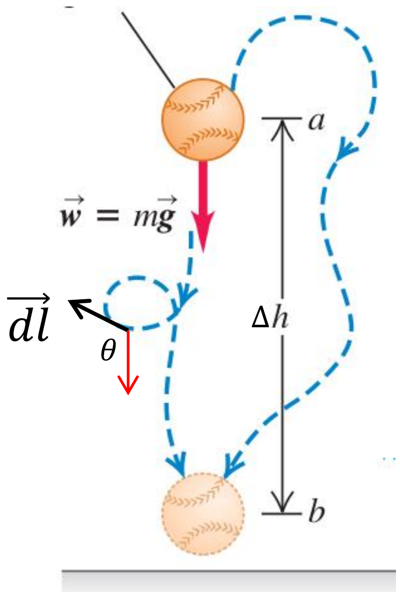
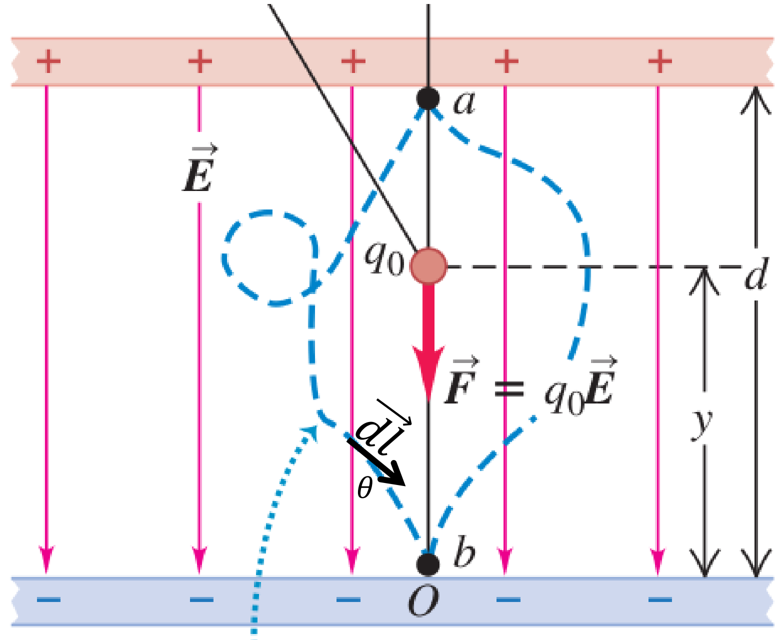
03. Potencial electrostático

Recordemos 3 conceptos 3



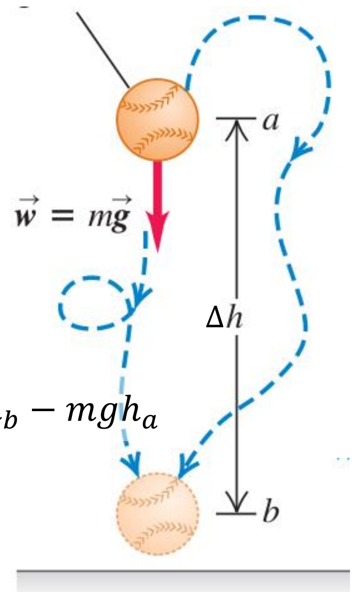


1- Cuando una fuerza $\vec{F}$actua sobre una partícula que se mueve de un punta *a* a otro *b,* el trabajo W_{ab} efectuado por dicha fuerza resulta

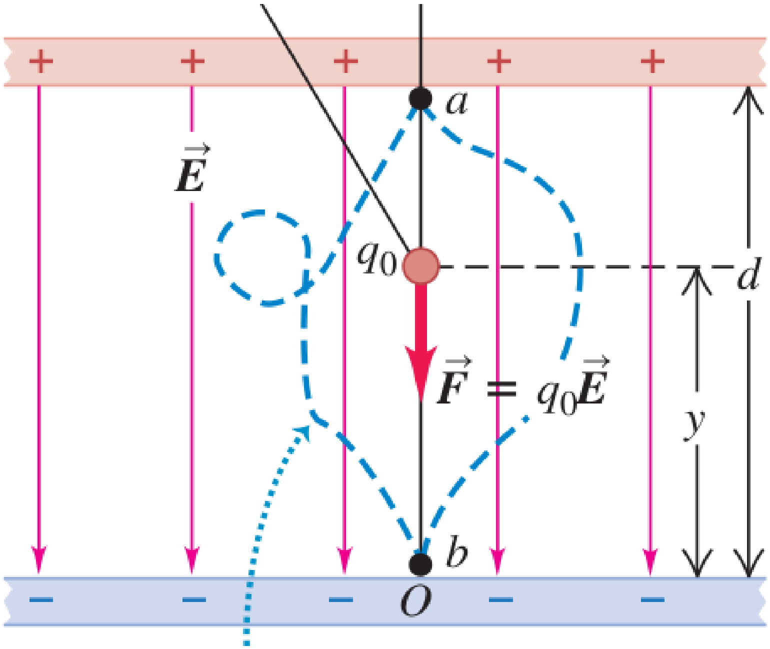
$$W_{ab} = \int_{\Gamma} \vec{F}.\vec{dl} \quad = \int_{a}^{b} F \ \cos\theta \, dl$$

Desplazamiento infinitesimal
a lo largo de la trayectoria Γ

Recordemos 3 conceptos 3



$\Delta U = mgh_b - mgh_a$



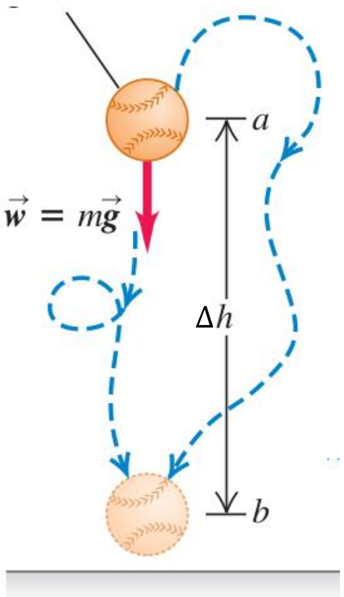
$\Delta U = ?$

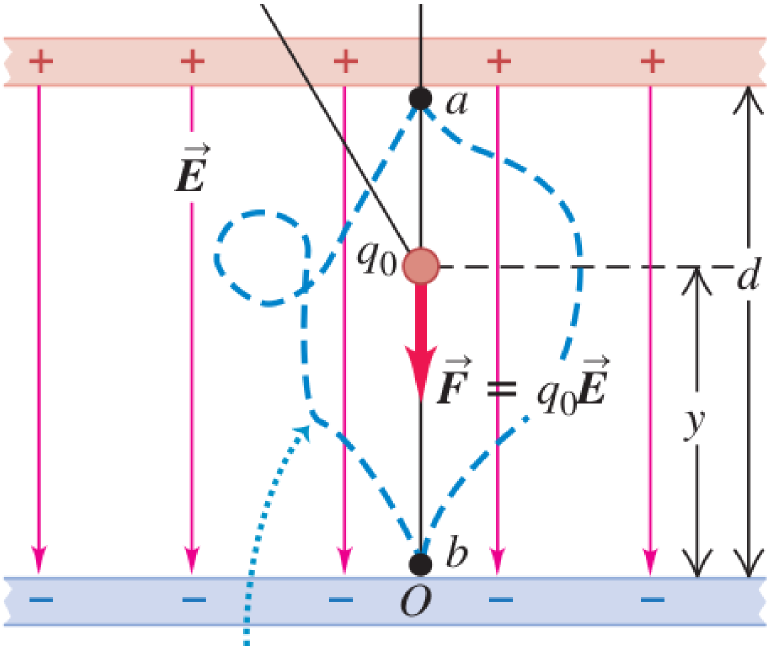
2- Si la fuerza $\vec{F}$ es **conservativa** el trabajo que realiza siempre se puede expresar en términos de una **energía potencial** *U.*

$$W_{ab} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

- Cuando el trabajo realizado es positivo, disminuye la energía potencial (y viceversa)
- El trabajo realizado por una fza conservativa **no depende de la trayectoria**, sino de los estados inicial y final

Recordemos 3 conceptos 3





3- Según el teorema de trabajo y energía: la variación de energía cinética es igual al trabajo total realizado sobre la partícula

Si sólo hacen trabajo fuerzas conservativas

$$\Delta K = W_{ab} = -(U_b - U_a)$$

$$K_b - K_a = -(U_b - U_a)$$

$$\boxed{K_b + U_b = K_a + U_a}$$

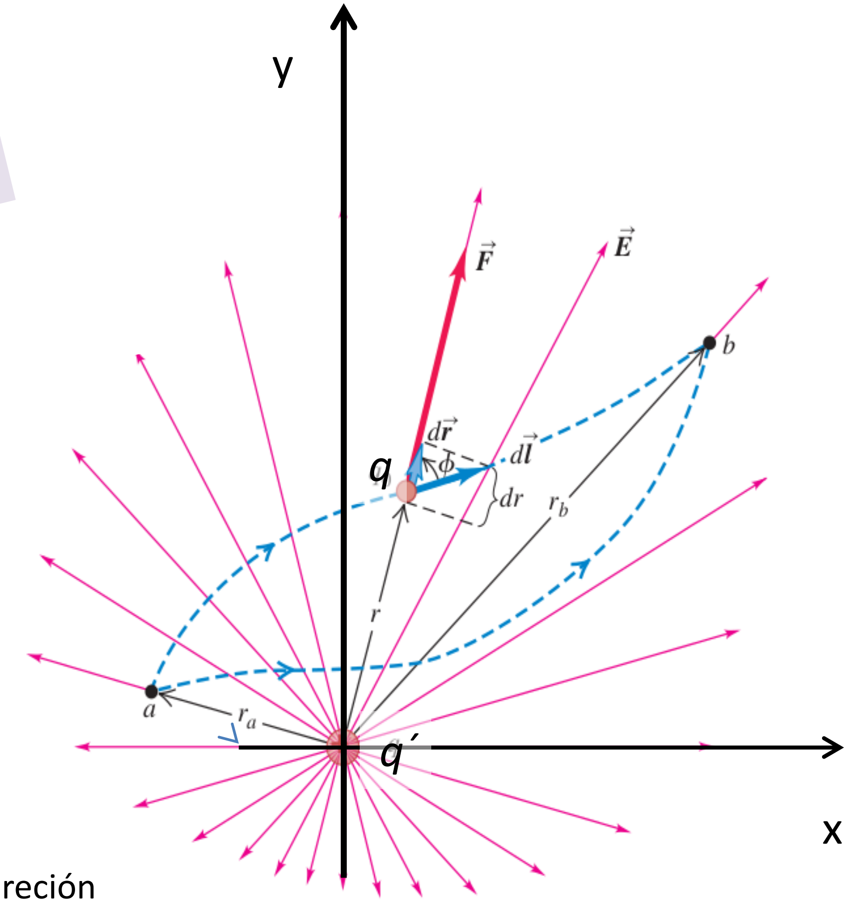
La energía mecánica se conserva cuando sólo actúan fuerzas conservativas

El caso eléctri

La fuerza eléctrica **es conservativa**

$$W_{ab} = \int_{\Gamma} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

Cuál es el trabajo hace la fza electrica ejercida por q´ sobre q cuando la misma se desplaza desde *a* a b?



$$\vec{F}(\vec{r}) = k\frac{qq'}{|\vec{r}|^2}\hat{r}$$

$$W_{ab} = \int_{\Gamma} k\frac{qq'}{r^2}\underline{\hat{r}.\overrightarrow{dl}}$$

$$dr = dl\ \cos\phi$$

Proyeccion del diferencial de desplazamiento sobre la direción radial. O sea: en cada diferencial solo importa si me alejo o acerco radialmente al centro

$$W_{ab} = \int_{r_a}^{r_b} k\frac{qq'}{r^2}dr \quad = kqq'\int_{r_a}^{r_b}\frac{1}{r^2}dr \quad = kqq'\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_a}^{r_b}$$

$$W_{ab} = kqq'\left[\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right] = -\left[\frac{kqq'}{r_b} - \frac{kqq´}{r_a}\right]$$

$$W_{ab} = -\left[\frac{kqq'}{r_b} - \frac{kqq´}{r_a}\right]$$

$$W_{ab} = -[U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a)]$$

con $U(\vec{r}) = \dfrac{kqq'}{r} + cte$

El caso eléctrico

F electrica es conservativa

$$W_{ab} = \int_{\Gamma} \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -(U_b - U_a) = -\Delta U$$

Comprobamos que para el caso electrico

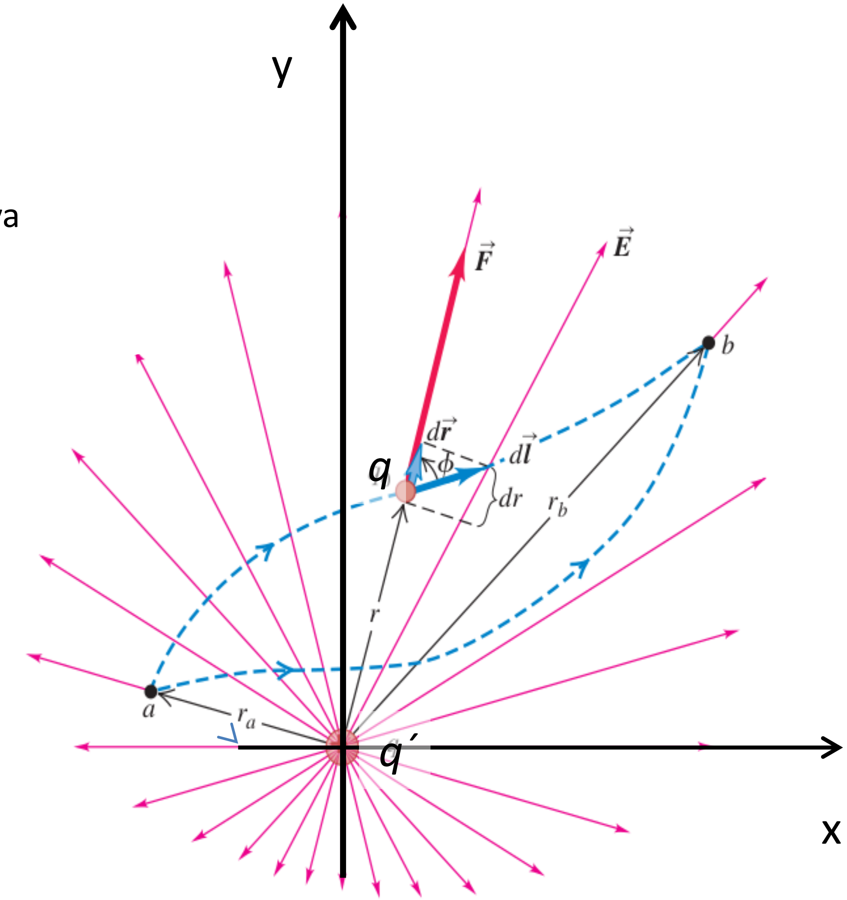
$$W_{ab} = -[U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a)]$$

con $$\boxed{U(\vec{r}) = \frac{kqq'}{r} + cte}$$

Energía potencial eléctrica

Definimos: $$\boxed{V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q} = \frac{kq'}{r} + cte}$$

Potencial electrostático



[U]: Joules

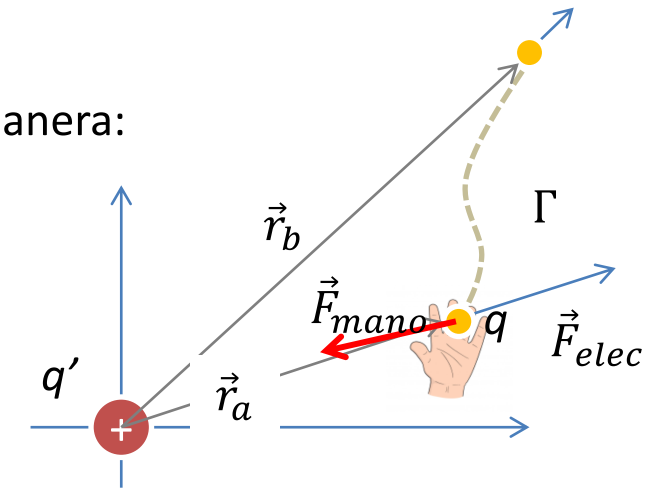
[V]: Joules/C = Volts

Interpretación física

$$W_{F_{el}} = -[U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a)] = -q[V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a)]$$

Pero además podemos pensar lo de la siguiente manera:

Cúal es **trabajo** que se debería hacer para mover a la carga *q* a lo largo de la trayectoria Γ, en presencia de la carga fuente *q´* de manera **cuasi-estática**?



con aceleración despreciable en todo punto de la trayectoria

$$\vec{F}_{mano} \sim -\vec{F}_{elec}$$

desplazamiento cuasi-estático

$$W_{F_{externa}} = \int_{\Gamma} \vec{F}_{externa} . \overrightarrow{dl} = -\int_{\Gamma} \vec{F}_{elec} . \overrightarrow{dl} = +[U(\vec{r}_b) - U(\vec{r}_a)]$$

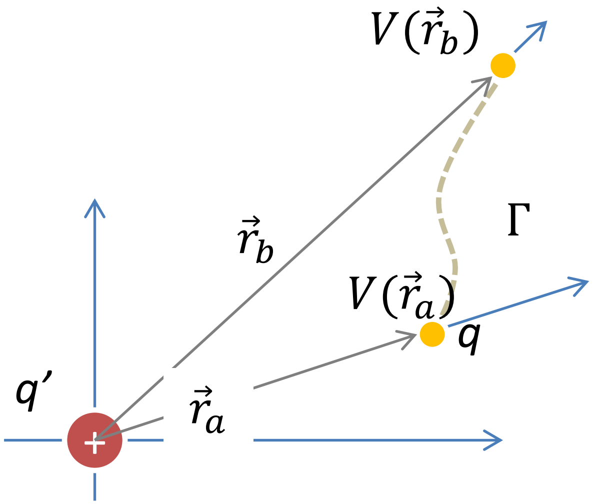
Indep de la trayectoria(!)

$$W_{F_{externa}} = q[V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a)]$$

La **diferencia de potencial** entre dos puntos es igual al **trabajo necesario, por unidad de carga**, para llevar una carga de prueba a lo largo de **cualquier trayectoria cuasiestatica** definida entre los mismos

Que hacemos con la constante?

$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q} = \frac{kq'}{r} + cte$$



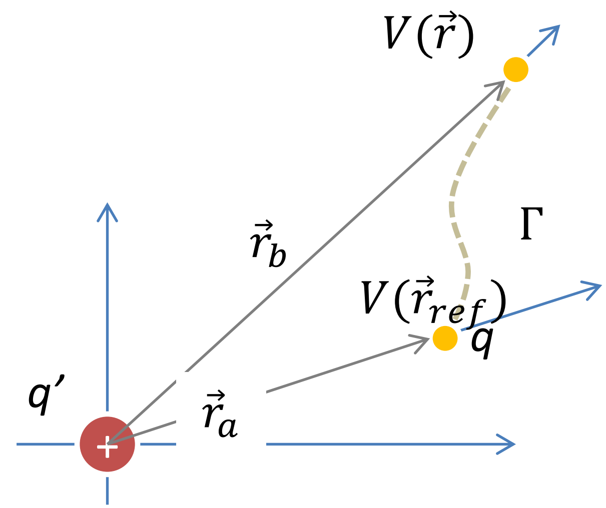
Llegamos al concepto de potencial calculando un trabajo

$$W_{F_{externa}} = q[V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a)]$$

Lo que tiene sentido físico es una variación de potencial…que hacemos para fijar la cte?

Que hacemos con la constante?

$$V(\vec{r}) = \frac{U(\vec{r})}{q} = \frac{kq'}{r} + cte$$



Llegamos al concepto de potencial calculando un trabajo

$$W_{F_{externa}} = q\left[V(\vec{r}) - V(\vec{r}_{ref})\right]$$

Lo que tiene sentido físico es una variación de potencial…que hacemos para fijar la cte?

I. Utilizamos un punto de referencia, $\vec{r}_{ref}$, y definimos el potencial en cualquier punto del espacio como

$$V(\vec{r}) = \frac{W_{F_{externa}}}{q} + V(\vec{r}_{ref})$$

II. Si la distribución de fuentes es **localizada** (i.e. no hay cargas en el infinito)

$$\vec{r}_{ref} \to \infty \qquad V\left(\vec{r}_{ref} = \infty\right) = 0$$

Pedir esto es fijar la cte

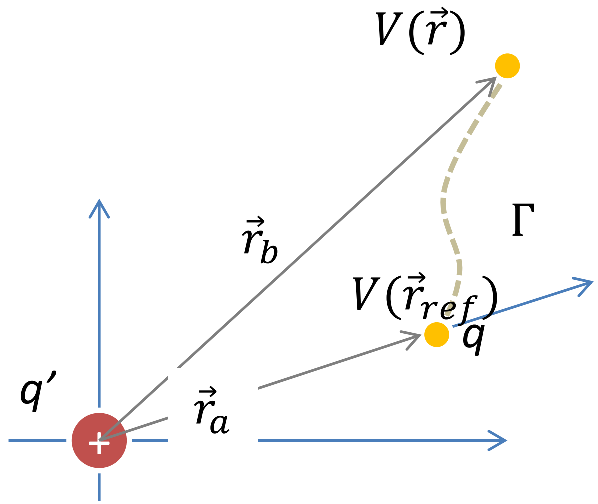
$$V\left(\vec{r}_{ref} = \infty\right) = \cancel{\frac{kq'}{\infty}} + cte = 0$$

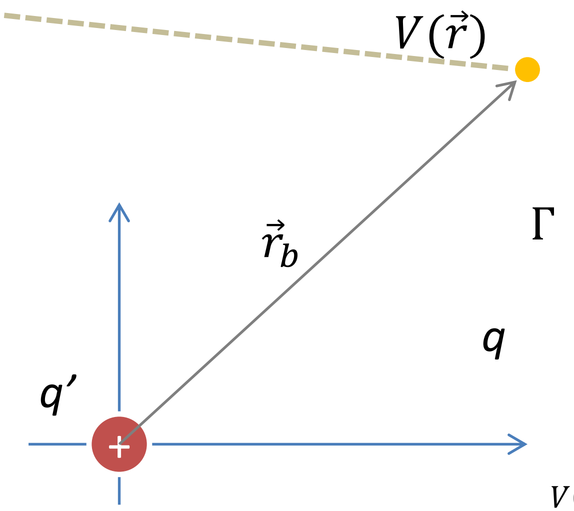
$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{r}$$

(No seria consistente pedir V=0 si hubiera cargas alli)

$V(\vec{r}_{ref}) = 0$

Potencial asociado a fuentes **localizadas**





$V(\vec{r}_{ref} = \infty) = 0$

$\vec{r}_{ref} \to \infty$

$$V(\vec{r}) = \frac{W_{F_{externa}}}{q} + V(\vec{r}_{ref})$$

$$V(\vec{r}) = \frac{W_{F_{externa}}}{q}$$

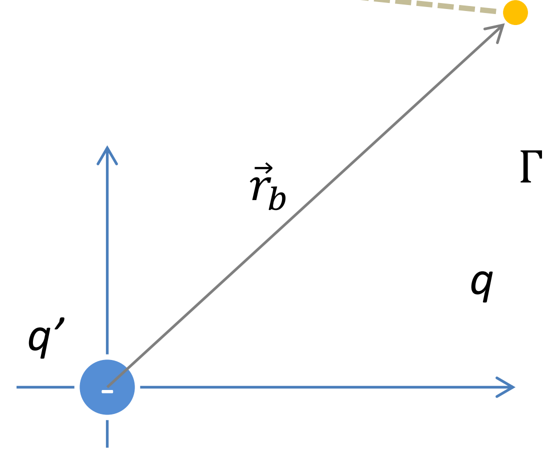
$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{r}$$

Asi definido $V(\vec{r})$ representa el **trabajo por unidad de carga**, que se debe realizar para, en presencia de las fuentes**, traer desde el infinito** hasta el punto $\vec{r}$ una carga q, de manera cuasiestatica.

$V(\vec{r}_{ref}) = 0$

Potencial asociado a fuentes **localizadas**

$V(\vec{r}) < 0$



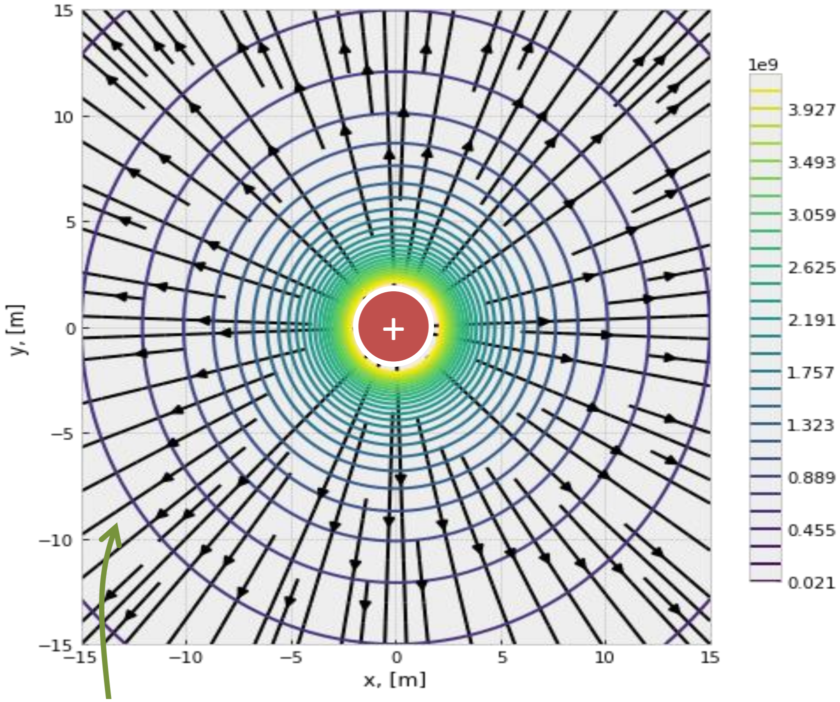
Qué representa $V(\vec{r}) < 0$?

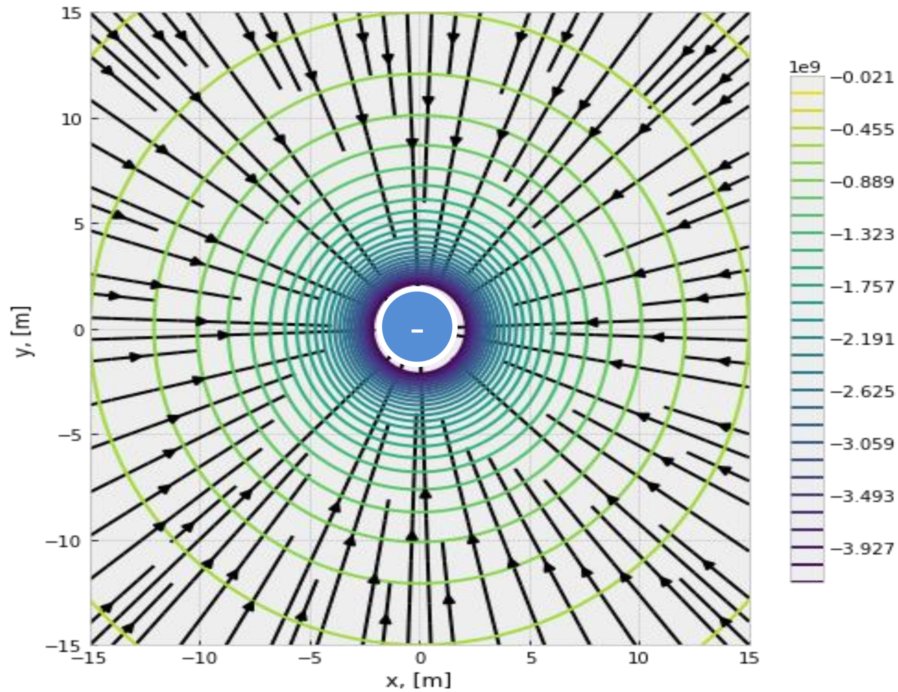
$$V(\vec{r}) = \frac{W_{F_{externa}}}{q}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{r}$$

Asi definido $V(\vec{r})$ representa el **trabajo por unidad de carga**, que se debe realizar para, en presencia de las fuentes**, traer desde el infinito** hasta el punto $\vec{r}$ una carga q, de manera cuasiestatica.

$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{r}$$





equipotenciales: líneas que unen puntos de igual *V*

En estos ejemplos notar que $V(\vec{r} \to 0) \to \pm\infty$

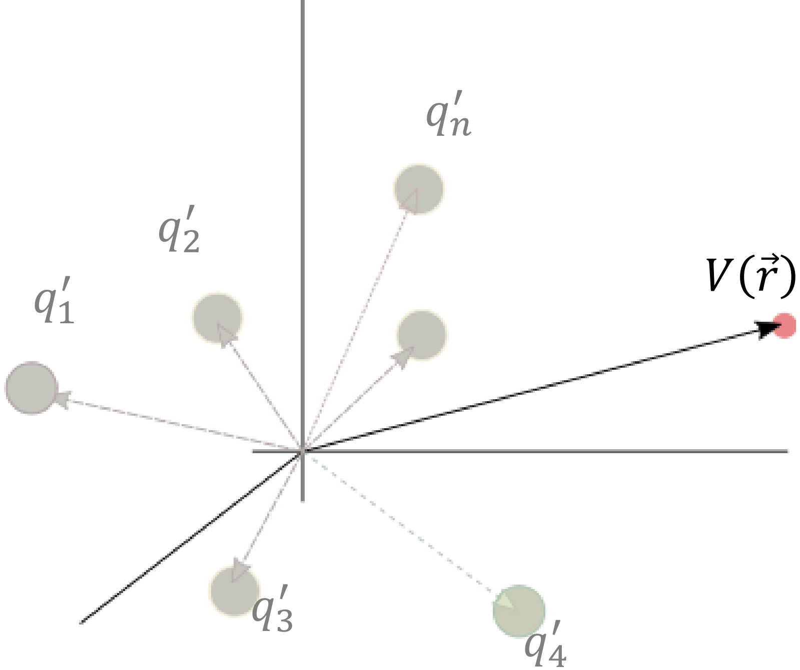
Asi definido $V(\vec{r})$ representa el **trabajo por unidad de carga**, que se debe realizar para, en presencia de las fuentes, **traer desde el infinito** hasta el punto $\vec{r}$ una carga q, de manera cuasiestatica.

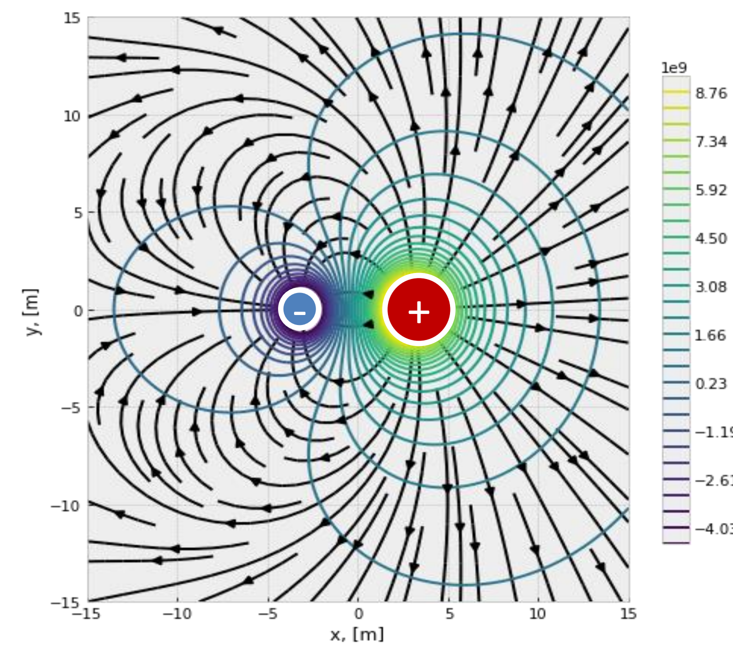
Superposición

Como vale superposición para fuerza Coulombiana y campo, también vale para potencial:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} V_{q_i'}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i{}'}{|\vec{r} - \vec{r}'_i|}$$

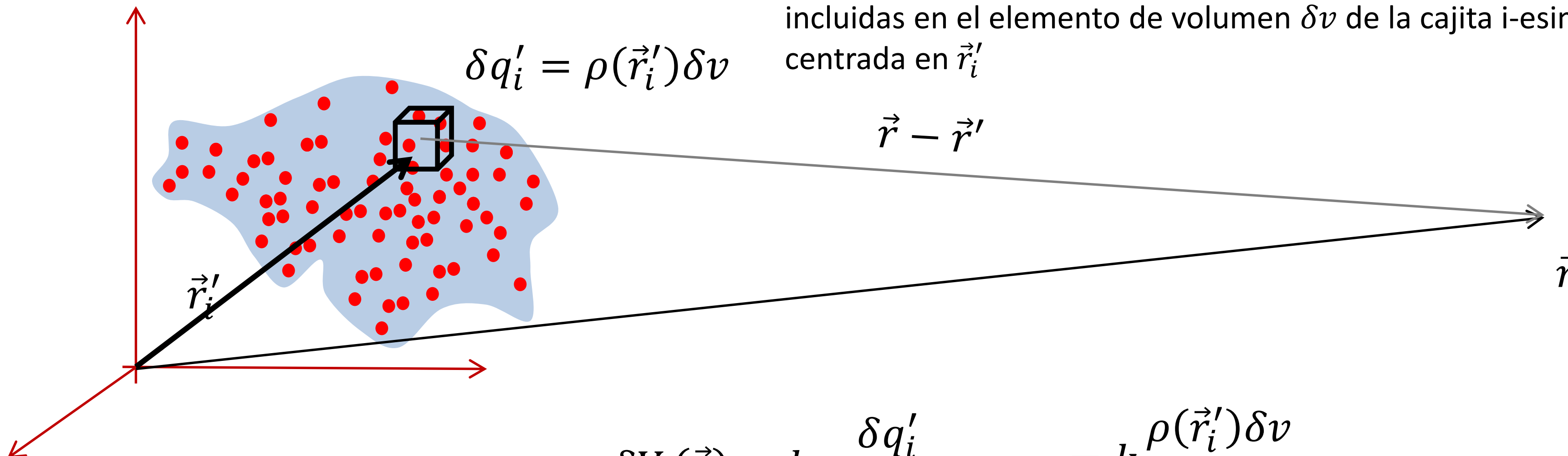
$$V(\vec{r}) = \frac{kq_1{}'}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|} + \frac{kq_2{}'}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|}$$





Distribuciones continuas

Cuál es la contribución al potencial $V(\vec{r})$ de las fuentes incluidas en el elemento de volumen δv de la cajita i-esima centrada en $\vec{r}_i'$

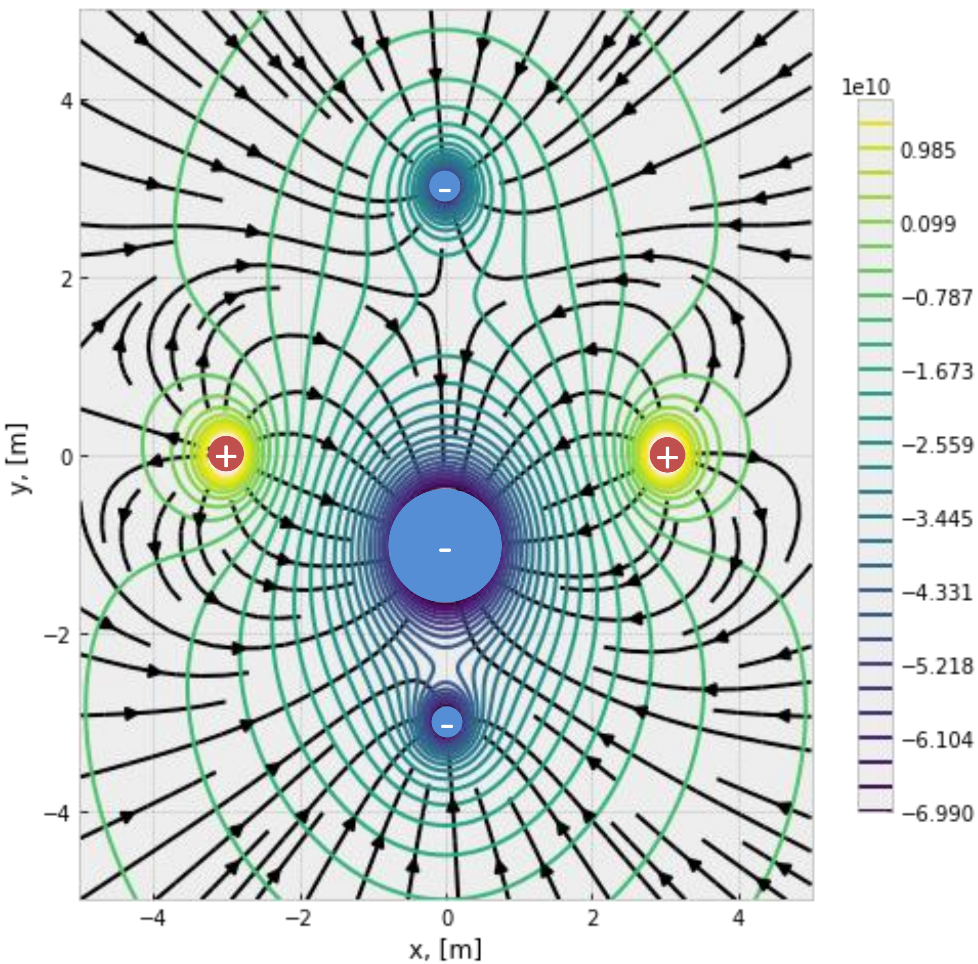


$$\delta V_i(\vec{r}) = k\,\frac{\delta q_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} \qquad = k\,\frac{\rho(\vec{r}_i')\delta v}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|}$$

El potencial **total** resulta de sumar la contribución de las cargas de todas las cajitas

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} \delta V_i(\vec{r}) \quad = \sum_{i=1}^{N} k\,\frac{\rho(\vec{r}_i')\delta v}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|} \quad \xrightarrow[\substack{0 < \delta v \ll 1 \\ N \to \infty}]{} \quad \boxed{V(\vec{r}) = \int k\,\frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\,\delta v}$$

Dos campos dos



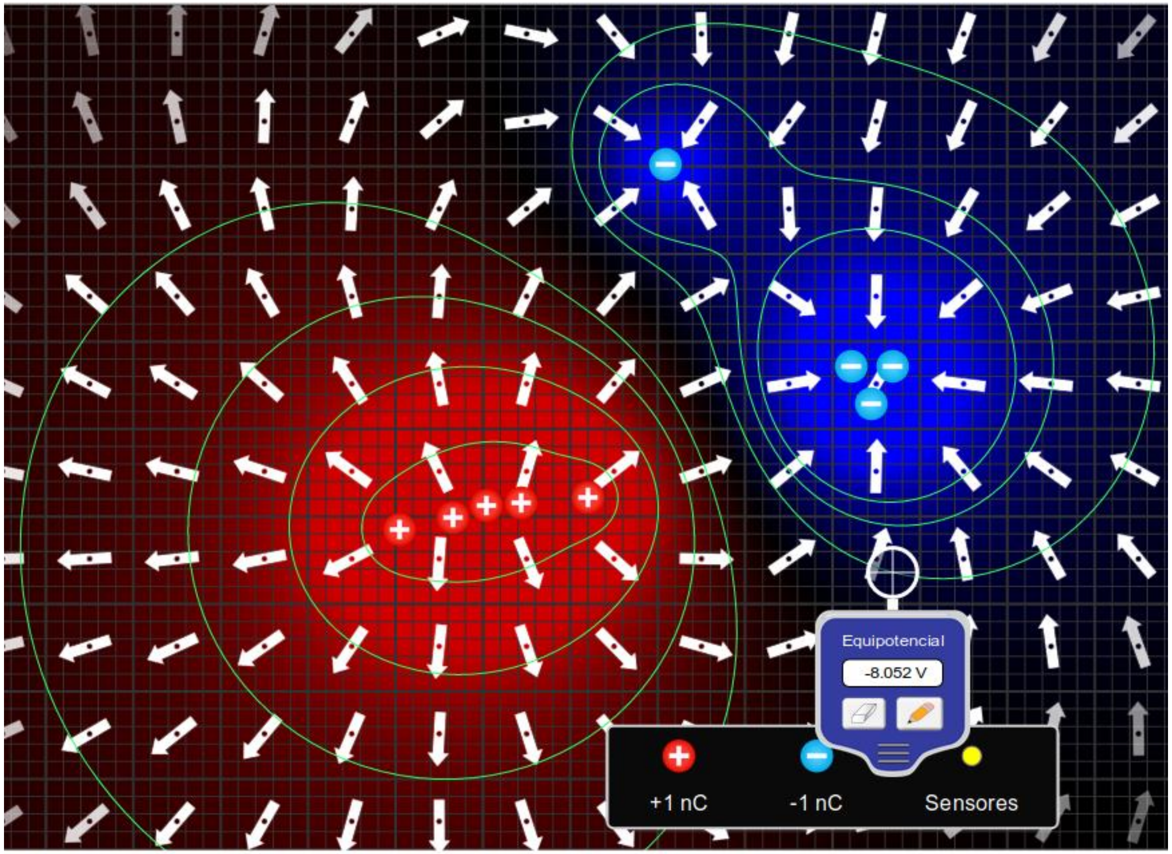
Campo **vectorial**: Fza por unidad de carga debido a las fuentes

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} k \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i')}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i'\right|^3} q_i'$$

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} k \frac{q_i'}{\left|\vec{r} - \vec{r}_i'\right|}$$

Campo **escalar**: Trabajo por unidad de carga para traer cuasiestaticamente una carga desde lejos en presencia de las fuentes

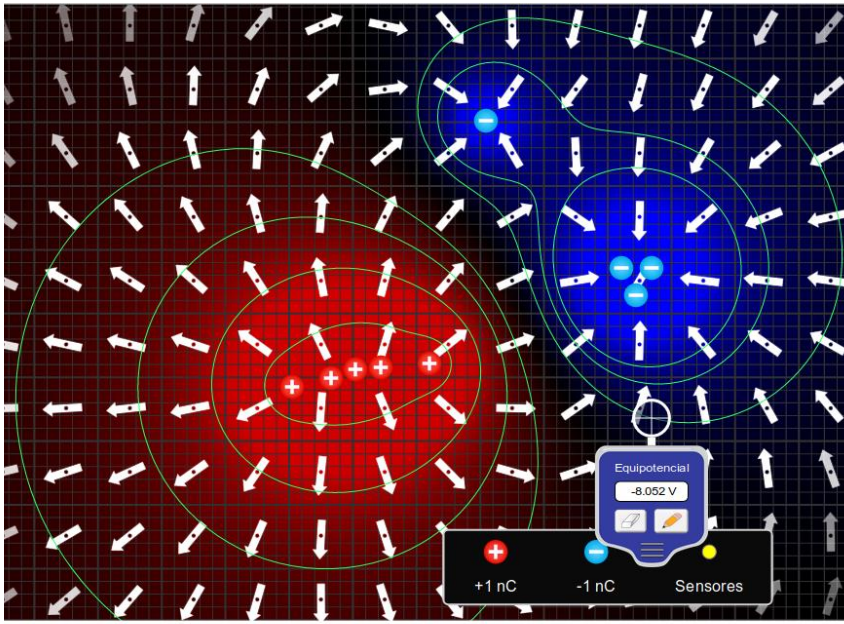
Dos campos dos



Dos campos dos

- Si conozco $\vec{E}(\vec{r})$: $V(\vec{r}_b) = -\int_{\Gamma_{ab}} \vec{E}.\overrightarrow{dl} + V(\vec{r}_a)$

- Si conozco $V(\vec{r})$: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$



El **gradiente** de una función escalar es un vector que apunta en la máxima dirección de crecimiento

$\vec{E}$ es perpendicular a las líneas equipotenciales

$$\Delta V(\vec{r}) = \int_{\Gamma} \overbrace{-\vec{E}.\overrightarrow{dl}}^{dV}$$

Si el desplazamiento es a lo largo de la equipotencial

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -E\ dl\ \cos\phi\ = 0\ \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

El potencial disminuye su valor lo más rápidamente en la dirección de $\vec{E}$

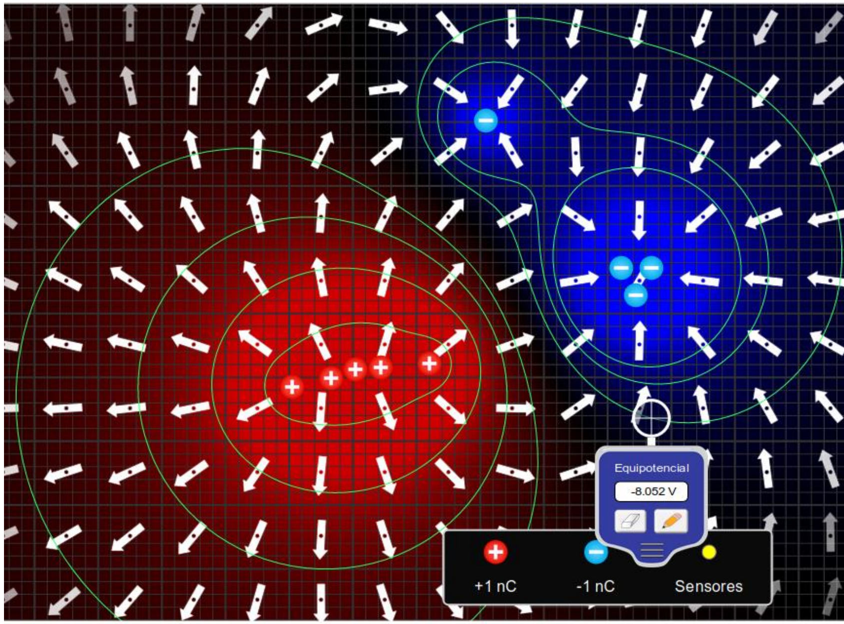
En que direccion me debo mover para lograr la maxima disminucion?

$$dV^* = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}^* = -E\ dl\ \cos\phi^* \longrightarrow \phi^* = 0$$

Dos campos dos

- Si conozco $\vec{E}(\vec{r})$: $V(\vec{r}_b) = -\int_\Gamma \vec{E}.\overrightarrow{dl} + V(\vec{r}_a)$

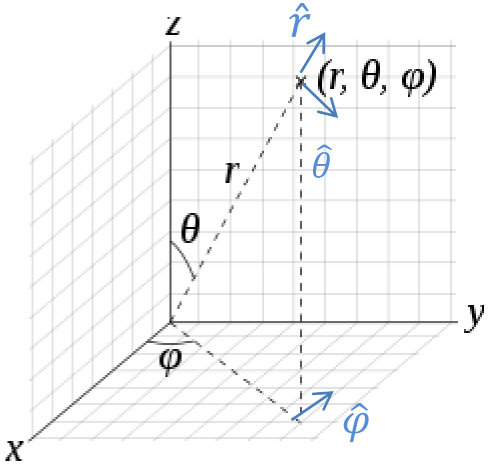
- Si conozco $V(\vec{r})$: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$



En coordenadas cartesianas:

$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{z}$$

En coordenadas esféricas:

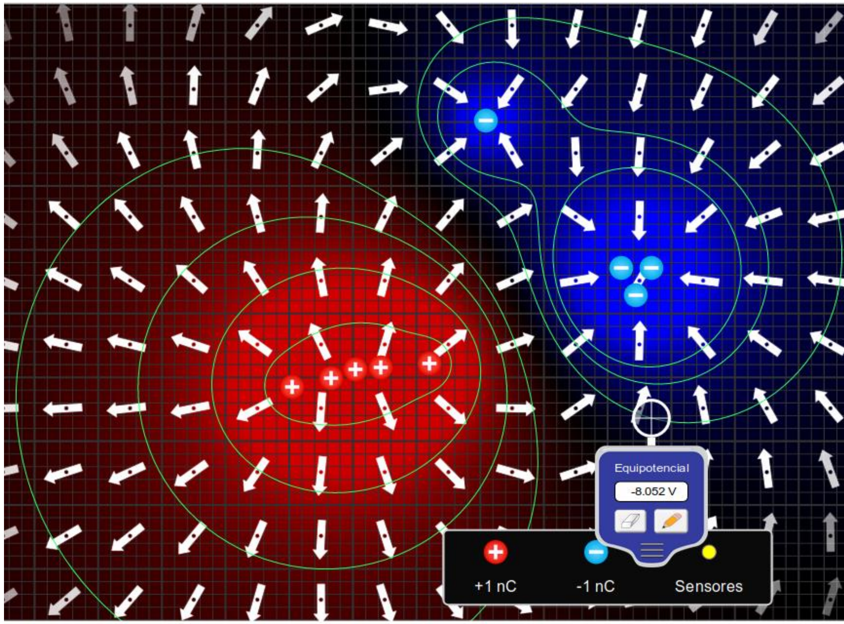


$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial r}}_{-E_r}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}}_{-E_\theta}\hat{\theta} + \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}}_{-E_\varphi}\hat{\varphi}$$

Dos campos dos

- Si conozco $\vec{E}(\vec{r})$: $V(\vec{r}_b) = -\int_{\Gamma} \vec{E}.\overrightarrow{dl} + V(\vec{r}_a)$

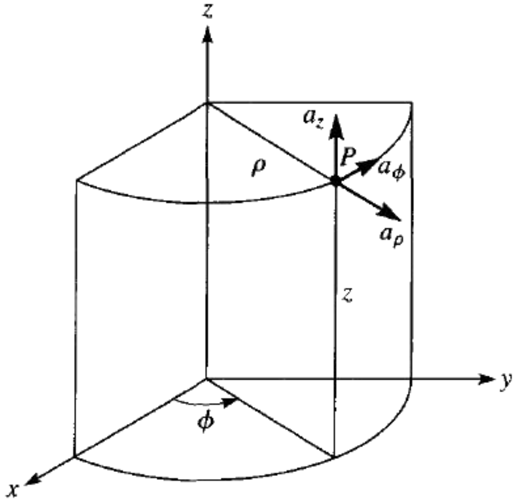
- Si conozco $V(\vec{r})$: $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$



En coordenadas cartesianas:

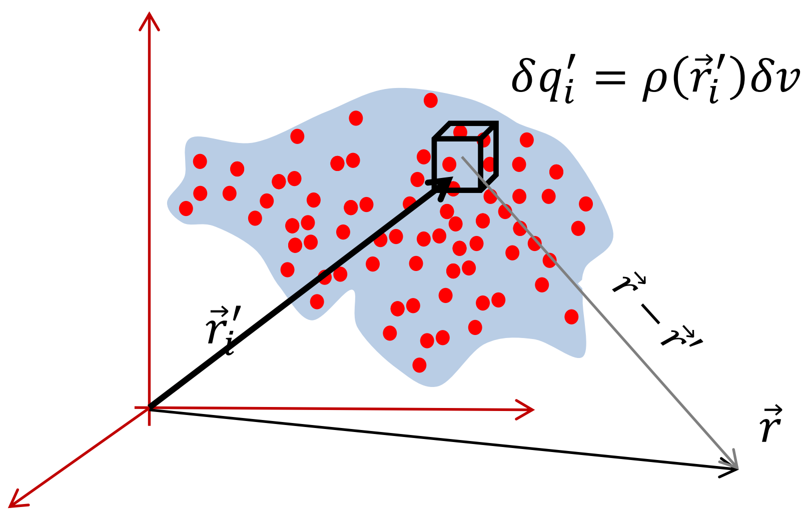
$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\hat{z}$$

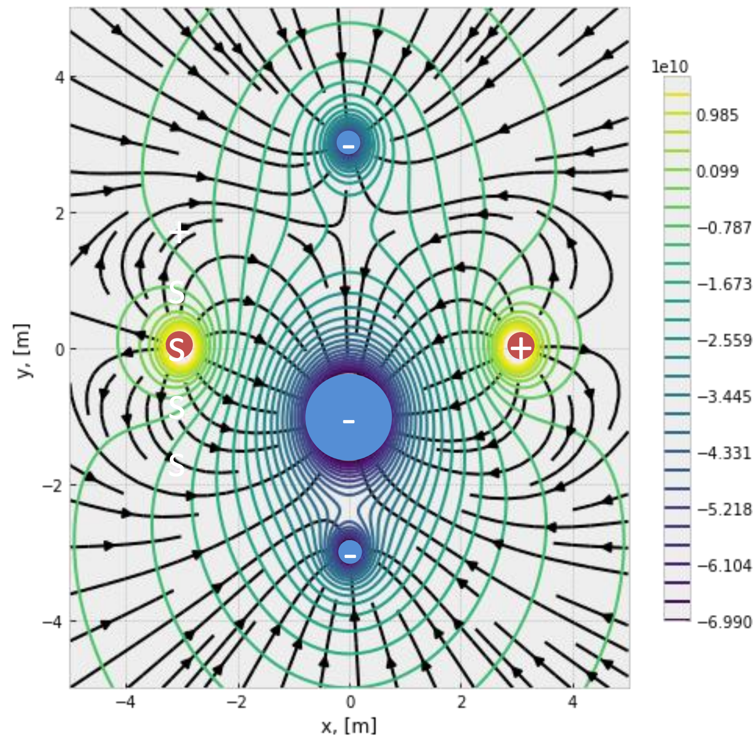
En coordenadas cilíndricas:



$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \underbrace{\frac{\partial V(\rho,\varphi,z)}{\partial \rho}}_{-E_r}\hat{r} + \underbrace{\frac{1}{\rho}\frac{\partial V(\rho,\varphi,z)}{\partial \varphi}}_{-E_\theta}\hat{\varphi} + \underbrace{\frac{\partial V(\rho,\varphi,z)}{\partial z}\hat{z}}_{-E_\varphi}$$

Resumen





Si conozco la distribución de cargas fuente ($\delta q_i'$ o $\rho(\vec{r}\,')$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int k \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \rho(\vec{r}\,')\delta v' \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} k \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i{}')}{|\vec{r} - \vec{r}_i{}'|^3} \delta q_i' \right)$$

$$V(\vec{r}) = \int k \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \delta v \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} k \frac{\delta q_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i{}'|} \right)$$

Si conozco $\vec{E}$

$$V(\vec{r}_b) = -\int_{\Gamma} \vec{E}.\vec{dl} + V(\vec{r}_a)$$

Si conozco V

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Resumen

Si conozco la distribución de cargas fuente ($\delta q_i'$ o $\rho(\vec{r}\,')$)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int k \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \rho(\vec{r}\,') \delta v' \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} k \frac{(\vec{r} - \vec{r}_i\,')}{|\vec{r} - \vec{r}_i\,'|^3} \delta q_i' \right)$$

$$V(\vec{r}) = \int k \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \delta v \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} k \frac{\delta q_i'}{|\vec{r} - \vec{r}_i\,'|} \right)$$

Si conozco $\vec{E}$

$$V(\vec{r}_b) = -\int_{\Gamma} \vec{E} . \overrightarrow{dl} + V(\vec{r}_a)$$

Si conozco V

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

- Integrar V es más fácil que integrar $\vec{E}$ (integral vectorial)
- Derivar es más facil que integrar

Entonces…para configuraciones de carga **localizadas** (i.e. podemos poner la ref en el infinito) conviene en general

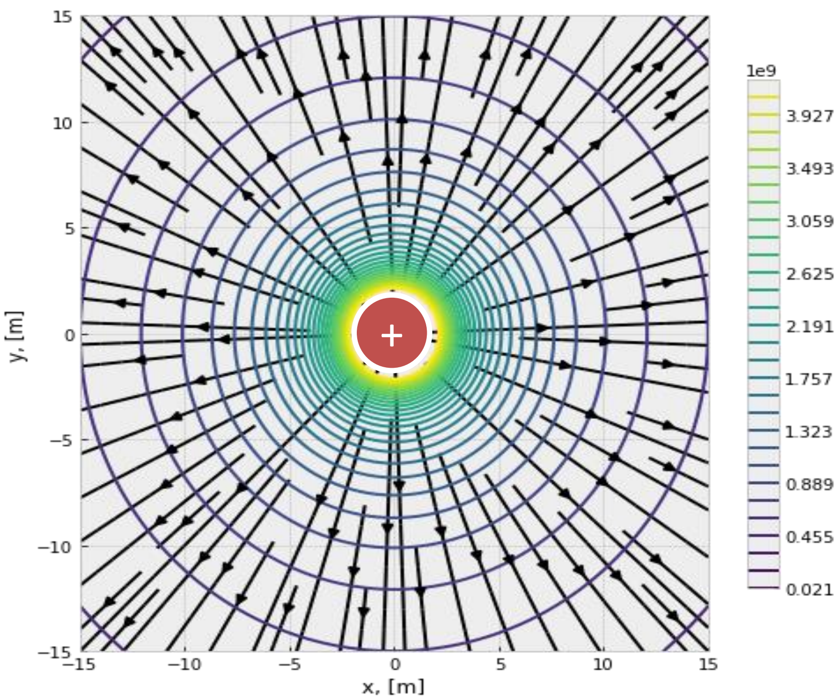
$$\rho(\vec{r}\,') \quad \rightarrow \quad V(\vec{r}) = \int k \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \delta v \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$$

Para configuraciones de carga **no-localizadas** $\quad \rho(\vec{r}\,') \quad \rightarrow \quad E(\vec{r}) \quad \rightarrow \quad V(\vec{r})$

De $V(\vec{r})$ a $\vec{E}(\vec{r})$

Veamos como lo que estuvimos viendo funciona en algunos ejemplos

$$V(\vec{r}) = \frac{kq'}{r}$$



- Como $V(\vec{r}) = V(r)$ las equipotenciales son esferas centradsa en el origen (r=cte)

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(r,\theta,\varphi) \; = -\vec{\nabla}V(r)$$

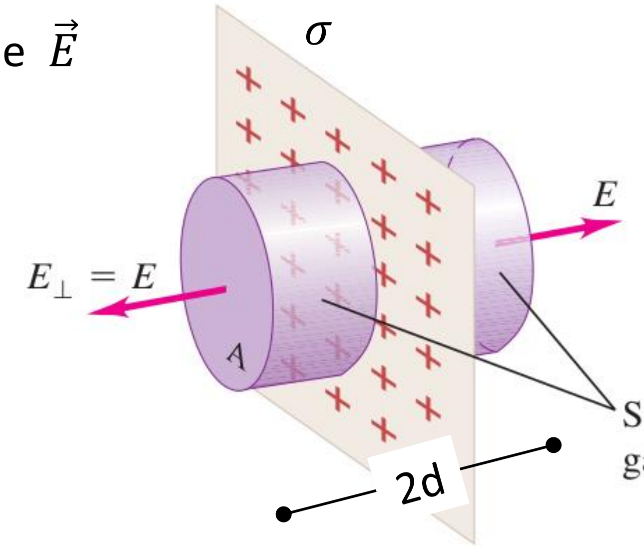
$$\vec{\nabla}V(\vec{r}) = \frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\hat{r} + \cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\hat{\theta}} + \cancel{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}}\hat{\varphi}$$

$$= \frac{\partial V(r)}{\partial r}\hat{r} = \frac{\partial \frac{kq'}{r}}{\partial r}\hat{r} \; = -k\frac{q'}{r^2}\hat{r}$$

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{q'}{r^2}\,\hat{r}}$$ (perpendicular a equipots)

Potencial de un plano infinto

Como esta distribucion es **no-localizada** calculamos V a partir de $\vec{E}$



Recordemos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(x)\hat{x} = 2\pi k\, \sigma\, sign(x)\hat{x}$$

$$dV = -\vec{E}.\overrightarrow{dl}$$

$$= -2\pi k\, \sigma\, sign(x)\hat{x}.\overrightarrow{dl}$$

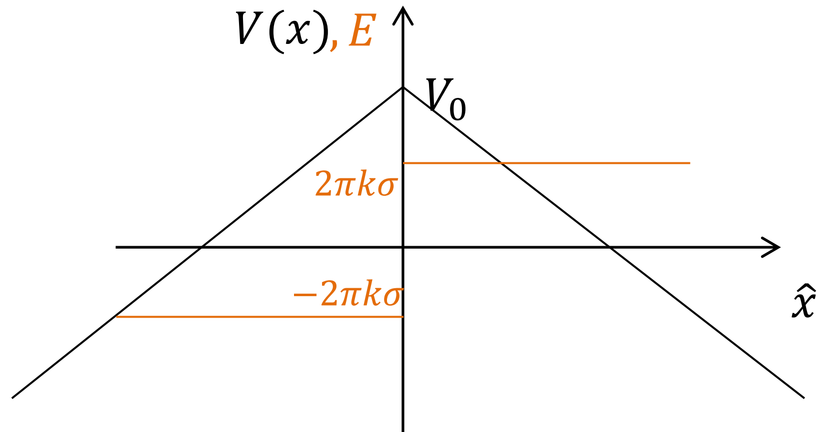
$$dV = -2\pi k\, \sigma\, sign(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x} dV = -\int_{x_0}^{x} 2\pi k\, \sigma\, sign(x)dx$$

Si elijo $x_0 = 0$ (sobre el plano)

$$V(x) - V(x_0) = \mp 2\pi k\, \sigma\, (x - x_0)$$

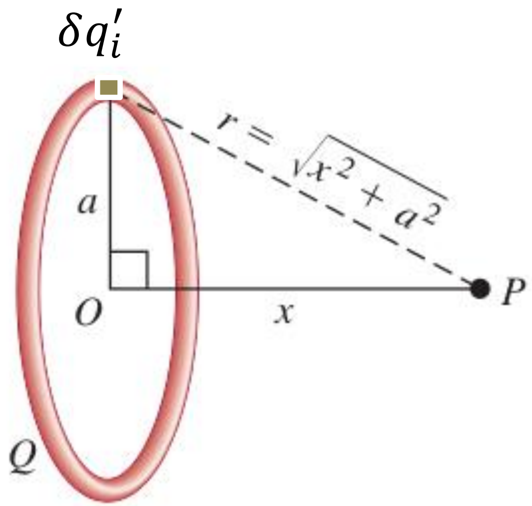
$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_0 - 2\pi k\, \sigma\, x & (x > 0) \\ V_0 + 2\pi k\, \sigma\, x & (x < 0) \end{cases}$$



Notar que todo cierra:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x} = 2\pi k\, \sigma\, sign(x)\hat{x}$$

Potencial V en el eje de un anillo cargado



$$V(x) = \int k\frac{\delta q'}{r} = \int k\frac{\delta q'}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

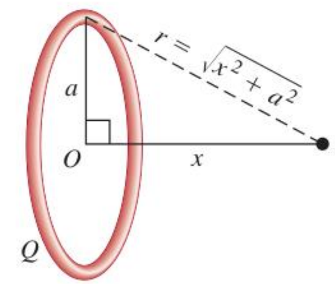
$$= \frac{k}{\sqrt{x^2 + a^2}}\int \delta q' = \frac{kQ'}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V(x) = \frac{kQ'}{|x|}\frac{1}{\sqrt{1 + (a/x)^2}}$$

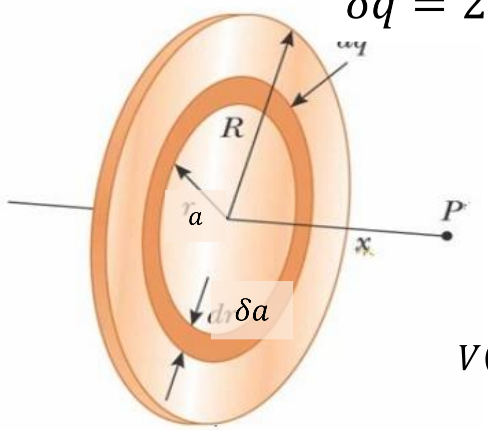
Notar que cuando x>>a el potencial es el de una carga en el origen

Potencial V en el eje de un **disco** cargado

$$V(x) = \frac{kQ'}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



$$\delta q = 2\pi a\ \delta a\ \sigma$$



Puedo pensar al disco cargado como una serie de anillos concentricos y usar superposicion

$$\delta V_{anillo}(x) = \frac{k\delta q}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{k2\pi a\ \delta a\ \sigma}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

$$V(\vec{r}) = \int_0^{\delta a} \delta V_{anillo} + \int_{\delta a}^{2\delta a} \delta V_{anillo} + \cdots + \int_{R-\delta a}^{R} \delta V_{anillo}$$

$$V(\vec{r}) = \int_0^R \frac{k2\pi a\ \delta a\ \sigma}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 2\pi k\sigma \int_0^R \frac{a\delta a}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2}\right)$$

$$= 2\pi k\sigma\left(\sqrt{x^2 + R^2} - |x|\right)$$

Que debería pasar **muy cerca del disco** $(x \ll R)$?

$$\sqrt{x^2 + R^2} = R\sqrt{1 + \left(\frac{x}{R}\right)^2} \sim R\left[1 + \frac{(x/R)^2}{2}\right]$$

$$V(\vec{r}) \sim 2\pi k\sigma R\left[1 + \frac{(x/R)^2}{2} - \frac{|x|}{R}\right]$$

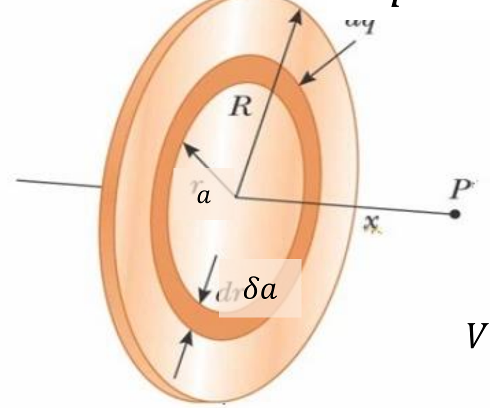
$$\sim 2\pi k\sigma R\left[1 - \frac{|x|}{R}\right]$$

Expresión del potencial de un plano infinito(!) Tiene sentido?

$$V(\vec{r}) \sim 2\pi k\sigma R - 2\pi k\sigma|x|$$

Potencial V en el eje de un **disco** cargado

$$\delta q = 2\pi a\ \delta a\ \sigma$$

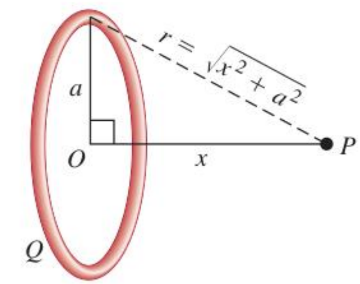


Puedo pensar al disco cargado como una serie de anillos concentricos y usar superposicion

$$\delta V_{anillo}(x) = \frac{k\delta q}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{k2\pi a\ \delta a\ \sigma}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$V(\vec{r}) = \int_0^{\delta a} \delta V_{anillo} + \int_{\delta a}^{2\delta a} \delta V_{anillo} + \cdots + \int_{R-\delta a}^{R} \delta V_{anillo}$$

$$V(x) = \frac{kQ'}{\sqrt{x^2+a^2}}$$



$$V(\vec{r}) = \int_0^R \frac{k2\pi a\ \delta a\ \sigma}{\sqrt{x^2+a^2}} = 2\pi k\sigma \int_0^R \frac{a\delta a}{\sqrt{x^2+a^2}} = 2\pi k\sigma\left(\sqrt{x^2+R^2} - \sqrt{x^2}\right)$$

$$V(\vec{r}) = 2\pi k\sigma\ |x|\left(\sqrt{1+\left({}^{R}/_{x}\right)^2} - 1\right)$$

Puedo usar este resultado para determinar V de un plano infinito?
Que pasa con el limite $R \to \infty$? Cual es el problema?

Para cargas no localizadas tengo que estimar E primero