

09. Dipolo magnético

Ampere

Fuerza magnética sobre una espira

Consideremos una espira por la que circula corriente I inmersa en un campo uniforme: $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$

El circuito de la espira está definido por

$$\vec{dl}_1 = -dl \hat{z} \quad \text{para } x = \frac{a}{2} \quad -a/2 < z < a/2$$

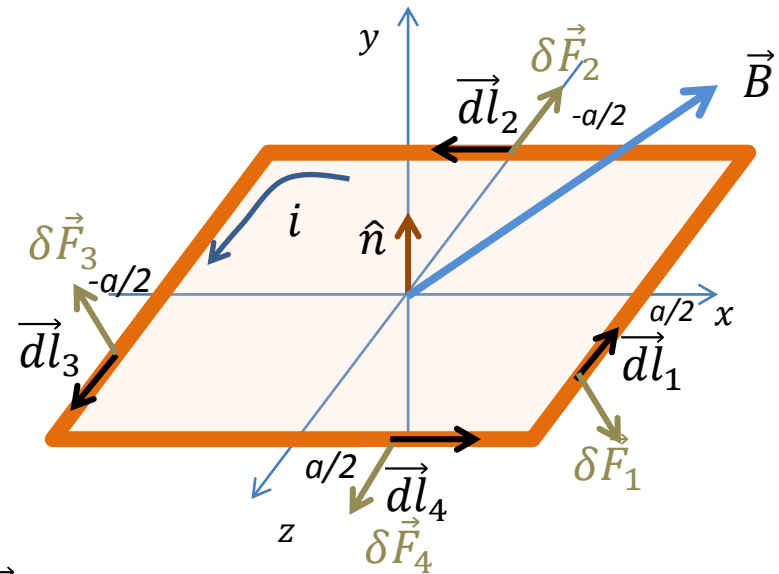
$$\vec{dl}_2 = -dl \hat{x} \quad \text{para } z = -\frac{a}{2} \quad -a/2 < x < a/2$$

$$\vec{dl}_3 = dl \hat{z} \quad \text{Para } x = -\frac{a}{2} \quad -a/2 < z < a/2$$

$$\vec{dl}_4 = dl \hat{x} \quad \text{para } z = \frac{a}{2} \quad -a/2 < x < a/2$$

Sobre cada segmento de la espira aparece una fuerza

$$\delta \vec{F}_B = I \vec{dl} \times \vec{B}(\vec{r})$$



Fuerza magnética sobre una espira

Consideremos una espira por la que circula corriente I inmersa en un campo **uniforme**: $\vec{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y}$

$$\delta \vec{F}_B = I \vec{dl} \times \vec{B}(\vec{r})$$

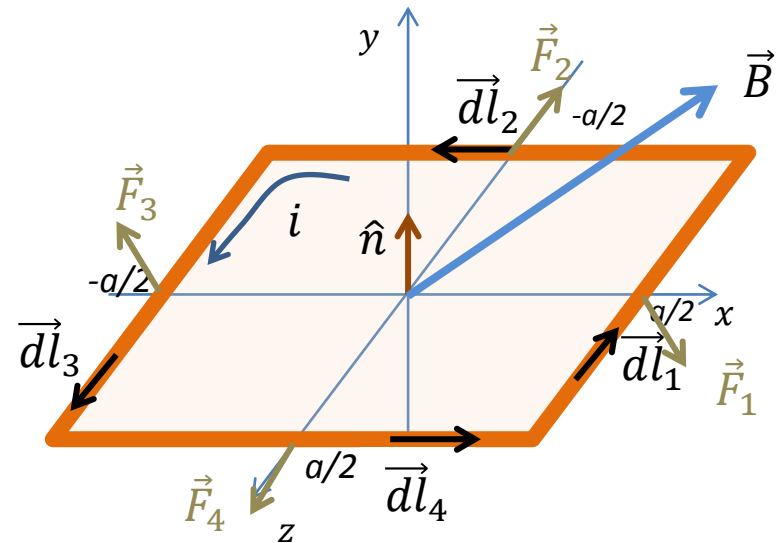
$$\vec{F}_i = I \int \vec{dl} \times \vec{B}(\vec{r}) = I \left(\int \vec{dl} \right) \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{F}_1 = I a (-\hat{z}) \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= I a (-\hat{x}) \times \vec{B}(\vec{r}) = I a (-\hat{x}) \times B_y \hat{y} \\ &= I a B_y (-\hat{z}) \end{aligned}$$

$$\vec{F}_3 = I a \hat{z} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\vec{F}_4 = I a \hat{x} \times \vec{B}(\vec{r}) = I a B_y \hat{z}$$



$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2$$

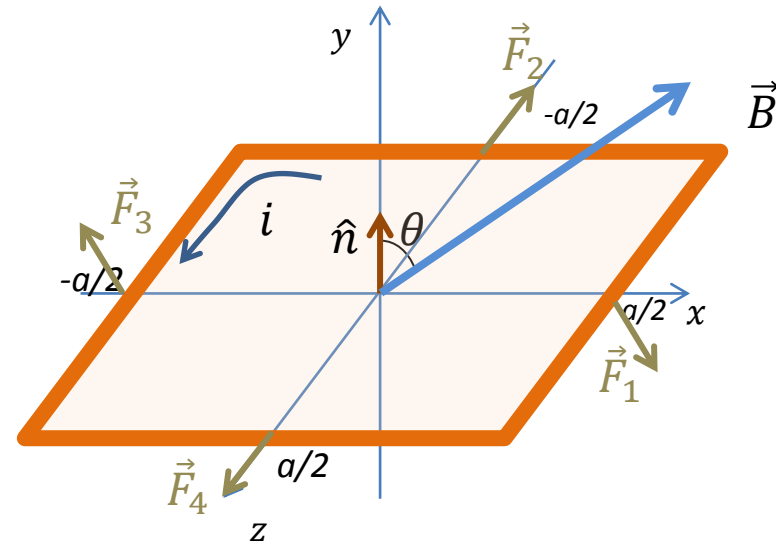
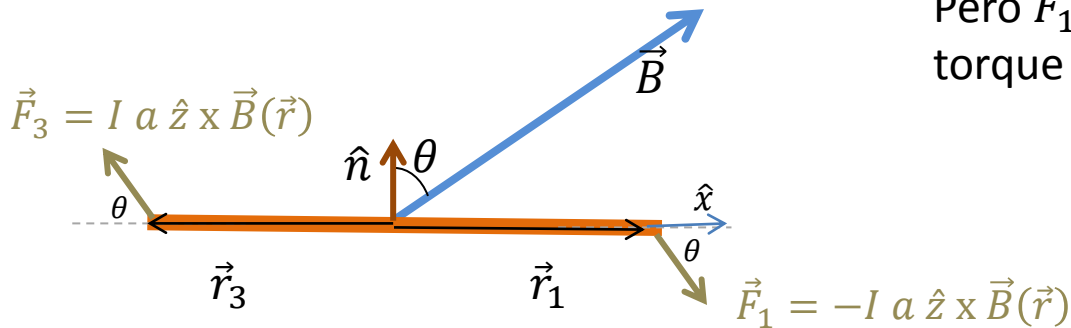
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$$

$$\vec{F}_{Tot} = 0$$

Torque sobre una espira

$$\vec{F}_{Tot} = 0$$

Pero \vec{F}_1 y \vec{F}_3 son fzas opuestas que realizan torque (momento) sobre la espira



$$\begin{aligned}\vec{\tau}_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 \\ &= \frac{a}{2} (-\hat{x}) \times \vec{F}_3 \\ &= \frac{a}{2} F_3 \sin \theta (-\hat{z}) \\ &= \frac{a}{2} I a B \sin \theta (-\hat{z})\end{aligned}$$

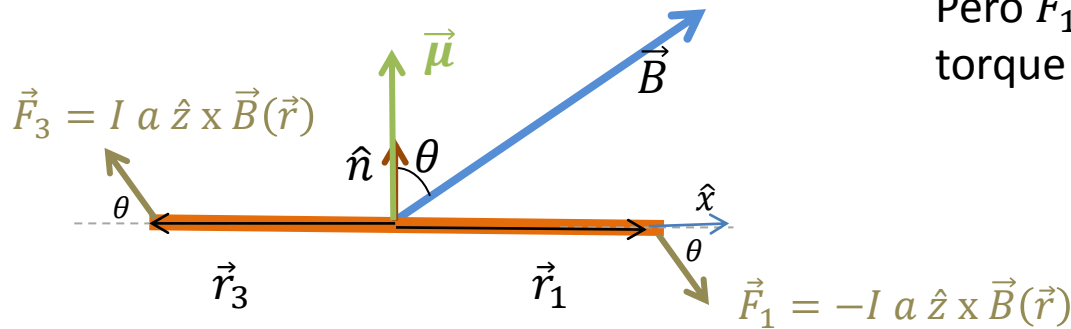
$$\begin{aligned}\vec{\tau}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 \\ &= \frac{a}{2} \hat{x} \times \vec{F}_1 \\ &= \frac{a}{2} F_1 \sin \theta (-\hat{z}) \\ &= \frac{a}{2} I a B \sin \theta (-\hat{z})\end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_3 = I a^2 B \sin \theta (-\hat{z})$$

Torque sobre una espira

$$\vec{F}_{Tot} = 0$$

Pero \vec{F}_1 y \vec{F}_3 son fzas opuestas que realizan torque (momento) sobre la espira

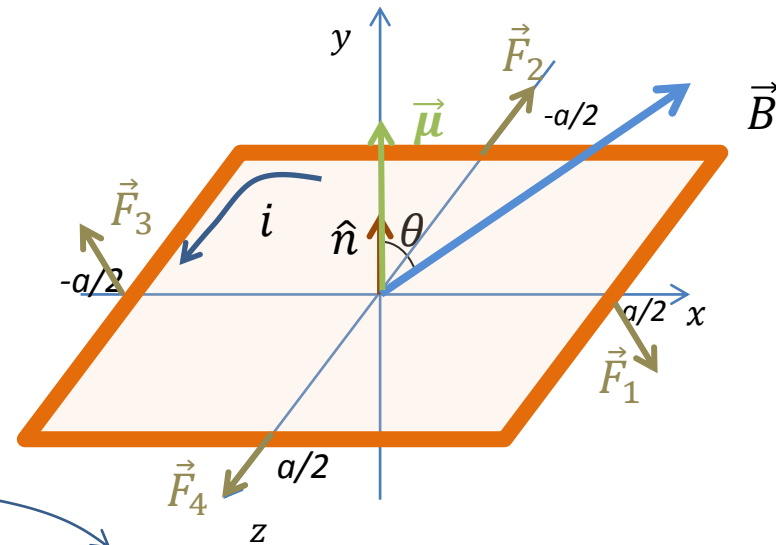


$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_3 = I a^2 B \sin \theta (-\hat{z})$$

Propiedades de la espira

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

El torque tiende a alinear $\vec{\mu}$ con \vec{B}



Definimos el momento dipolar magnético de la espira:

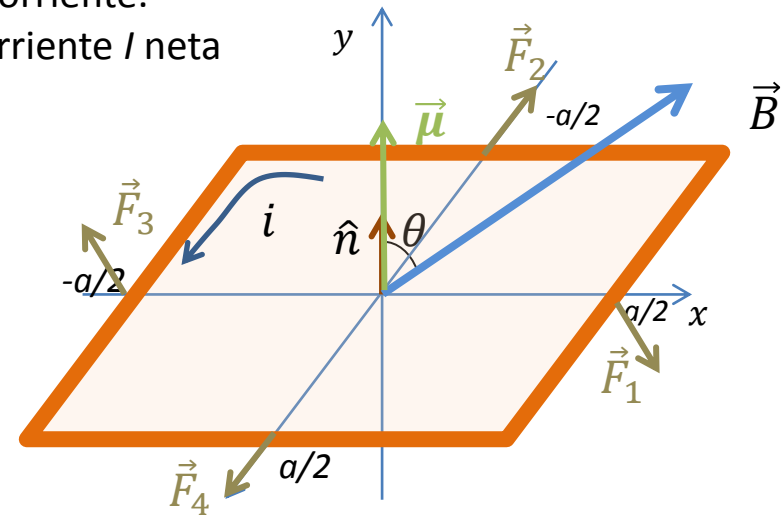
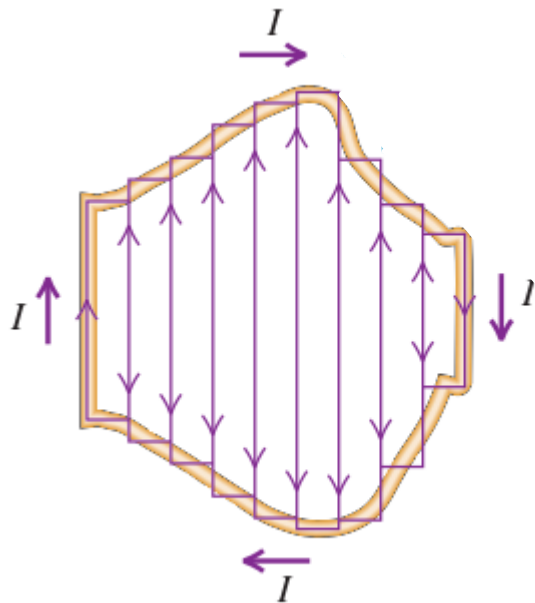
$$\vec{\mu} = I * \text{area} \hat{n}$$

- Toda espira de corriente esta caracterizada por su $\vec{\mu}$
- Notar que adoptamos el sentido de \hat{n} compatible con el sentido de circulación de corriente (regla mano derecha)

Vale para toda espira

Lo pensamos para una espira cuadrada...pero vale para cualquier espira...

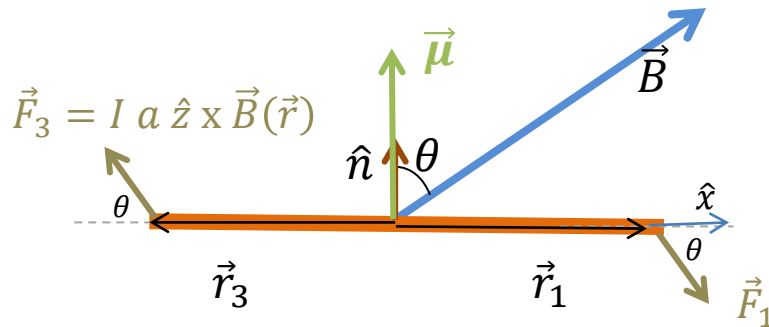
- Una espira de cualquier forma puede aproximarse por un número grande de espiras rectangulares por los que circula la misma corriente.
- Corrientes internas se anulan y puedo modelar una corriente I neta circulando por la espira original



$$\vec{\mu} = I \times \text{area} \hat{n}$$

Energía potencial (de orientación) de un dipolo magnético

El campo magnético hace rotar al dipolo.
Cuanto trabajo realiza para cambiar su orientación?



$$dW = -\tau d\theta$$

- proporcional al ángulo rotado
- el signo se debe a que el trabajo tiende a achicar el ángulo θ

$$dW = -\tau d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta$$

Este trabajo tiende a minimizar la **energía potencial de orientación** del sistema espira-campo

Haciendo este trabajo igual a la disminución de la **energía de orientación U**

$$dU = -dW = \mu B \sin \theta d\theta$$

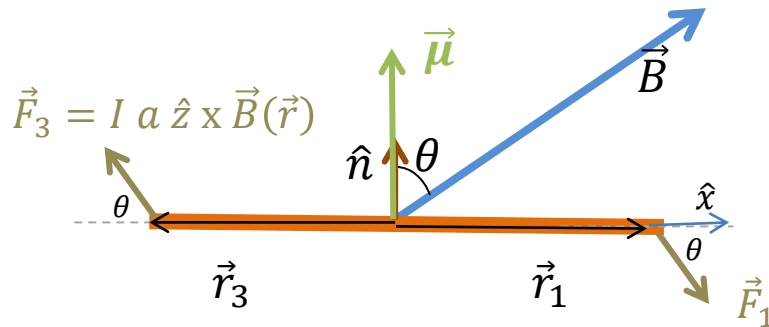
$$U = -\mu B \cos \theta + U_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\int dU = \mu B \int \sin \theta d\theta$$

tomando $U_0 = 0$

Energía potencial (de orientación) de un dipolo magnético

El campo magnético hace rotar al dipolo.
Cuanto trabajo realiza para cambiar su orientación?



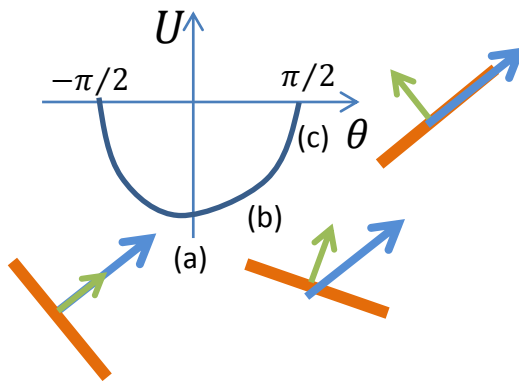
$$dW = -\tau d\theta$$

- proporcional al ángulo rotado
- el signo se debe a que el trabajo tiende a achicar el ángulo θ

$$dW = -\tau d\theta = -\mu B \sin \theta d\theta$$

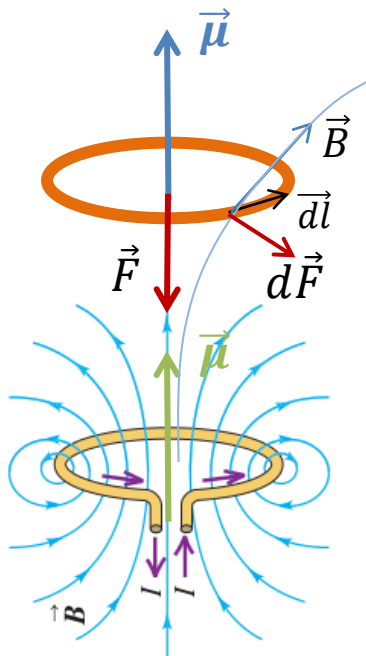
Este trabajo tiende a minimizar la **energía potencial de orientación** del sistema espira-campo

Haciendo este trabajo igual a la disminución de la **energía de orientación** tomando $U_0 = 0$



$$U = -\mu B \cos \theta + U_0 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

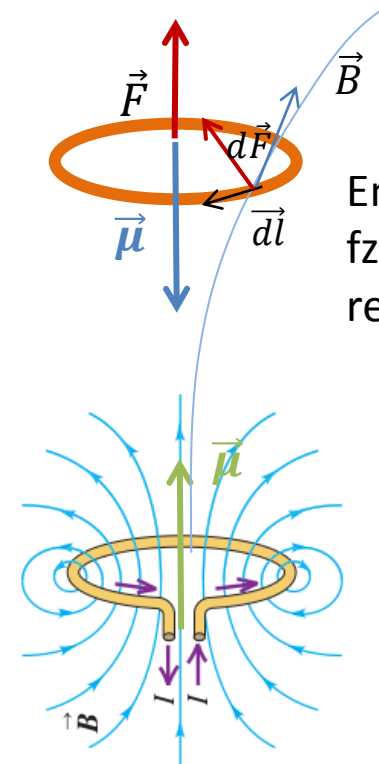
Fuerza entre dos dipolos



$$d\vec{F}_B = I d\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

Tiene una componente radial y otra hacia abajo

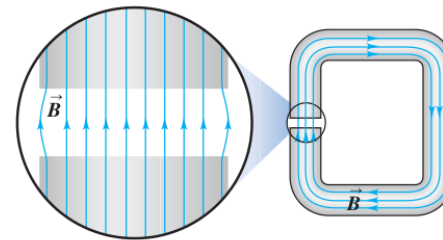
La fuerza neta total resulta atractiva



En este caso la fza neta resulta repulsiva

Ley de Gauss magnética

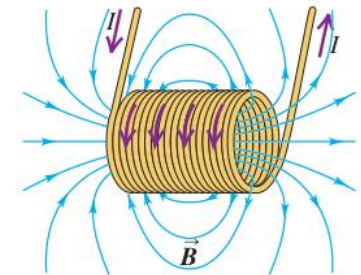
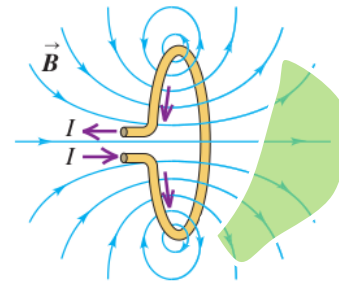
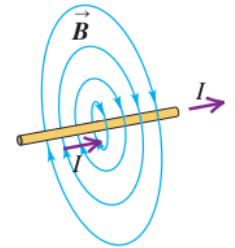
- Las líneas de campo magnético siempre son **cerradas** (no tienen principio ni fin como las del campo eléctrico)



- El flujo magnético total a través de cualquier superficie cerrada es siempre igual a cero

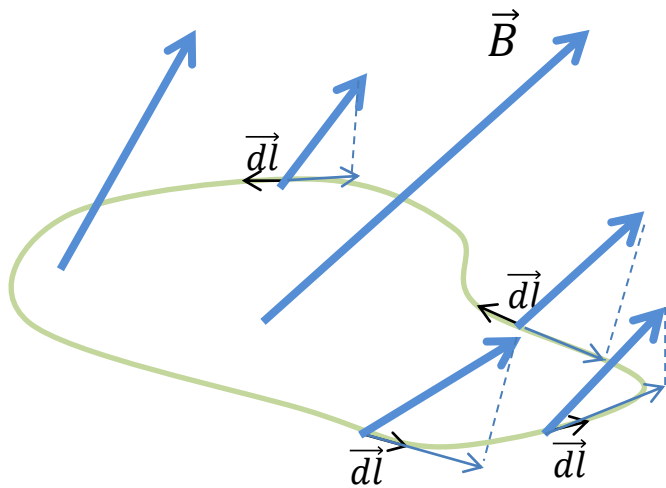
$$\oiint \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS = 0$$

$$\oiint \vec{E} \cdot \hat{n} \, dS = 4\pi k Q_{encerrada}$$



- La ley de Gauss para la magnetostática implica que **no hay monopolos magneticos**
- La '*unidad*' magnética es el dipolo magnético (i.e. espira con corriente)

Ley de Ampère



Supongamos una región del espacio donde hay un \mathbf{B}

Consideremos un camino orientado \mathbf{C}

Cuanto vale la suma de todas las proyecciones de \mathbf{B} sobre nuestra curva?

Circulación de \mathbf{B} sobre el circuito orientado \mathbf{C} $= \oint_{\mathbf{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$

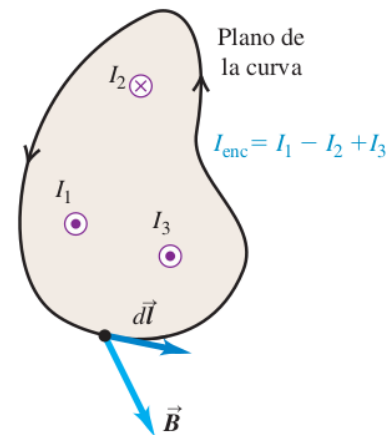
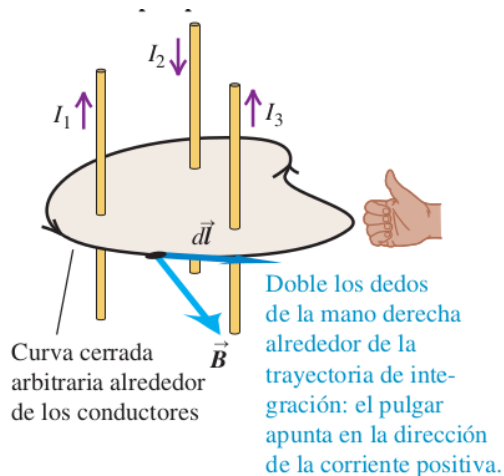
Ley de Ampère

$$\oint_{\mathbf{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}$$

Intensidad de corriente *concatenada* por la espira (en nuestro ejemplo es nula)

Ley de Ampère: ejemplo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}$$

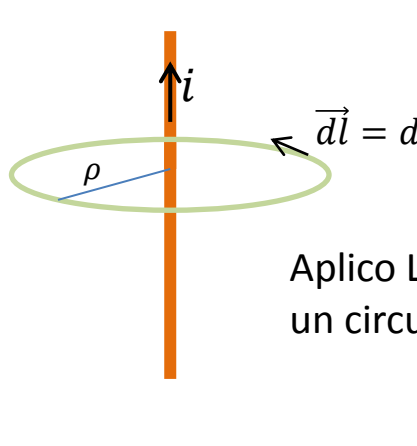


Campo de un hilo

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}$$

- La ley de Ampère impone una ecuación, no para el campo directamente sino para una integral de \vec{B} (similar a ley de Gauss para \vec{E}), la que define su circulación.
- Sin embargo, en situaciones de alta simetría, podemos usarlo para estimar \vec{B}

Campo generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente I



Creame por un momento que **por simetría** $\longrightarrow \vec{B} = B(\rho)\hat{\phi}$

Aplico Ley de Ampère sobre un circuito circular de radio ρ

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{concatenada}}$$

$$\oint_C B(\rho)\hat{\phi} \cdot \hat{\phi} dl = \mu_0 i$$

$$B(\rho) \int_C dl = \mu_0 i$$

$2\pi\rho$

$$B(\rho) = \mu_0 \frac{i}{2\pi\rho}$$

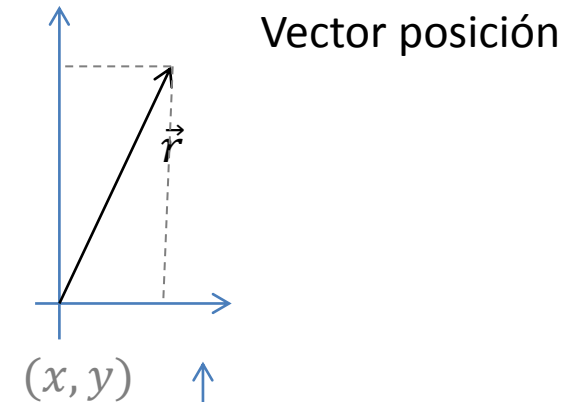
B y simetrías

O por qué asumimos que $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{\phi}$
en el problema del hilo infinito

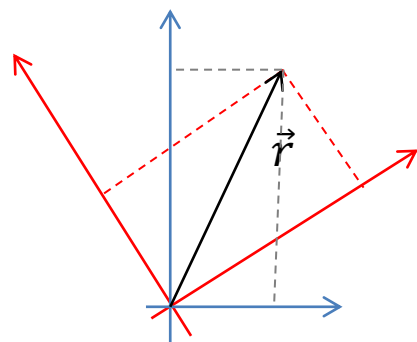
Que era un vector?

Vector:

- Entidad que posee
 - Magnitud
 - Dirección
 - Sentido
- En d-dim: d escalares que se transforman ante rotaciones, traslaciones, reflexiones, etc, de manera muy específica



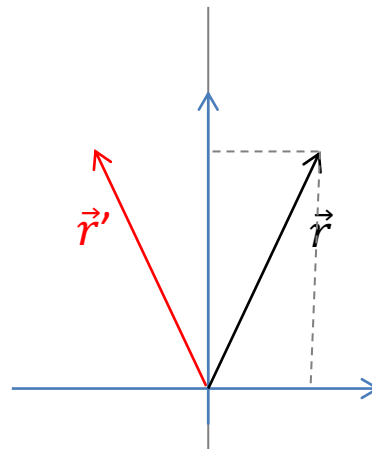
Ejemplos



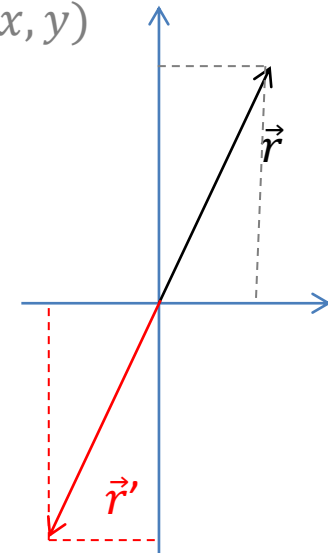
rotación
 $(x, y) \longrightarrow (x', y')$

$$x' = \cos \theta x - \sin \theta y$$

$$y' = \sin \theta x + \cos \theta y$$



reflexión
 $(x, y) \longrightarrow (x' = -x, y' = y)$



inversión
 $(x, y) \longrightarrow (x' = -x, y' = -y)$

(edad papa, edad mama) es un vector?

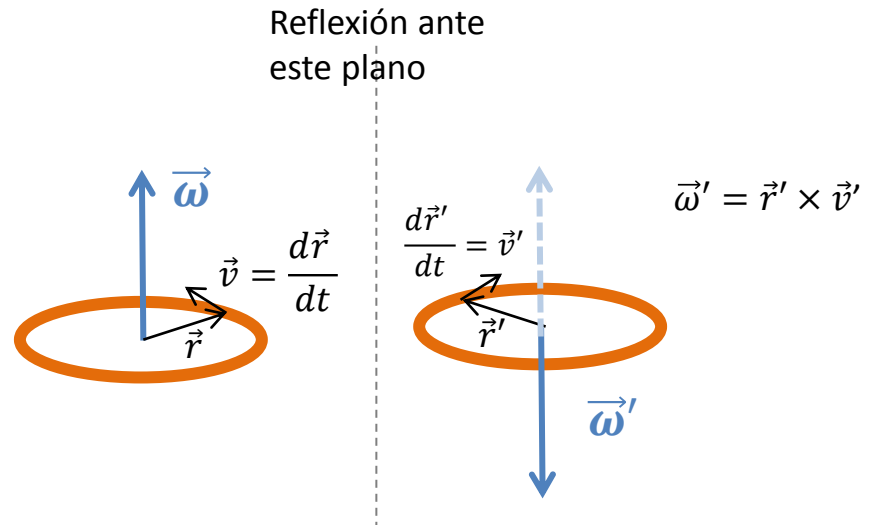
Qué es un pseudo-vector?

Pseudo-Vector:

- Entidad que posee Magnitud
Dirección
Sentido
- En d-dim: d escalares que se transforman **como vectores ante algunas transformaciones** (rotaciones y traslaciones) pero tienen un **cambio de signo adicional ante otras** (reflexiones e inversiones)

Ante una reflexión...como transforma la velocidad angular $\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v}$?

(ya se que \vec{r} y \vec{v} son vectores)



$\vec{\omega}$ se transforma como pseudo-vector (!)

En general, si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son vectores, $\vec{P} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es pseudovector

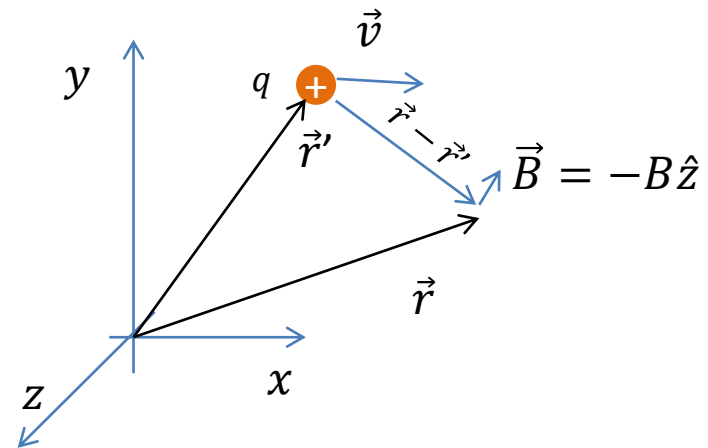
Entonces...

En general, si \vec{v}_1 y \vec{v}_2 son vectores, $\vec{P} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es pseudovector

Por qué nos debería importar esto?

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q \vec{v} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

\vec{B} es en realidad un **pseudo-vector** (!)



- se transforma **como vector ante algunas** transformaciones (rotaciones y traslaciones) pero tiene un **cambio de signo adicional ante otras** (reflexiones e inversiones)

Volvamos al problema

Qué simetría debe respetar el \vec{B} generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente I ?

Utilizamos coordenadas cilíndricas

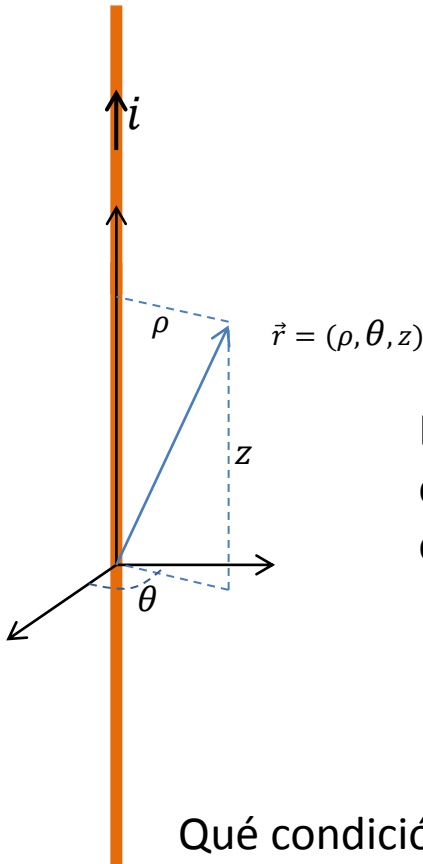
Podemos escribir en forma muy general que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + B_z(\vec{r})\hat{z}$$

El campo $\vec{B}(\vec{r})$ generado por la corriente que circula por el cable tiene que ser compatible con las simetrías que cumple dicha fuente:

- Rotación alrededor del eje del cable
- Simetrías de reflexión sobre cualquier plano que contenga al cable

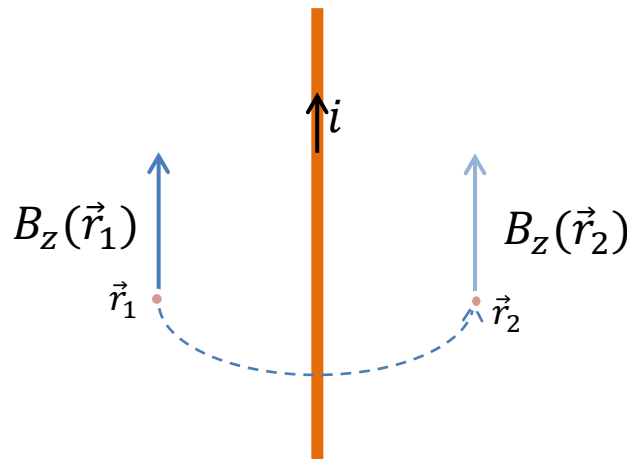
Qué condición impone esto sobre la forma funcional de $B_\rho(\vec{r})$, $B_\theta(\vec{r})$ y $B_z(\vec{r})$?



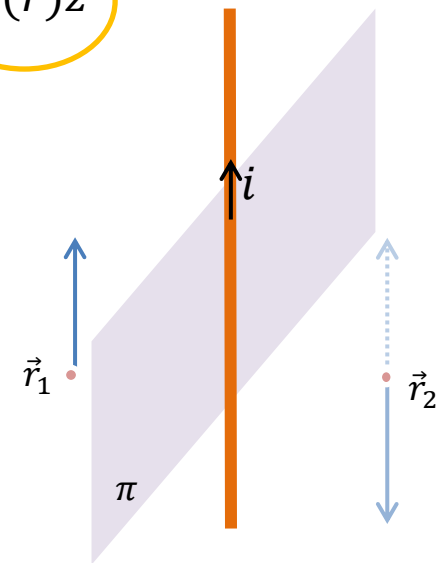
Campo en \hat{z}

Qué simetría debe respetar el \mathbf{B} generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente I ?

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + B_z(\vec{r})\hat{z}$$



pero también...



Para respetar la simetría de la fuente frente a rotaciones $B_z(\vec{r}_2)$ debe ser $B_z(\vec{r}_1)$ **rotado**

Para respetar la simetría de la fuente frente a reflexiones sobre planos que contengan al cable $B_z(\vec{r}_2)$ debe ser $B_z(\vec{r}_1)$ **reflejado** sobre el plano π

$$B_z(\vec{r}_2) = B_z(\vec{r}_1)$$

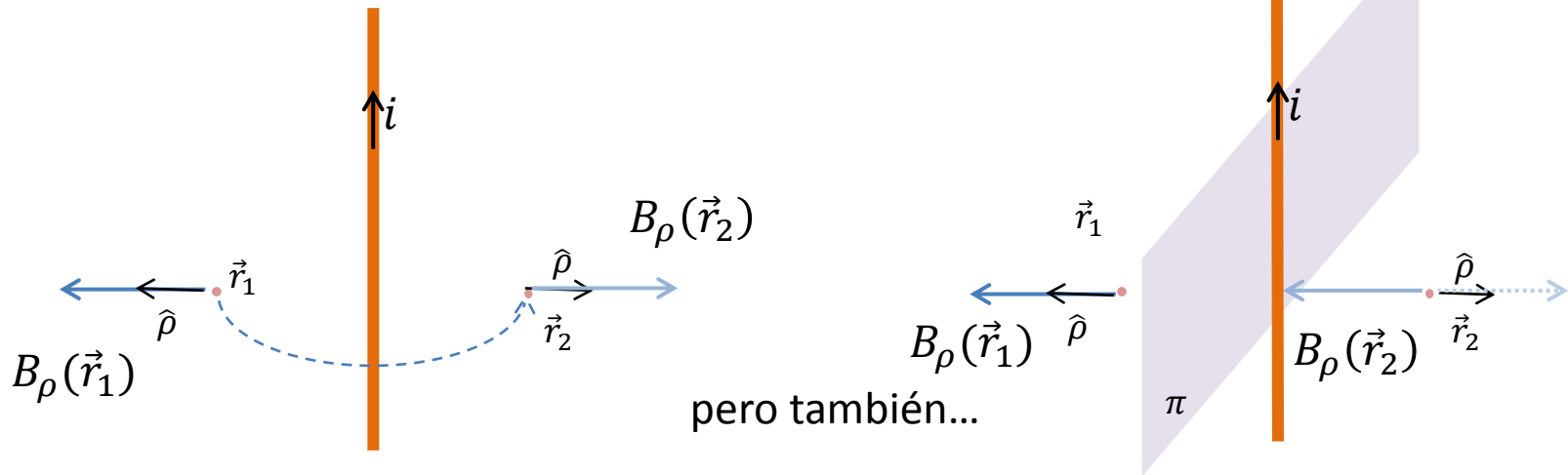
$$B_z(\vec{r}_2) = -B_z(\vec{r}_1)$$

La única solución compatible es $B_z(\vec{r}) = 0$

Campo en $\hat{\rho}$

Qué simetría debe respetar el \mathbf{B} generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente I ?

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\rho(\vec{r})\hat{\rho} + B_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + \cancel{B_z(\vec{r})\hat{z}}$$



Para respetar la simetría de la fuente frente a rotaciones $B_\rho(\vec{r}_2)$ debe ser $B_\rho(\vec{r}_1)$ **rotado**

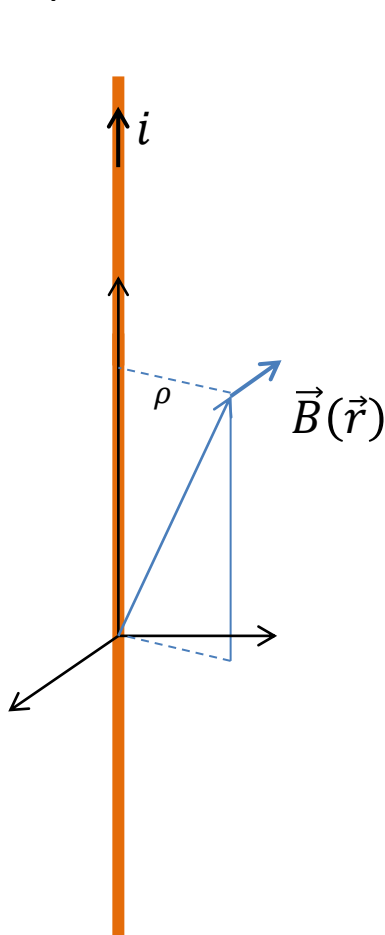
Para respetar la simetría de la fuente frente a reflexiones sobre planos que contengan al cable $B_\rho(\vec{r}_2)$ debe ser $B_\rho(\vec{r}_1)$ **reflejado** sobre el plano π

$$B_\rho(\vec{r}_2) = B_\rho(\vec{r}_1) \quad \longleftrightarrow \quad B_\rho(\vec{r}_2) = -B_\rho(\vec{r}_1)$$

La única solución compatible es $B_\rho(\vec{r}) = 0$

Campo en $\hat{\theta}$

Qué simetría debe respetar el \mathbf{B} generado por un conductor largo y recto por el que circula una corriente I ?



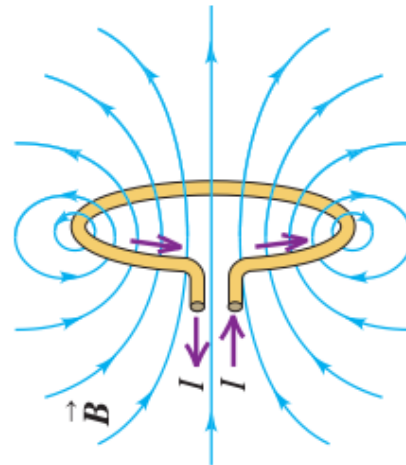
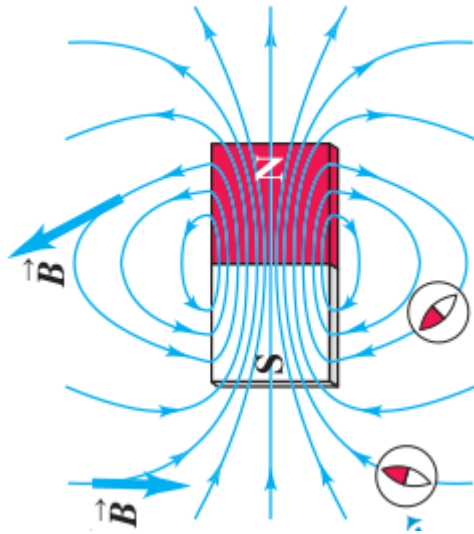
$$\vec{B}(\vec{r}) = \cancel{B_\rho(\vec{r})\hat{\rho}} + B_\theta(\vec{r})\hat{\theta} + \cancel{B_z(\vec{r})\hat{z}}$$

Les dejo a uds verificar que un campo en $\hat{\theta}$ es compatible con el requerimiento de simetrías de rotación y reflexión

La intensidad de B_θ no puede depender ni de θ (la fuente tiene simetría de rotación) ni de z (la fuente tiene simetría de traslación).

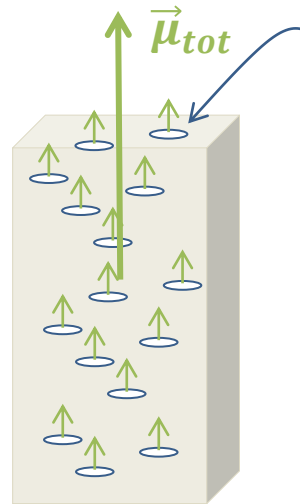
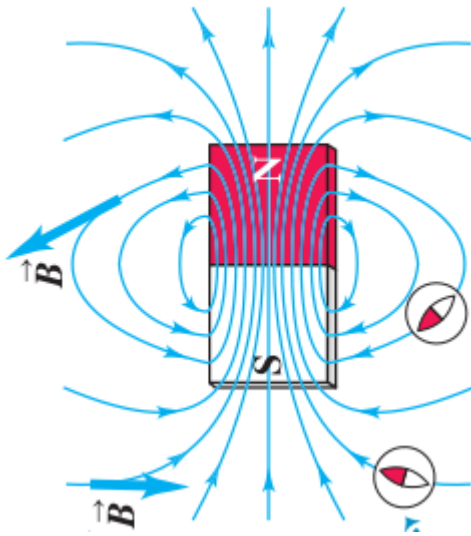
$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\theta(\rho)\hat{\theta}$$

Materiales magnéticos



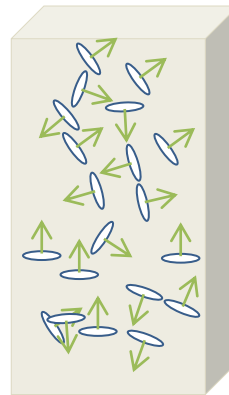
Vimos que las corrientes eran fuentes de campos magnéticos, pero...por qué un imán genera \mathbf{B} ?

Materiales magnéticos



Micro-espiras de corriente:
electrones orbitando
centros atómicos

Material magnético
(espiras alineadas
macroscopicamente)



Material no-magnético
(espiras no alineadas
macroscopicamente)

$$\vec{\mu}_{tot} = 0$$