Ejercicio 6 (Guía 3)

e)

Este inciso consiste en calcular el campo magnético en todo el espacio para el *Toroide* con N espiras que se muestra en la **Figura 1**. Tiene la particularidad de que es como un *Solenoide* enrollado con espiras cuadradas.

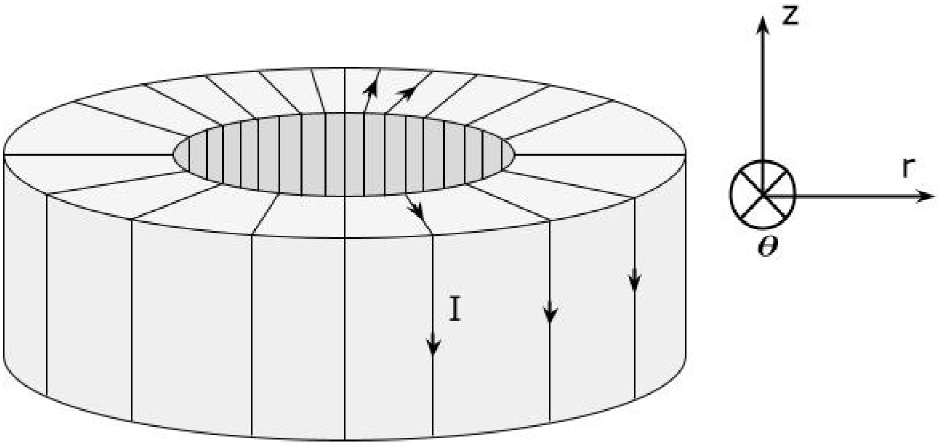

Figura 1: *Esquema del ejercicio 6 e) con coordenadas cilíndricas.*

Simetrías: Primero que nada hay que usar las simetrías de la distribución de corrientes (son las fuentes de campo magnético) para descartar tanto las **Direcciones** como las **Dependencias** que no aparecen para el campo $\boldsymbol{B}$. En principio, escrito en coordenadas cilíndricas el campo en general será $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_r(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{r}} + B_\theta(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{\theta}} + B_z(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{z}}$. Lo de adentro del paréntesis son las dependencias, es decir en que punto del espacio se *mide* el campo; y las direcciones son los versores en los que el campo está, si un campo no tiene dirección en z por ejemplo tendremos $B_z = 0$. Notar que no necesariamente las dependencias y las direcciones serán la misma, de hecho en campo magnético veremos que no suele pasar.

- **Direcciones:** Aquí miraremos que como es un solenoide enrollado y el campo para el solenoide tiene dirección $\hat{z}$, en este caso al *enrollar el espacio* la dirección z del solenoide corresponde a la θ del toroide ($\hat{z} \to \hat{\theta}$), entonces la dirección del campo será en $\hat{\theta}$ como se ve en la **Figura 2**.

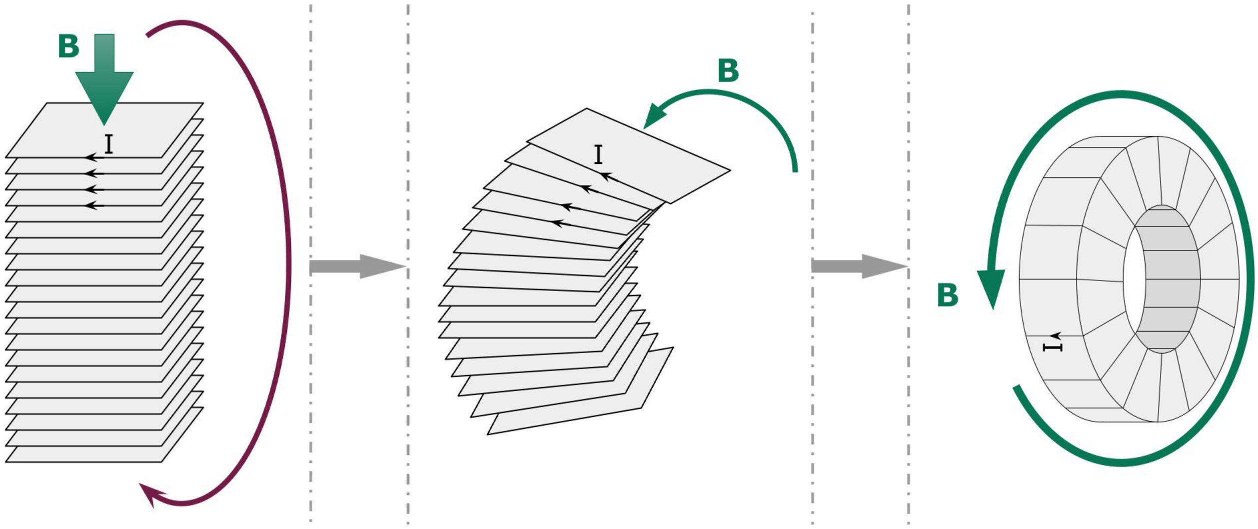

Figura 2: *Se ve la forma en que si a un solenoide de espiras cuadradas se lo enrolla sobre si mismo se obtiene un toroide de espiras cuadradas. Se puede notar que la corriente está en el sentido contrario a el ejercicio de solenoide infinito y por esto el campo está en* $-\hat{z}$.

Otra forma de pensarlo es usar la regla de la mano derecha sobre la corriente de una espira y entonces el campo gira alrededor de ella, pero al igual que en el solenoide al tener muchas espiras muy pegadas solo sobrevive la componente en dirección θ. Luego tenemos que $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_\theta(r,\theta,z)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y $B_r = B_z = 0$

- **Dependencias:** Ahora es cuestión de mirar en distintos puntos del espacio y ver si cambia la distribución de corrientes dependiendo de donde la miro (si no cambia, no depende de la variable en que moví). Teniendo eso en cuenta podemos ver que si mantenemos r y z constantes pero giro en θ siempre se ve igual, entonces no depende de θ (esto es simetría de rotación respecto del eje z). Luego no puedo demostrar que no depende ni de r ni de z, entonces

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(r, z)$$

Ahora ya puedo concluir que mi campo queda $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_\theta(r, z)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ y necesito conocer la intensidad del campo y cómo depende de las variables. Para esto usamos la *Ley de Ampere*, y necesitamos definir que curvas utilizaremos. Notemos que si usamos espiras circulares concentricas con el toroide como muestra la **Figura 3** (visto desde arriba), podremos concatenar corriente de las espiras y además el $\boldsymbol{dl}$ de la curva es paralelo a $\boldsymbol{B}$ y entonces $\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = Bdl$.

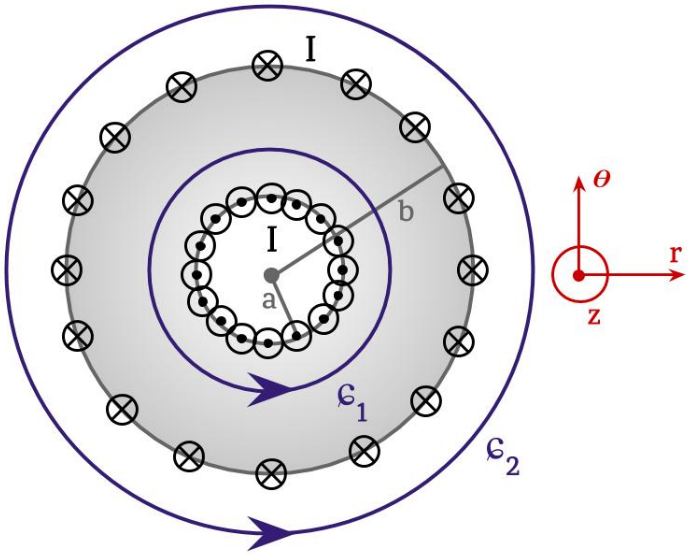

Figura 3: *Toroide visto desde arriba con las curvas $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ de Ampere en distintas regiones del espacio*

Ahora separemos en distintas regiones del espacio y vamos calculando:

- **a<r<b:** Corresponde al cálculo para la espira $\mathcal{C}_1$ de radio r. Recordemos Ampere $\int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = \mu_0 I_{conc}$ y calculemos cada término por separado. Veamos que en el primer término $\int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{dl} = B \int_{\mathcal{C}_1} dl = 2\pi B r$, ya que $\boldsymbol{B}$ es paralelo a $\boldsymbol{dl}$ y constante pues no depende de θ (en la curva tenemos r y z constantes). Sigamos con el segundo término y notemos que la corriente concatenada está toda en el radio a y queda $I_{conc} = NI$ y usando la densidad de espiras ($n = N/2\pi a$) ahí

adentro tenemos $I_{conc} = 2\pi a n I$. Ahora igualamos los términos y queda

$$2\pi B r = \mu_0 2\pi a n I \Rightarrow \boxed{B(r,z) = \frac{\mu_0 a n I}{r}}$$

- **r>b:** Ahora usaremos la espira C_2 donde el primer término de Ampere es identico al anterior y queda $2\pi B r$. Pero miremos con cuidado el segundo término, aquí $I_{conc} = I_a + I_b$ (I_a es la corriente en el radio a e I_b la del radio b). Nos queda usar que como son N espiras totales que se enrollan alrededor de la *dona*, entonces $I_a = -I_b = IN$ con el signo negativo ya que en b la corriente tiene signo contrario. Luego $I_{conc} = IN - IN = 0$, y así podemos decir

$$\boxed{B(r,z) = 0}$$

- **r<a:** Les queda ver si quieren comprobarlo, que adentro de todo el campo también es nulo.

Al final, el campo quedó solo adentro del toroide, entonces escribamoslo así:

$$\boxed{\mathbf{B}(r,z) = \frac{\mu_0 n a I}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}} \quad adentro} \qquad y \qquad \boxed{\mathbf{B}(r,z) = \mathbf{0} \quad afuera} \tag{1}$$

Observemos que en el solenoide el campo es constante adentro y en esta caso decae con el radio, esto se debe a que en el cilindro que tiene radio a la densidad de espiras por unidad de longitud (n_a) es mayor que la densidad (n_b) en el radio b. Efectivamente, como en número de espiras es fijo N y tiene distinto perímetro, se tiene $2\pi a n_a = N = 2\pi b n_b \Rightarrow n_b/n_a = a/b < 1$.