Ejercicio 8 (Guía 1)

En este ejercicio se tiene la configuración con dos placas paralelas e infinitas, cargadas superficialmente con σ y $-\sigma$, como se ve en la **Figura 1**. Ya queda implícito por la figura que vamos a usar los ejes cartesianos, y elegiremos el *cero* de z en el plano de abajo (hay que elegir, podría ser en el de arriba o entre medio de los dos).

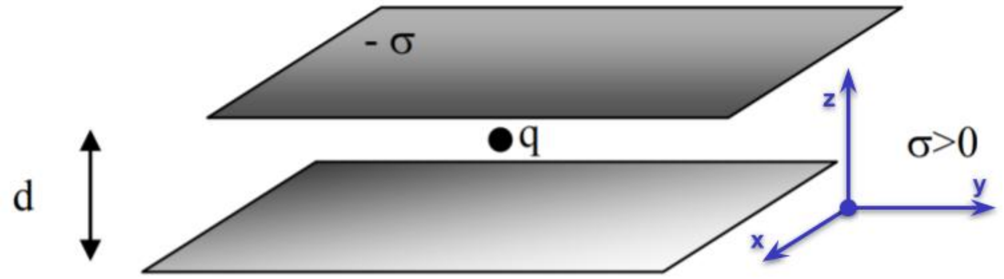

Figura 1: *Esquema del ejercicio 8 con los ejes cartesianos ya puestos. La carga q es una carga de prueba que se usará solo en el inciso **c)**.*

a) Acá pide dibujar las lineas de campo por separado y en conjunto. Pero vamos a hacerlo en conjunto con el **b)**, en el que pide calcular el campo eléctrico en todo el espacio. Para esto vamos a usar el *principio de superposición*, es decir que calculamos los campos de cada placa por separado y después lo sumamos.

<u>Placa en z=0:</u> Esta placa tiene distribución de carga superficial σ positivo, con lo cual esperamos que sea repulsivo el campo. Pensemos un poco qué **direcciones** tiene y que **dependencias**, acá es donde usamos la alta simetría de la distribución de carga.

Direcciones: Se puede ver que, análogamente con el cilindro infinito y la dirección en z de el, las direcciones en x e y del plano son simétricas, es decir que en cualquier punto del espacio para un lado y para el otro siempre tendrá la misma cantidad de cargas que aportan al campo en las direcciones x e y. Esto es por ser un plano **infinito**, y es similar al argumento en el hilo infinito para que no tenga dirección en z. Todo esto me dice que el campo solo puede tener direcciones en z, entonces $\vec{E}(\vec{r}) = \underbrace{E_x(x,y,z)}_{=0}\hat{x} + \underbrace{E_y(x,y,z)}_{=0}\hat{y} + E_z(x,y,z)\hat{z} = E_z(x,y,z)\hat{z}$.

Dependencias: Recién miramos la dirección del campo, pero por otro lado tenemos que saber de que variables depende, es decir que si miro un punto en el espacio con un dado valor de x_1 y miro otro con otro con otro x_2, ¿cambia algo? (lo mismo con y y z).

Para esto, también usamos el mismo argumento del hilo infinito, que tenía simetría de traslación en z, solo que acá tenemos simetría de traslación en x e y. Entonces, en principio el campo solo puede depender de z: $\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(z)$. Notemos algo mas, el campo para *z>0* tiene que ser positivo (repulsivo), pero para *z<0* tiene que ser negativo (así también repele). Entonces tengo $E(z > 0) = -E(z < 0)$ porque tiene que ser simétrico respecto de la placa. Se pueden ver las direcciones del campo en la **Figura 2** (Alerta de spoiler sobre la sup. de Gauss).
Ahora ya tenemos más información del campo:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)\hat{z},$$

nos falta ver como depende con z, y para eso vamos a usar la ***Ley de Gauss***.
Hay que elegir una superficie conveniente de *Gauss*, entonces necesitamos que el campo sea constante en ella y perpendicular o paralelo en algunos lados. Sabemos que depende de z, entonces para un dado valor de z (no importan los x y y) este será constante; además sabemos que va en la dirección de $\hat{z}$, entonces la normal de la superficie debe ser la misma.
En los libros es muy común ver que se usan cilindritos, ya que se ahorran una integral. Cambiemos un poco y usemos un ladrillito (como vemos en la **Figura 2**) que valla por x_1 a x_2 su lado en x, e y_1 e y_2 en el lado, obviamente de y; esos valores son arbitrarios ya veremos que no cambia nada a la cuenta.

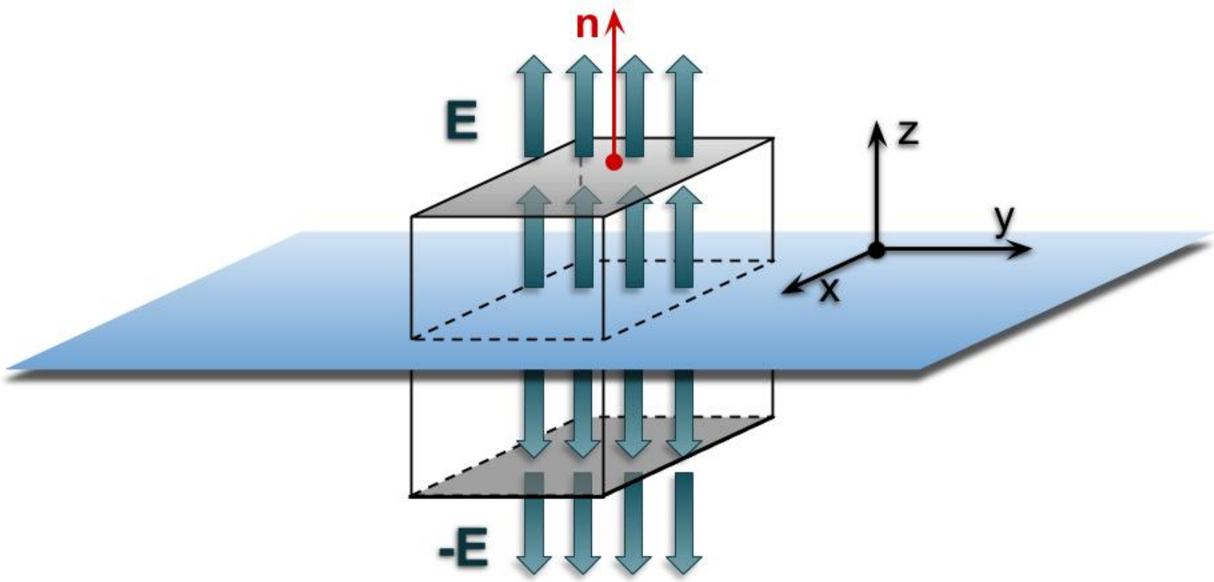

Figura 2: *Plano con las lineas de campo y la superficie de Gauss con la normal en la tapa de arriba marcada con rojo.*

Recordemos *Gauss*:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0},$$

hay que ver dónde hay flujo de campo, y eso es en las dos tapas de arriba y abajo, ya que en las demás el campo es paralelo $\Rightarrow \Phi_E = 0$. Entonces calculemos el flujo en las dos tapas, llamemoslas S_1 a la de arriba y S_2 la de abajo. Es importante notar que la normal $\hat{n_1}$ de la tapa de arriba es $\hat{z}$, pero la de abajo es $\hat{n_2} = -\hat{z}$. La integral queda dividida en una suma de ambas tapitas.

$$\Phi_E = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} E(z)\hat{z} \cdot \underbrace{dxdy(\hat{z})}_{\vec{dS}_1 = dS_1\hat{n_1}} + \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} (-E(z))\hat{z} \cdot \underbrace{dxdy(-\hat{z})}_{\vec{dS}_2 = dS_2\hat{n_2}}$$

$$\Rightarrow \Phi_E = 2E(z) \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} dxdy = 2E(z))S. \tag{1}$$

Antes de continuar con la cuenta, aclaro un par de cosas:

- Como las integrales son en x e y y el campo depende solo de z, el campo sale afuera,
- En la segunda integral usé que el campo para $z < 0$ es $-E(z)$,
- La integral doble que queda es el área de las tapitas, que son iguales entonces definí $S_1 = S_2 = S$. Si hubiesemos usado el cilindrito, ésta integral es simple y solo depende del ángulo θ.

Ahora calculemos la carga encerrada, que es solo la carga en el rectangulito que queda en el plano ($z = 0$) de área S:

$$Q_{enc} = \sigma S \tag{2}$$

Entonces, juntando las ecuaciones (1) y (2) (**No olvidarse el $\boldsymbol{\epsilon_0}$**) tenemos:

$$2E(z)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

Luego el campo para todo el espacio queda dividido así:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad si \quad z > 0$$

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad si \quad z < 0$$

Placa z=d El cálculo del campo eléctrico en esta placa es análogo al anterior pero el signo es contrario y como no depende del módulo de z, no importa que esté desplazado. Luego queda:

$$E = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad si \quad z > d$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad si \quad z < d$$

Suma de planos: Ahora sumando los dos campos, podemos ver que el espacio queda dividido en tres partes: $z < 0$, $0 < z < d$ y $d < z$. En la primera zona y la última, los campos se cancelan porque son la misma constante $(\sigma/2\epsilon_0)$ con signo opuesto. En la zona del medio, los signos son ambos positivos $\Rightarrow E_{tot} = \sigma/2\epsilon_0 + \sigma/2\epsilon_0 = \sigma/\epsilon_0$. Todo esto se puede ver muy esquemáticamente en el gráfico con las lineas de campo de la **Figura 3**.

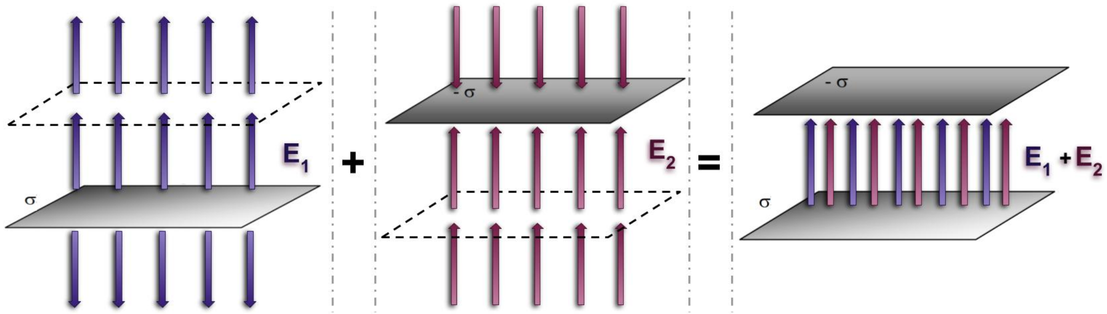

Figura 3: *Lineas de campo de las placas por separado y la suma.*

También se podría hacer directamente con las dos placas y teniendo cuidado les tiene que dar lo mismo, prueben.

c) Ahora si ponemos la carga q de prueba entre medio, queremos calcular la fuerza que recibirá debido a las dos placas. Conociendo el campo eléctrico es simple calcularlo ya que $\vec{F} = q\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = q\sigma/\epsilon_0$. En la **Figura 4** está esquematizada la fuerza, es un único vector aplicado en la carga, cuando el campo eléctrico está en todo el espacio.

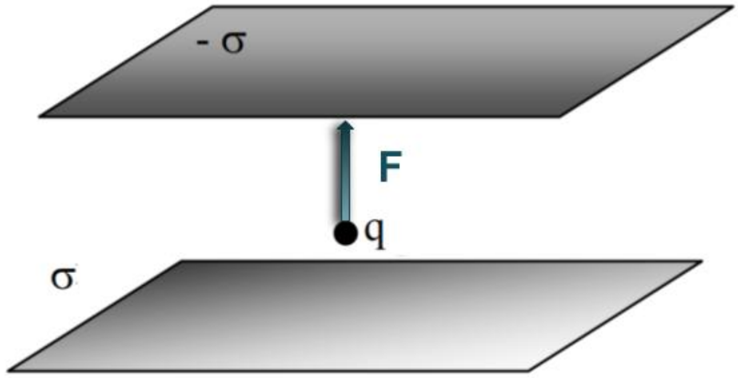

Figura 4: *Fuerza eléctrica que siente la carga q.*

d) Por último, hay que calcular la diferencia de potencial entre ambos planos. Al querer solo la diferencia nos ahorra el paso de establecer un potencial de referencia, ya que en la resta éste se irá. Sabemos que $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$, es decir que el campo es menos el *gradiente* del potencial. El operador gradiente seguramente no es muy conocido por ustedes así que veamos un poco que no es tan difícil. Tenemos que

$$\vec{\nabla} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}; \frac{\partial V}{\partial y}; \frac{\partial V}{\partial z} \right) = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

con este simbolito ∂ que corresponde a la derivada parcial, básicamente $\partial_x V$ (forma abreviada de lo de arriba) es derivar respecto de x como si y y z fuesen un numerito constante. Pero como $E(z)\hat{z}$ solo tiene dirección en $\hat{z}$, entonces solo tendremos $E\hat{z} = -\partial_z V\hat{z} = -(dV/dz)\hat{z}$. Es decir que solo la componente z del gradiente puede estar, y como solo puede tener dependencia de la variable z, esa derivada $parcial$ se transforma en una derivada $total$ (la que ya conocían de siempre).
Ahora solo nos queda integrar para conocer $\Delta V_{0\to d}$ (diferencia de potencial entre 0 y d, donde estan las dos placas).

$$\Delta V_{0\to d} = -\int_0^d E dz = -\int_0^d \underbrace{\frac{\sigma}{\epsilon_0}}_{cte} dz = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} z|_0^d$$

$$\Rightarrow \Delta V_{0\to d} = -\frac{\sigma d}{\epsilon_0}$$