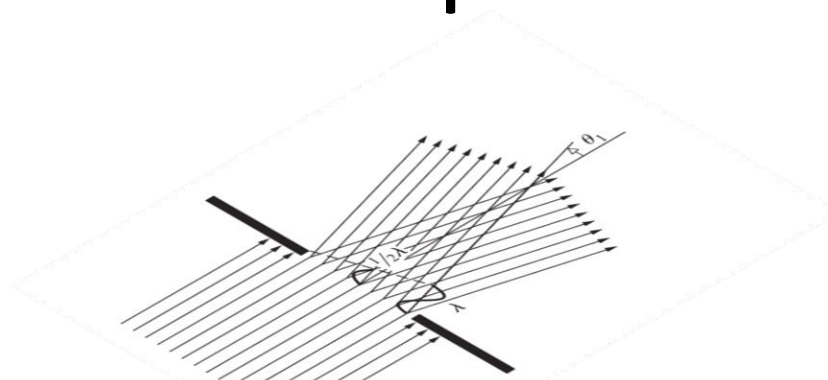
El minimo se produce porque en esta direccion, por cada fuente secundaria hay otra que emite a contrafase

Un poco de realidad por favor

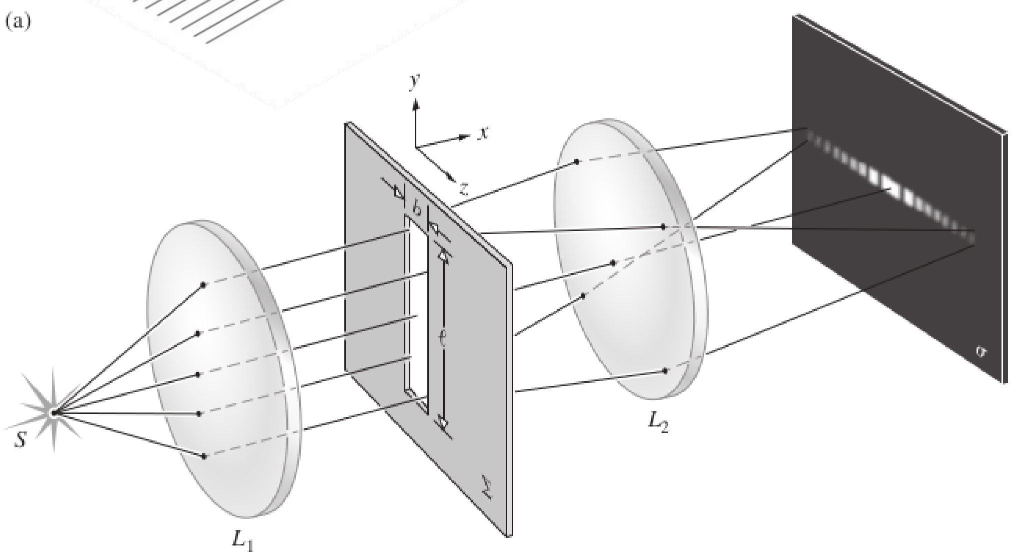


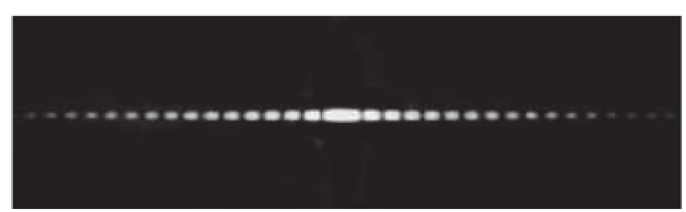
Hasta ahora estuvimos resolviendo este tipo de rendijas (problema unidimensional)

El recorte y obstruccion del frente de onda ocurre a lo largo del eje z del dibujo (la rendija es larga por lo que no recorta nada en la direccion y)



(a)



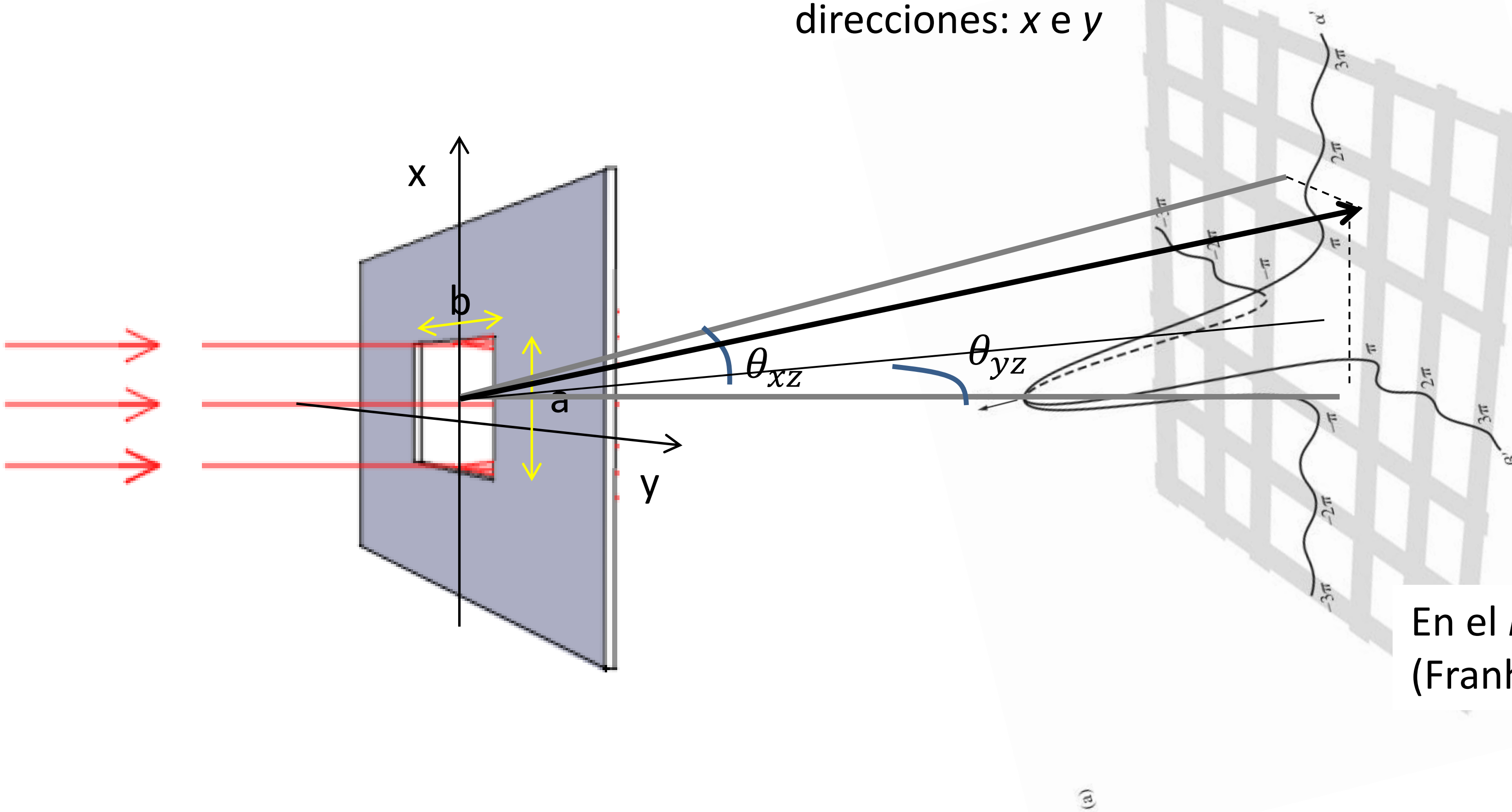


(b)

Un poco de realidad por favor

Que pasa con este tipo de rendija?

El problema de difraccion se vuelve bidimensional…recorto a lo largo de dos direcciones: *x* e *y*

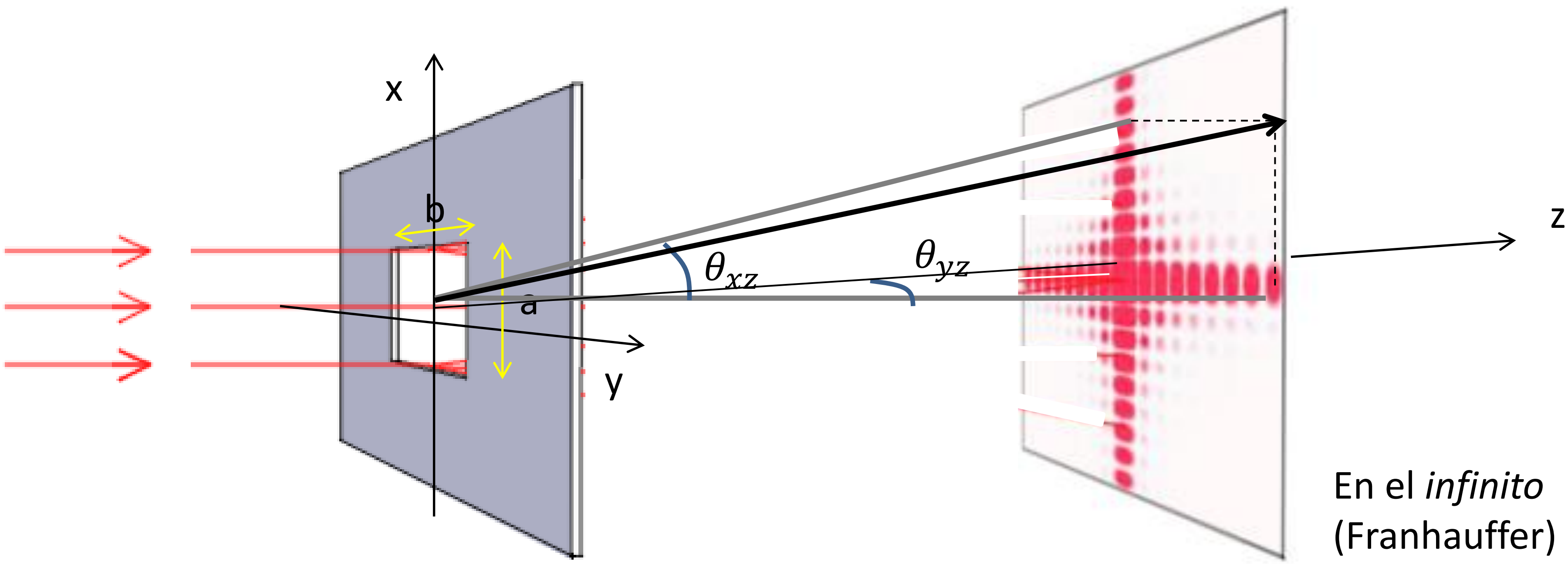


En el *infinito* (Franhauffer)

Un poco de realidad por favor

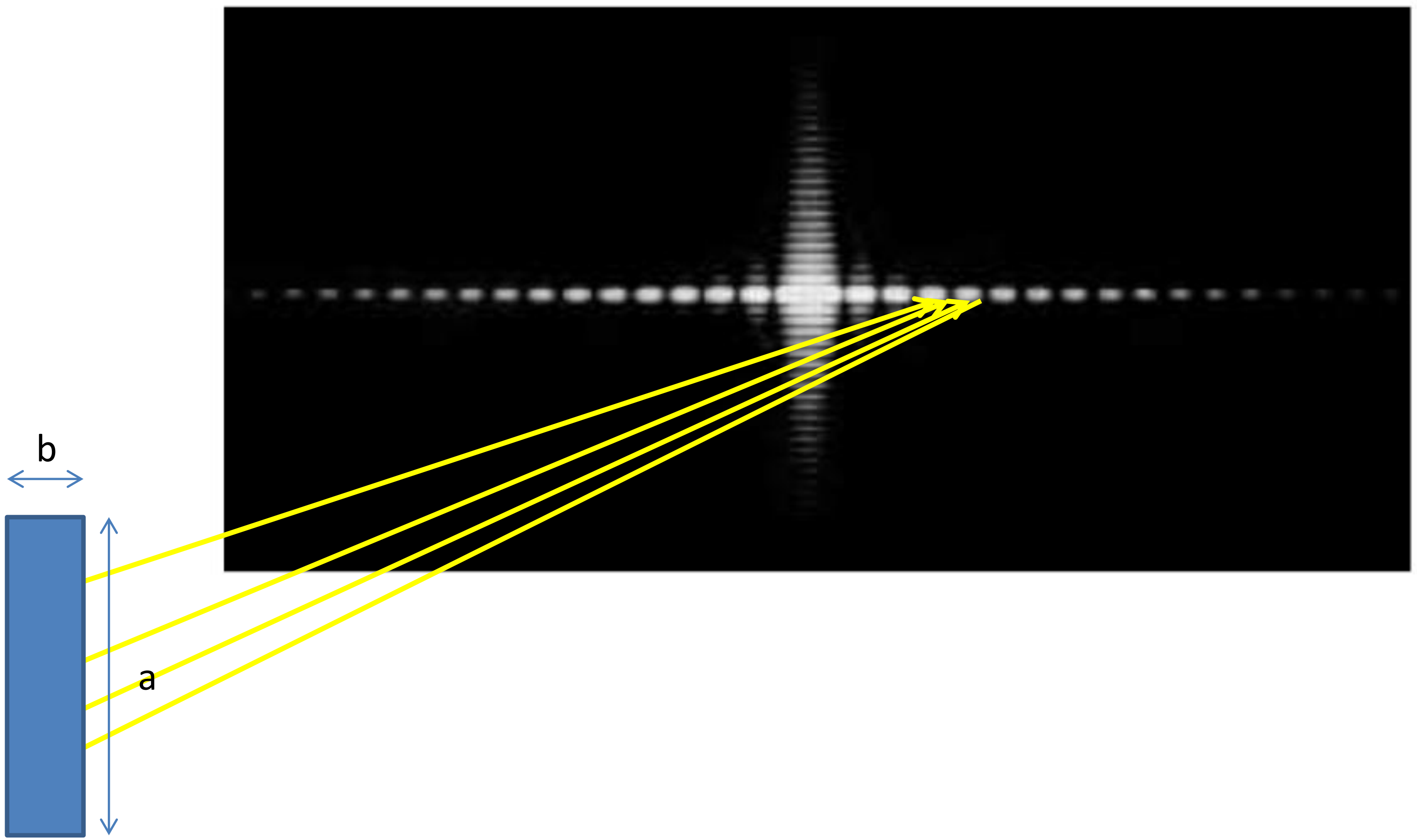
Que pasa con este tipo de rendija?

El problema de difraccion se vuelve bidimensional…recorto a lo largo de dos direcciones: *x* e *y*

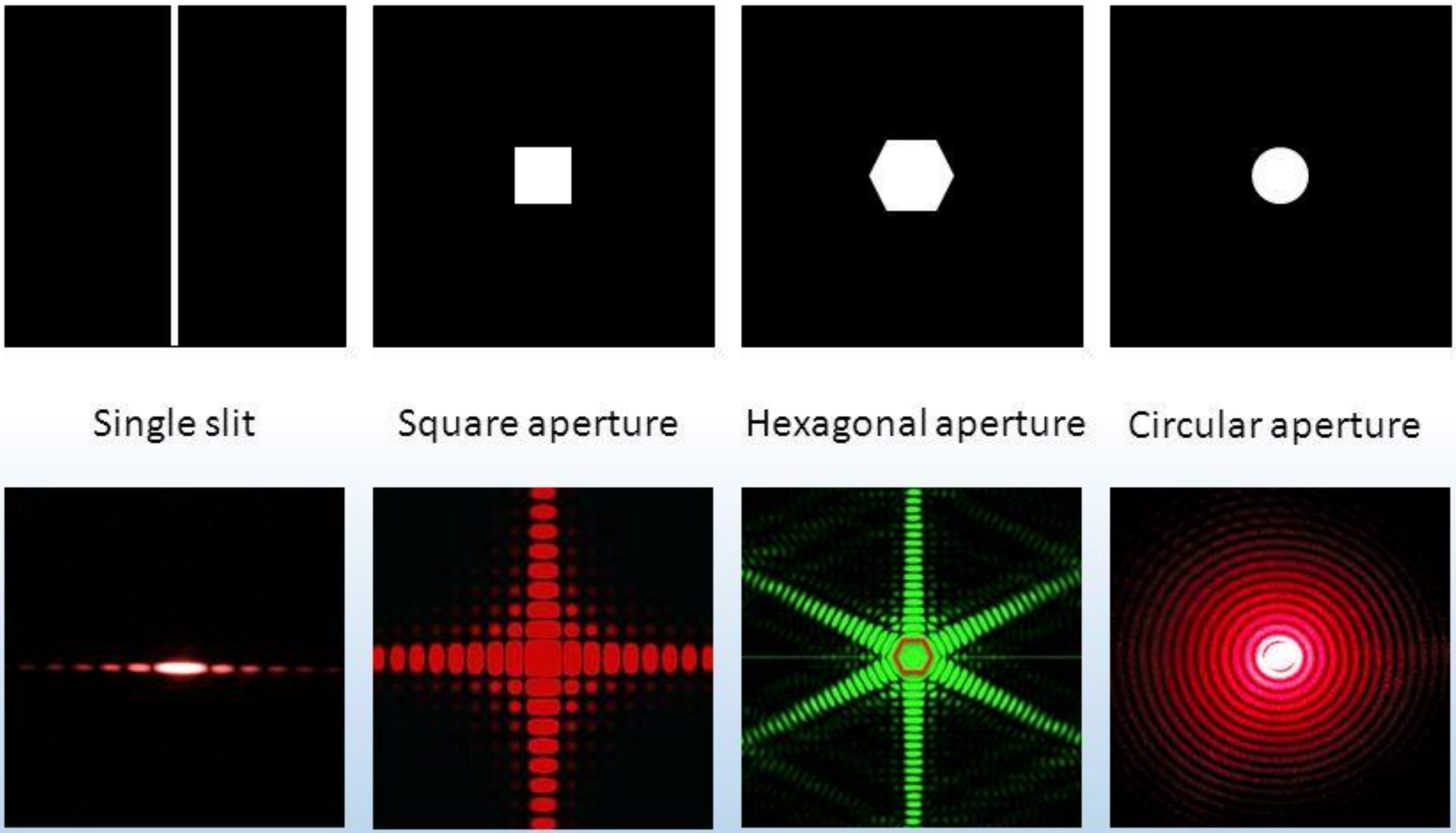


En el *infinito* (Franhauffer)

Rendija rectangular



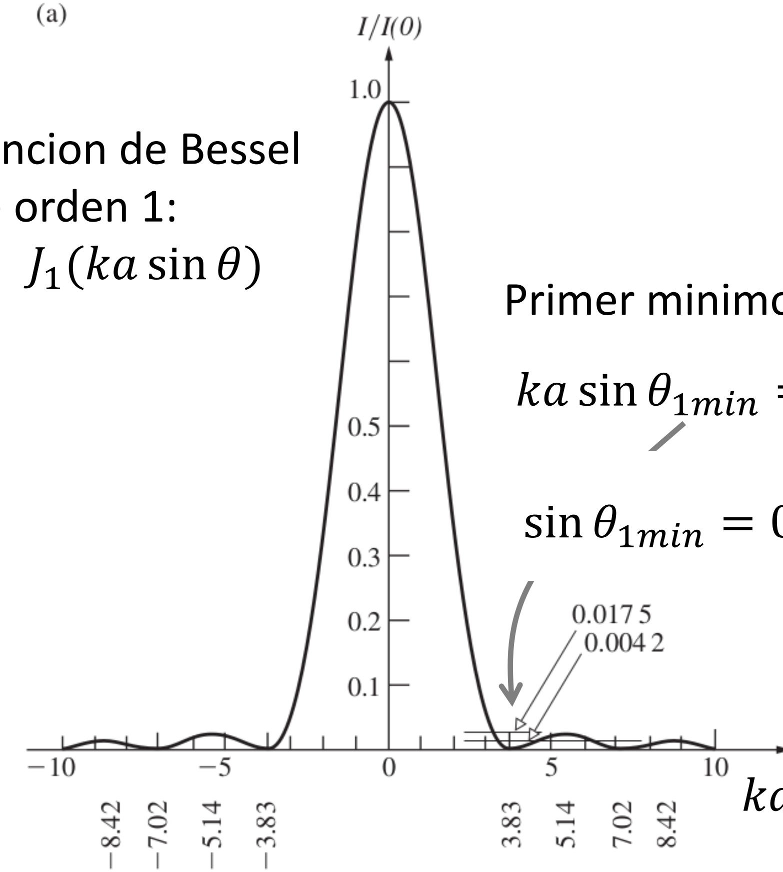
Diversos agujeritos que difractan



Rendija circular

Funcion de Bessel de orden 1:

$$J_1(ka\sin\theta)$$

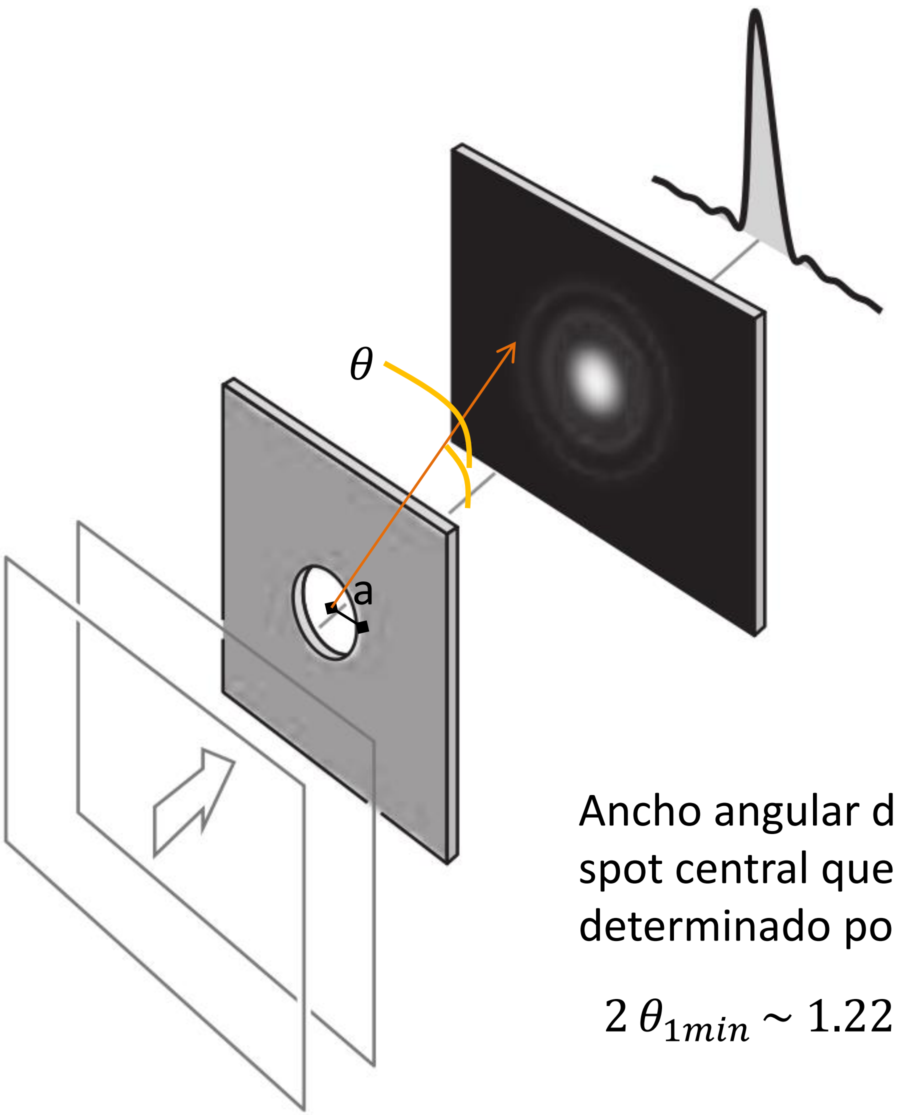


$ka\sin\theta$

Primer minimo en

$$ka\sin\theta_{1min} = 3.83$$

$$\sin\theta_{1min} = 0.61\,\frac{\lambda}{a}$$



Ancho angular del spot central queda determinado por

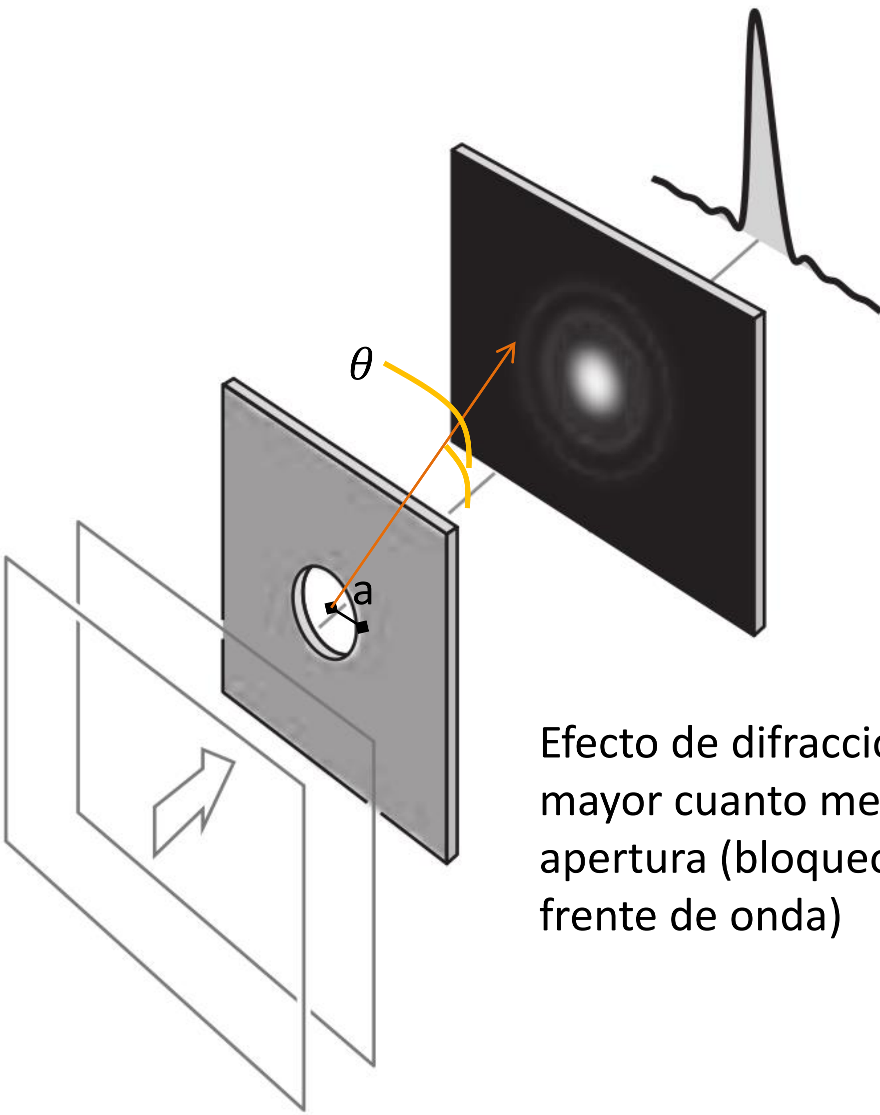
$$2\,\theta_{1min} \sim 1.22\,\frac{\lambda}{a}$$

Disco de Airy

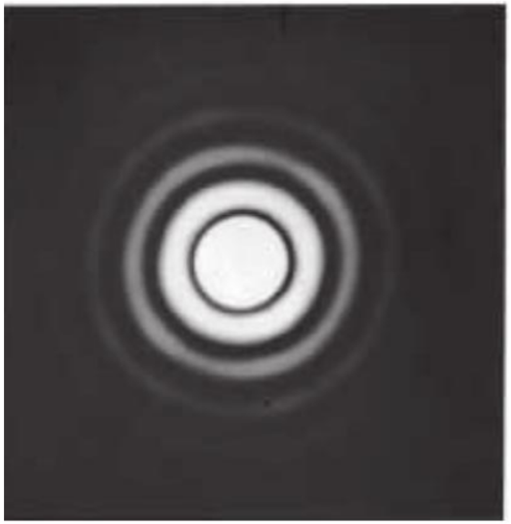
Rendija circular

Ancho angular del spot central queda determinado por

$$2\,\theta_{1min} \sim 1.22\,\frac{\lambda}{a}$$



Efecto de difraccion es mayor cuanto menor es la apertura (bloqueo mas frente de onda)

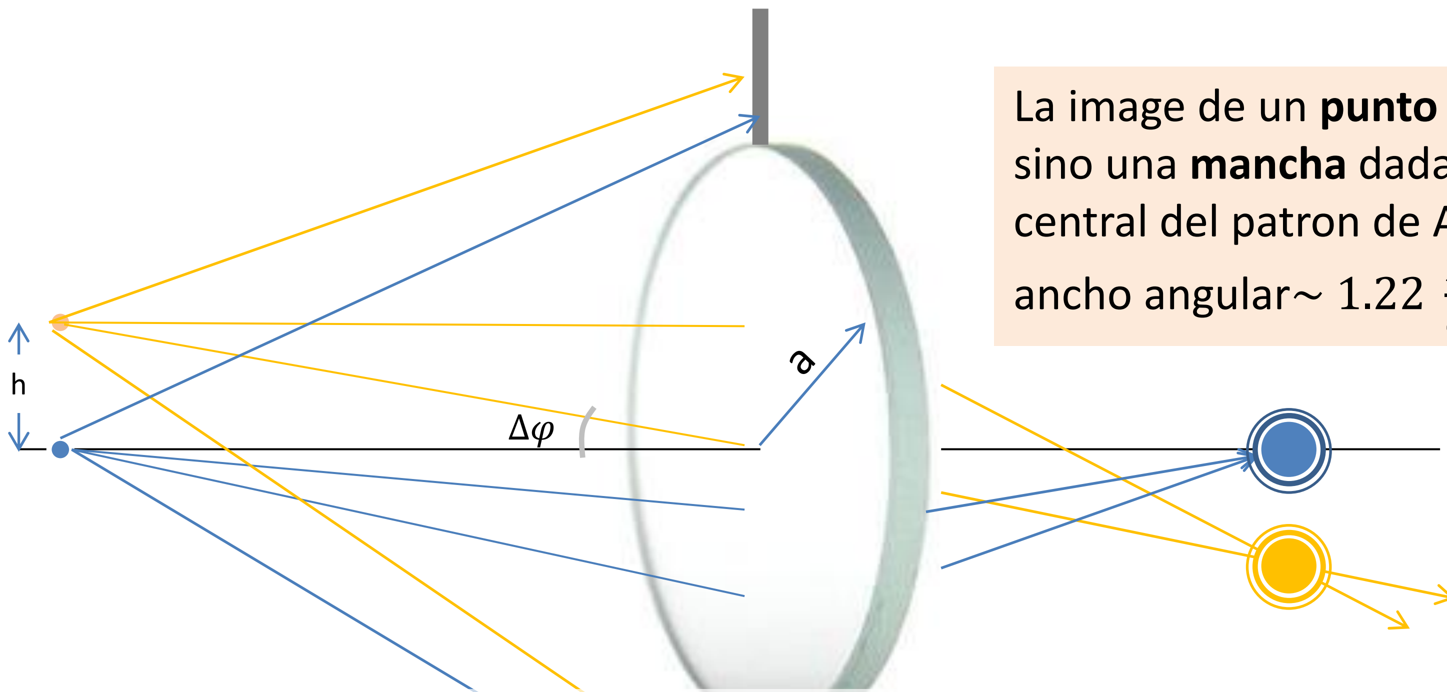


a=1mm

a=0.5mm

Limite de resolucion de sistemas opticos impuesto por difraccion

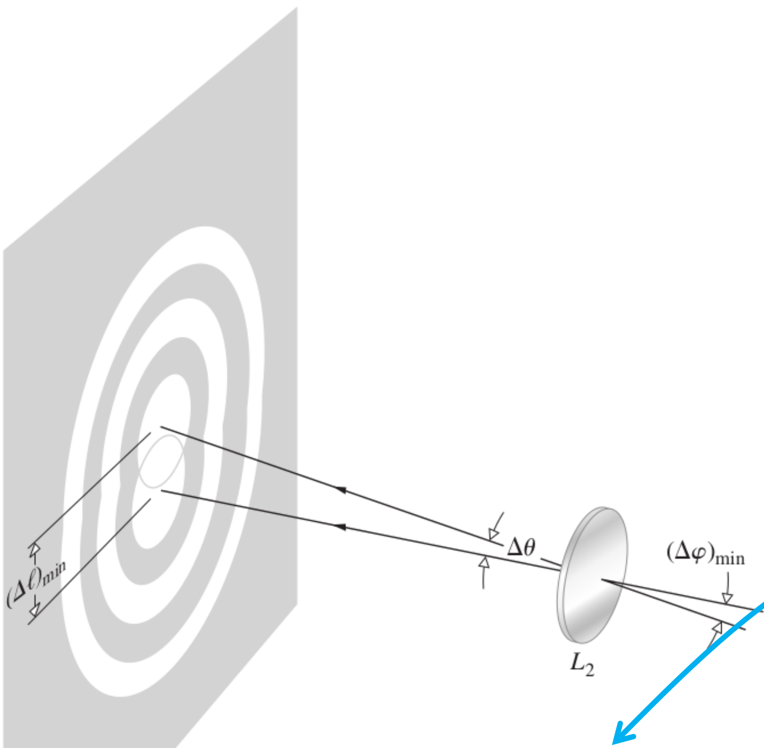
Hasta ahora no nos dimos cuenta…pero una lente **recorta el frente de onda** y **solo deja pasar una parte**…entonces aparecen efectos de **difraccion** (como en rendija circular (!))



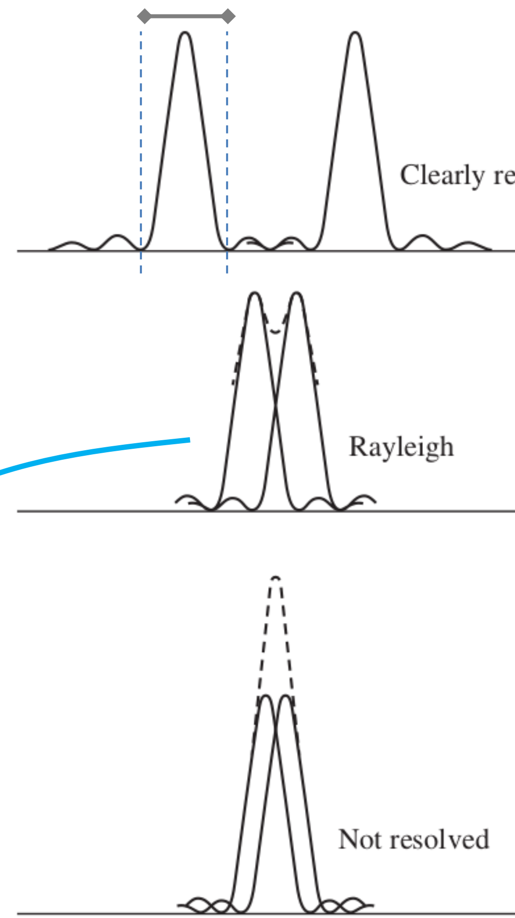
La image de un **punto** no es un punto, sino una **mancha** dada por el circulo central del patron de Airy (que tiene un ancho angular$\sim 1.22\ \frac{\lambda}{a}$)

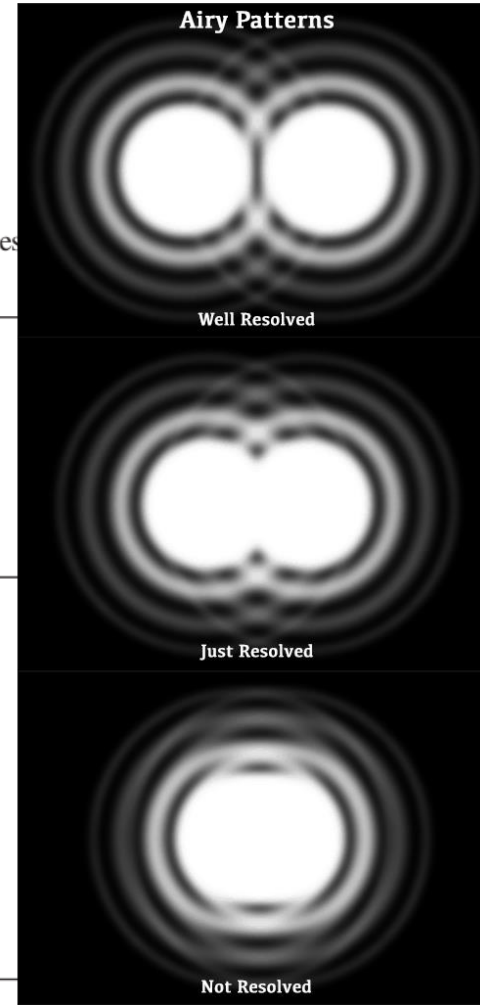
Si la separacion entre puntos disminuyera (medida como h o como $\Delta\varphi$) … puede que los dos patrones de Airy se empiecen a superponer y veo un unico manchon como imagen…alcancé el **limite de resolucion impuesto por difraccion** (notar que depende de λ)

Criterio de Rayleigh dicho por Hecht



$$2\,\theta_{1min} \sim 1.22\,\frac{\lambda}{a}$$





Aplicando el criterio de Rayleigh, el angulo mas chico que puedo resolver $\Delta\varphi_{min} = 1.22\,\frac{\lambda}{a}$

Mi sistema optico va a poder resolver (en el sentido de Rayleigh) dos puntos cuya separacion angular, medida desde la lente, sea$\Delta\varphi > 1.22\frac{\lambda}{a}$.

Listo!