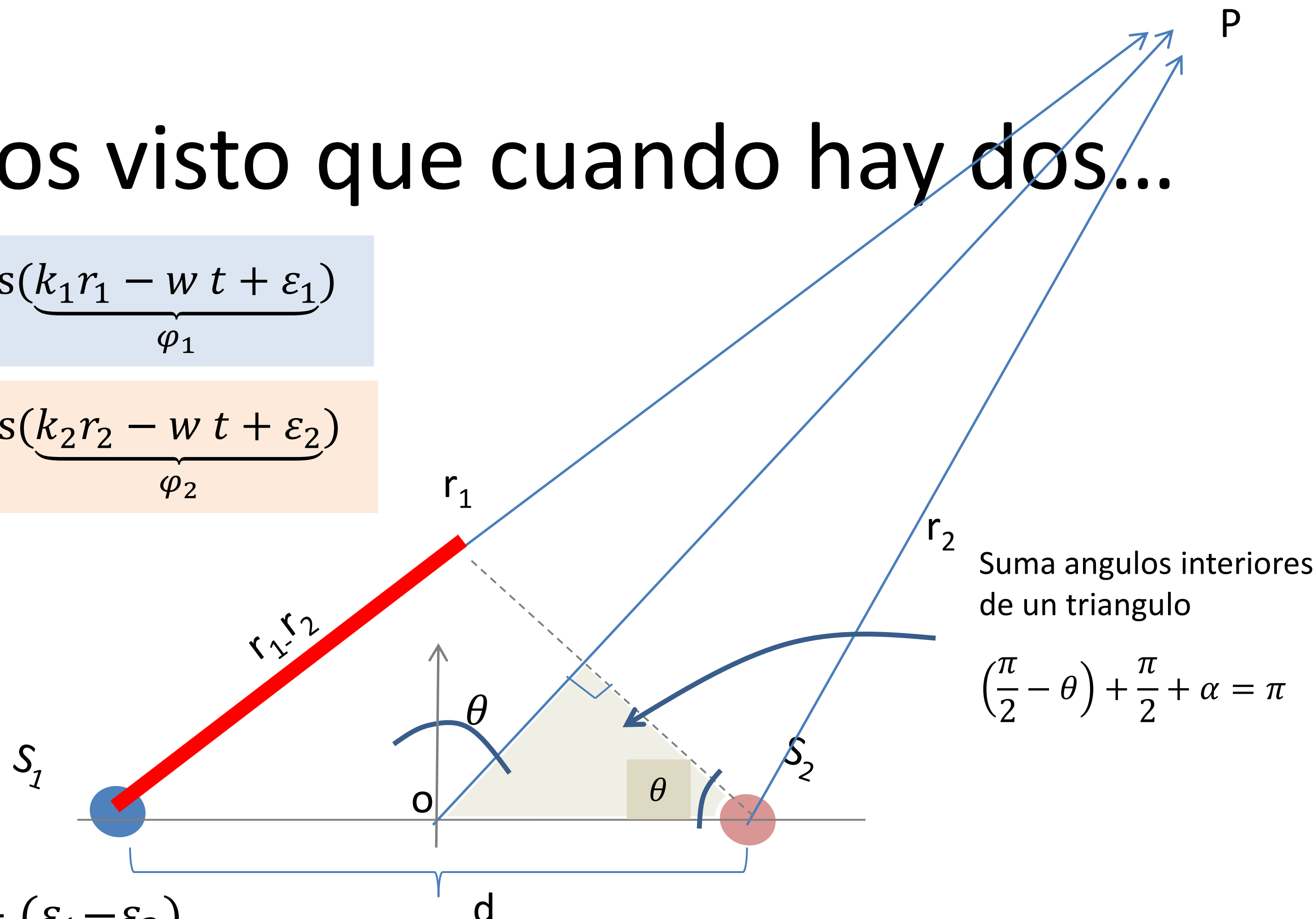
Difraccion

Habiamos visto que cuando hay dos…

$$\vec{E}_1(\vec{r},t) = \vec{E}_{01}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_1 r_1 - w\,t + \varepsilon_1}_{\varphi_1})$$

$$\vec{E}_2(\vec{r},t) = \vec{E}_{02}(\vec{r})\cos(\underbrace{k_2 r_2 - w\,t + \varepsilon_2}_{\varphi_2})$$



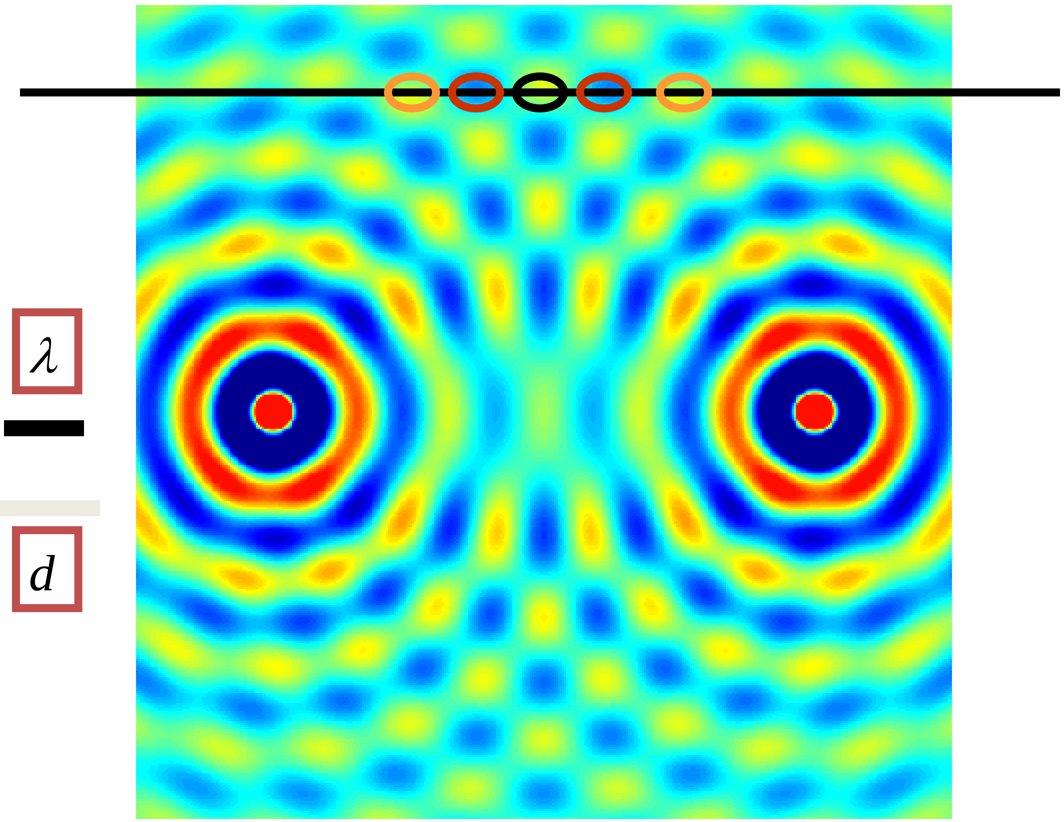
$$\Delta\varphi = k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

$$\Delta\varphi_{max} = 2m\pi \qquad k(r_1 - r_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = 2m\pi \qquad (r_1 - r_2) = \frac{2m\pi - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{k}$$

$$(r_1 - r_2) = m\lambda - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi}\lambda \xrightarrow{\text{OP>>1}} d\ \sin\theta_{max} = m\lambda - \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi}\lambda$$

Aguita de colores

$$d \ \sin \theta_{max} = m\lambda$$



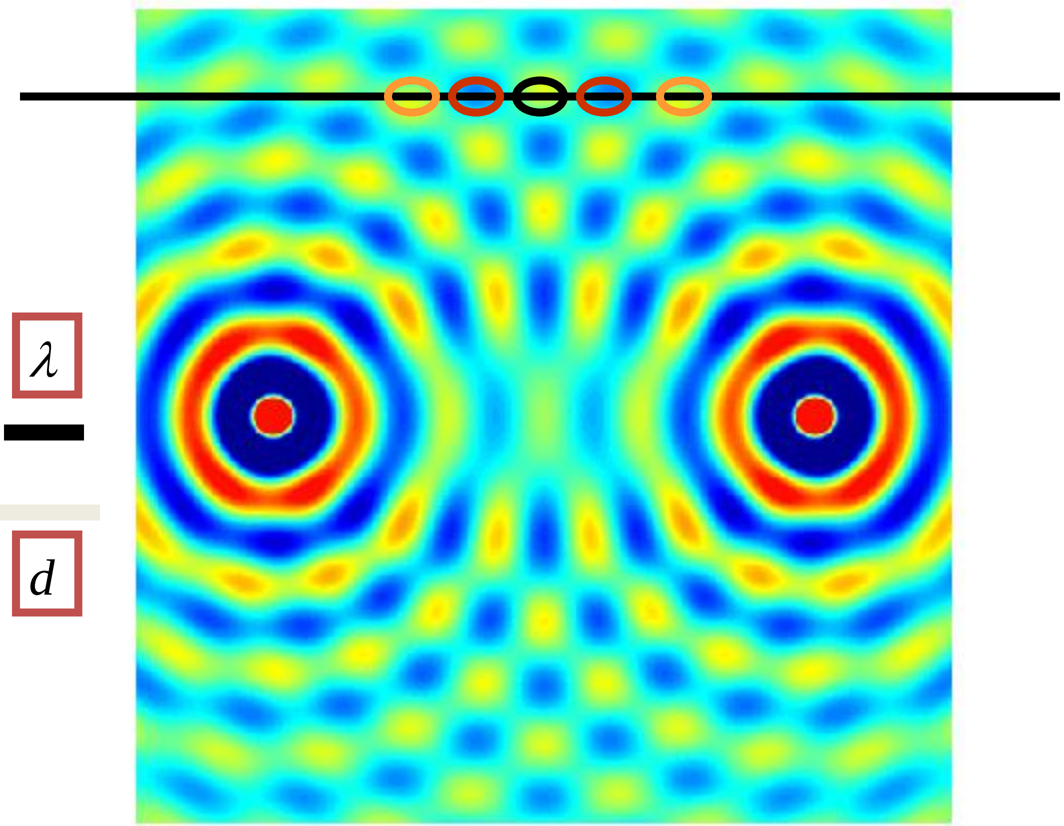
Fuentes en fase: las direcciones donde encontrar maximos son

$$\sin \theta_{max} = m\frac{\lambda}{d}$$

Por que si $\frac{\lambda}{d}$ es chico voy a ver muchos ordenes de maximos sobre la pantalla?

Adaptado de M.Sigman

Aguita de colores



$$\frac{\boxed{\lambda}}{\boxed{d}}$$

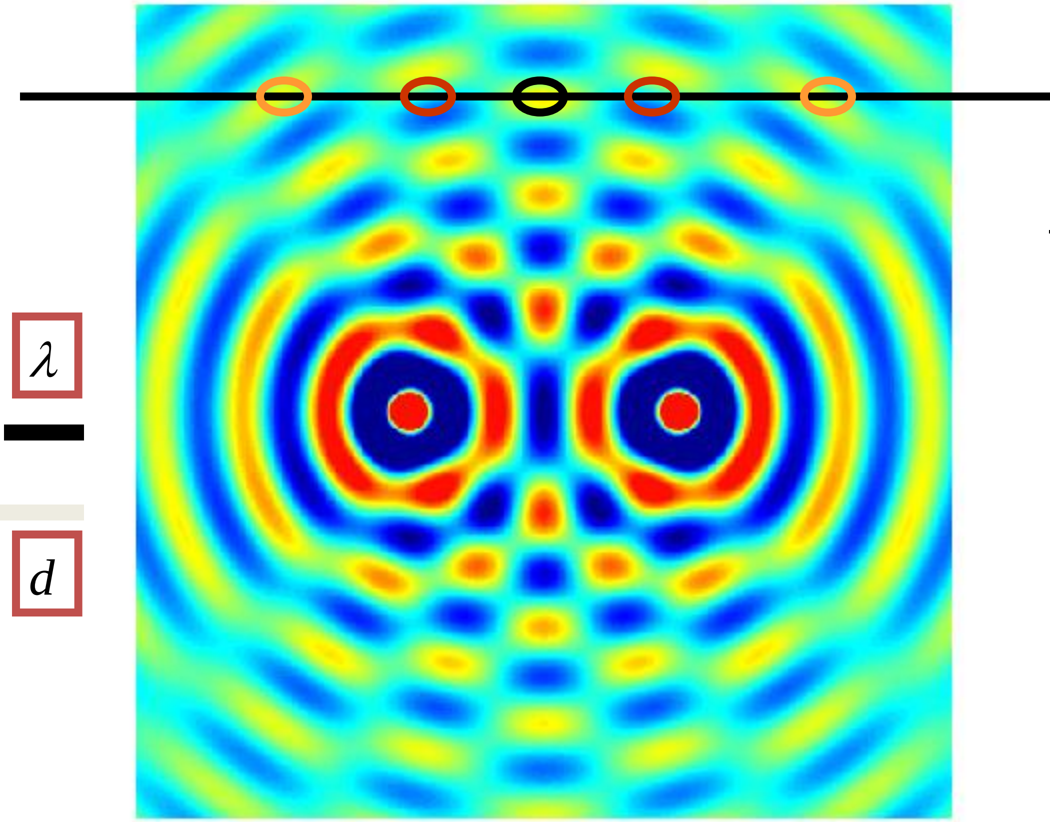
Fuentes en fase: las direcciones donde encontrar maximos son

$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\lambda}{d}}$$

Adaptado de M.Sigman

Aguita de colores

$$\frac{\boxed{\lambda}}{\boxed{d}}$$



$\frac{\lambda}{d}$ es ahora un poco mas grande. Las fuentes estan mas cerca y los angulos donde veo diferencias de caminos como las de antes son mas grandes.

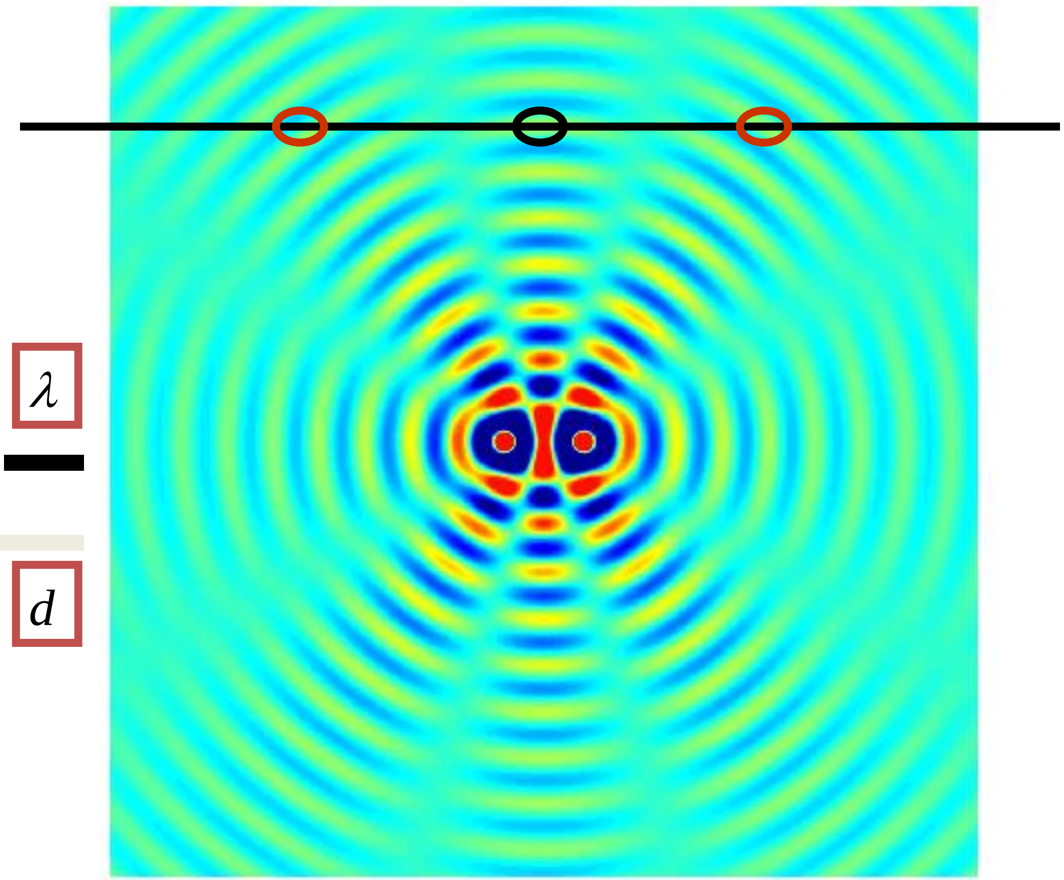
$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\lambda}{d}}$$

Adaptado de M.Sigman

Aguita de colores

$\boxed{\lambda}$

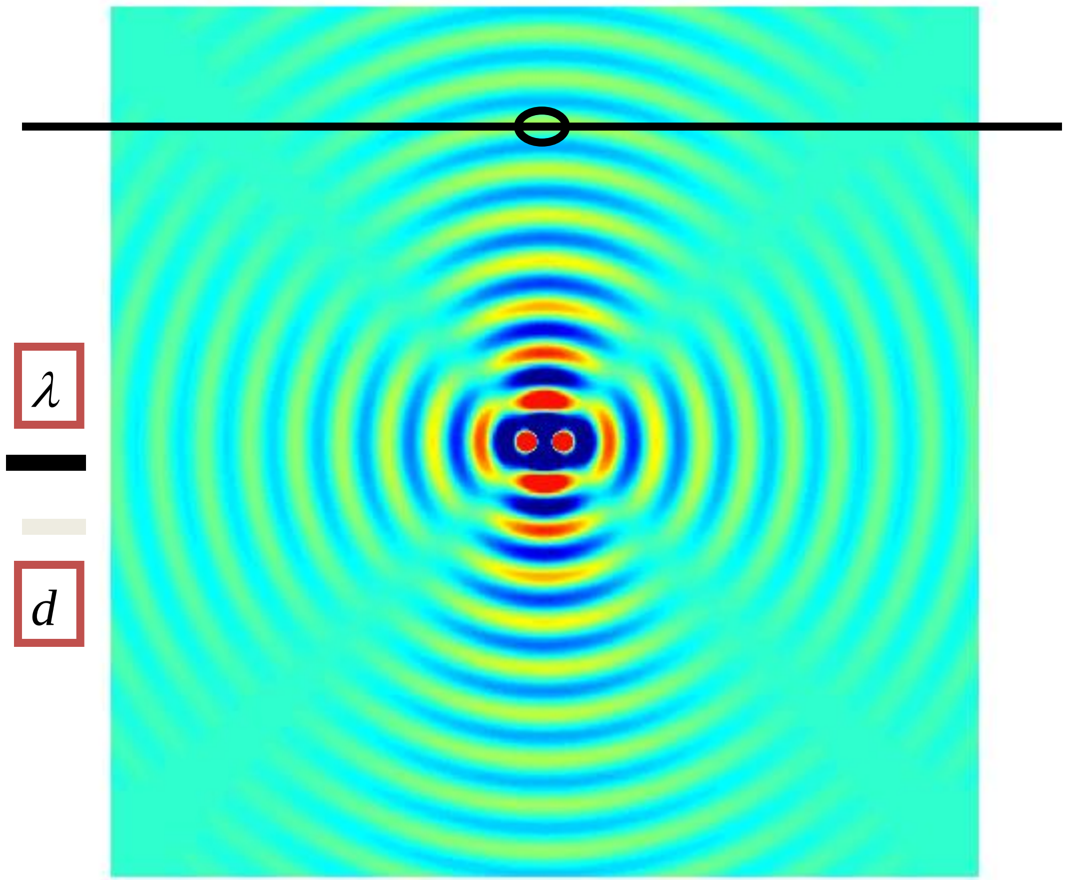
$\boxed{d}$



$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\lambda}{d}}$$

Adaptado de M.Sigman

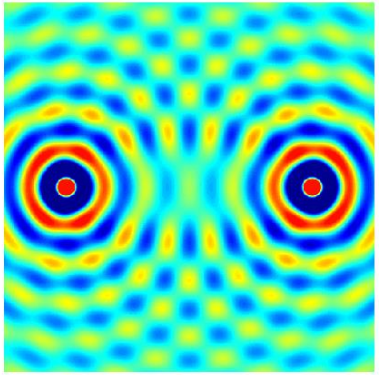
Aguita de colores

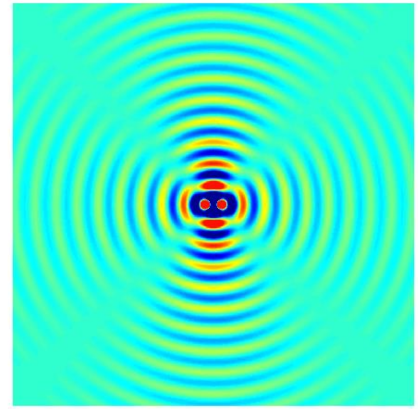


$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\lambda}{d}}$$

Cuando d es menor que la longitud de onda, para ningun angulo llegan a separarse en un ciclo completo con lo que el unico maximo esta en el centro.

Adaptado de M.Sigman





$$\frac{\boxed{\lambda}}{\boxed{d}} \qquad \frac{\boxed{\lambda}}{\boxed{d}}$$

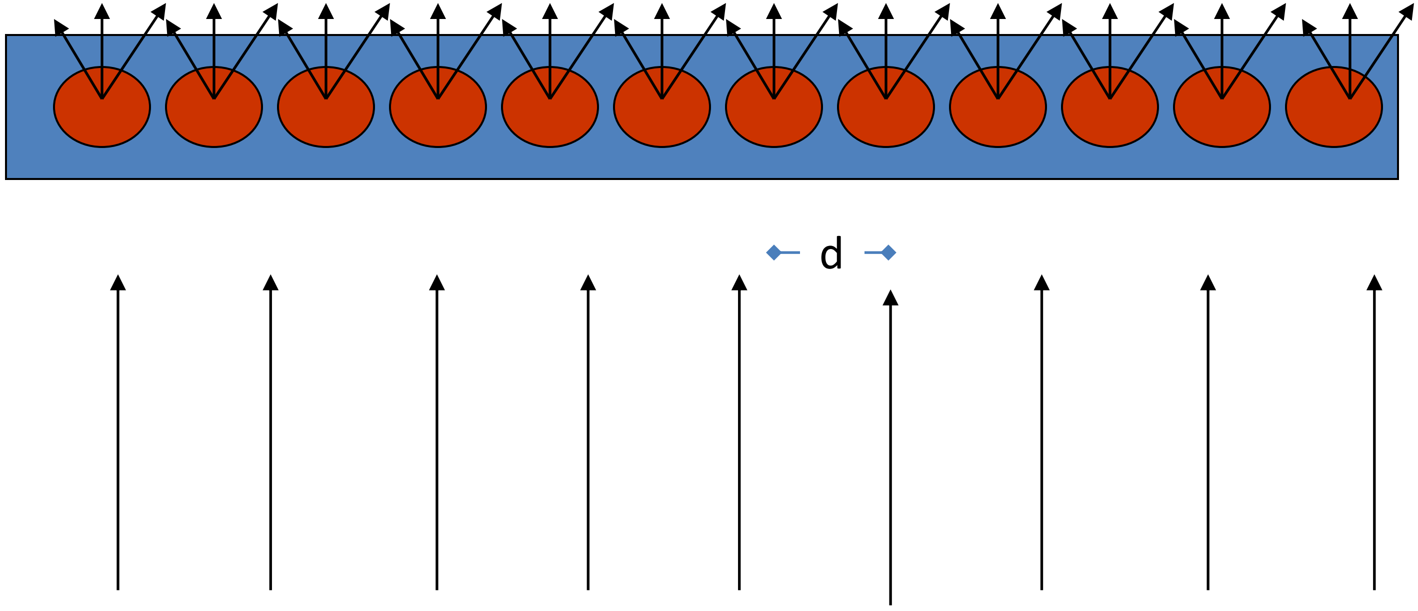
$$\boxed{sen(\theta) = \frac{m\lambda}{d}}$$

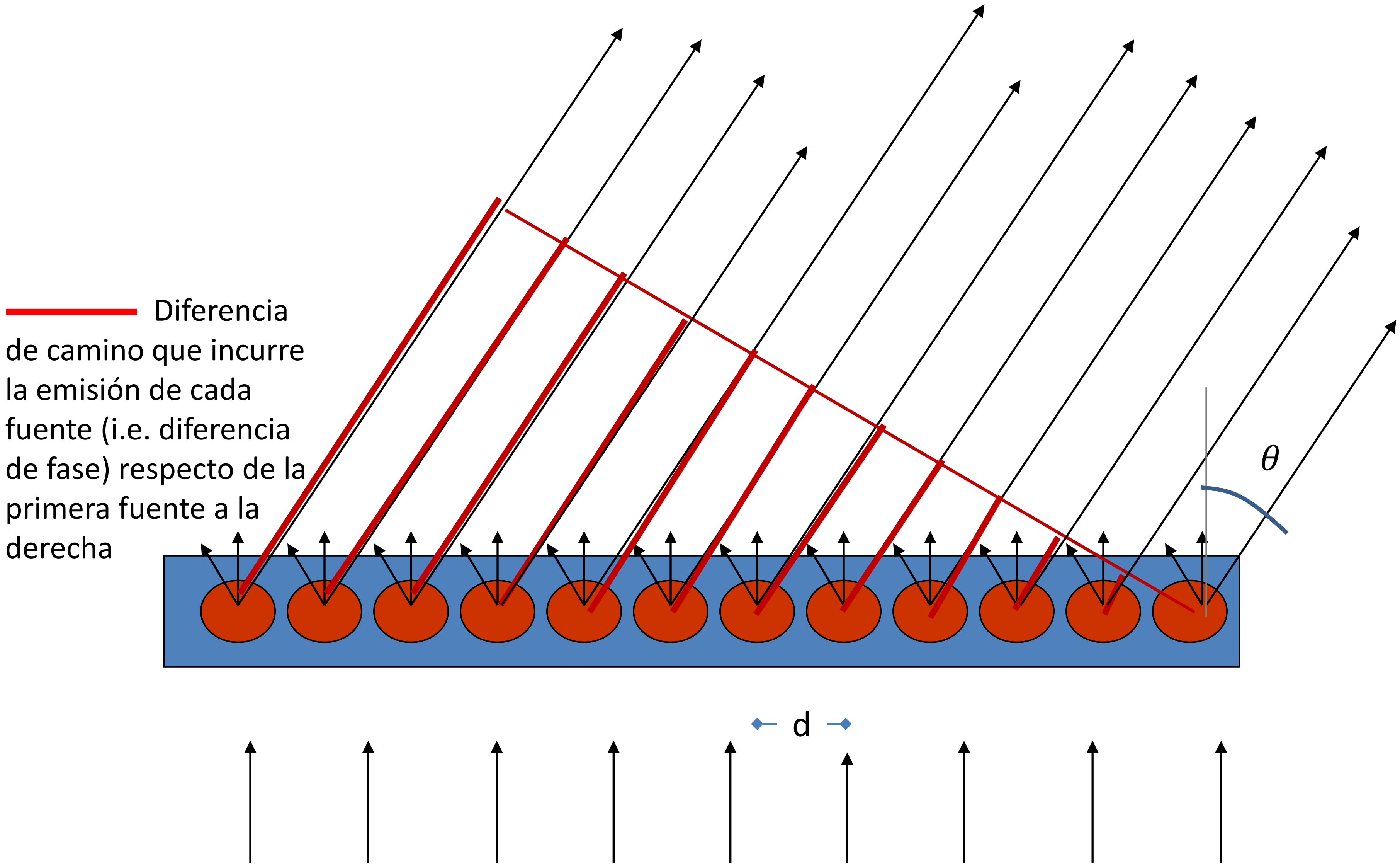
Problema **directo**: a partir de las fuentes podemos inferir el patron de interferencia

Problema **inverso**: el patron de interferencia nos habla sobre la disposicion de las fuentes

- Supongamos una onda plana incidente perpendicular al arreglo de **fuentes**.

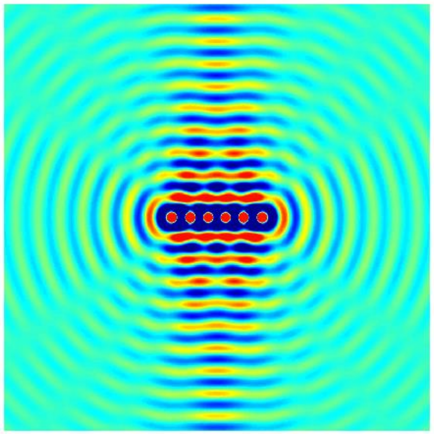
- Las fuentes pueden ser, en nuestro ejemplo:
    - Agujeritos equiespaciados sobre una pantalla opaca
    - Reemisores atómicos equiespaciados linealmente

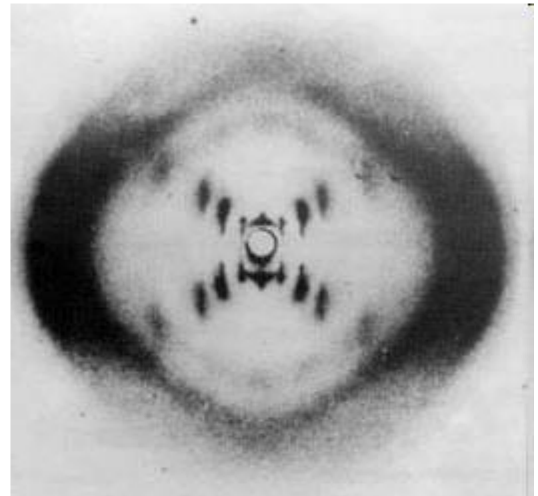




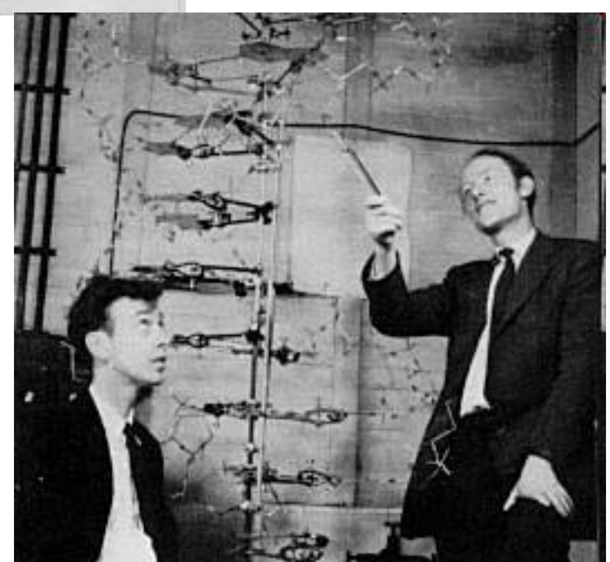
Nos va a interesar analizar el patron generado **muy lejos** de las fuentes…
Por ejemplo, aquel que se forma en el infinito (condición de difracción de **Franhauffer**).
En otras palabras quiero caracterizar la **emisión en una dirección dada.**

El problema inverso y el problema directo. Como siempre. Si uno sabe como emite algo en función de su forma, viendo un espectro de emisión se puede conocer la forma de algo desconocido. Muy resumidamente, ahí vamos…



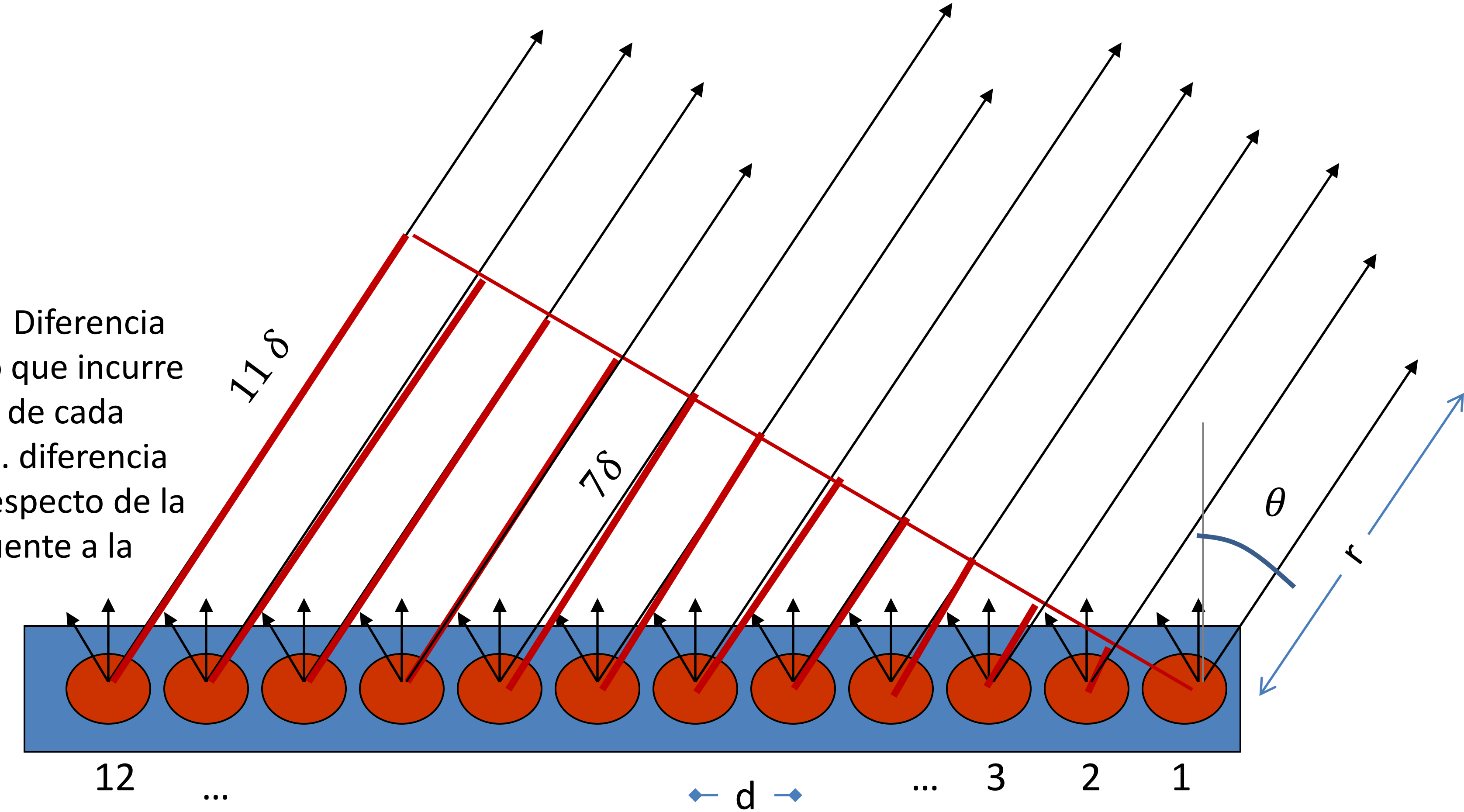


Calcular el campo de varias fuentes, equiespaciadas a quien sabe que distancia, con algún ángulo y fase relativa y bla bla bla.es un asunto olvidable, pero, visto al revés, de que se trata?



Adaptado de M.Sigman

Diferencia de camino que incurre la emisión de cada fuente (i.e. diferencia de fase) respecto de la primera fuente a la derecha



desfasaje entre una y la siguiente

Para la fuente i-esima, el desfasaje respecto a la primera resulta:

$$k(r_i - r_1) = k((i-1)*d)\sin\theta = (i-1)*\underbrace{k\ d\ \sin\theta}_{\delta} = (i-1)*\delta$$

El campo resultante en direccion θ:

$$R = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) +$$
$$A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N}-\boldsymbol{1})\boldsymbol{\delta} + wt +$$

con $\delta = k\ d\ \sin\theta$

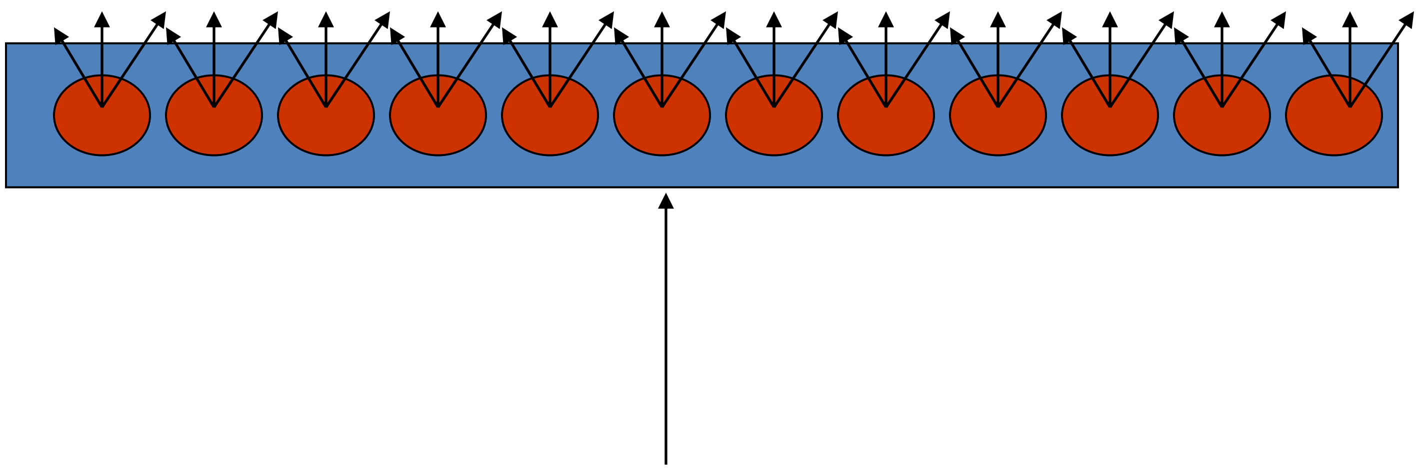
Es un problema de interferencia de muchas fuentes, para calcular la intensidad en algún punto hay que resolver como sumar este tipo de cosas…

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

Hay que calcular el campo resultante como función del desfasaje entre fuentes δ

Y luego, calcular el desfasaje en función de la geometría del problema

$$\delta(\theta) = k\ d\ \sin\theta$$



Es un problema de interferencia de muchas fuentes, para calcular la intensidad en algún punto hay que resolver como sumar este tipo de cosas…

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

Como sumar esto?

1) Abrir todos los cosenos, anular mil términos y enfermarse.
2) Pasarlo a números complejos, donde los cosenos se vuelven exponenciales y la suma se resuelve muy fácil … si uno sabe complejos.
3) **Geométricamente.**

Veamos como sumar las dos primeras

$$R_2(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$
$$= A\ \cos(\alpha_{\boldsymbol{1}}) + A\ \cos(\alpha_{\boldsymbol{2}})$$

Analiticamente…(slide siguiente)

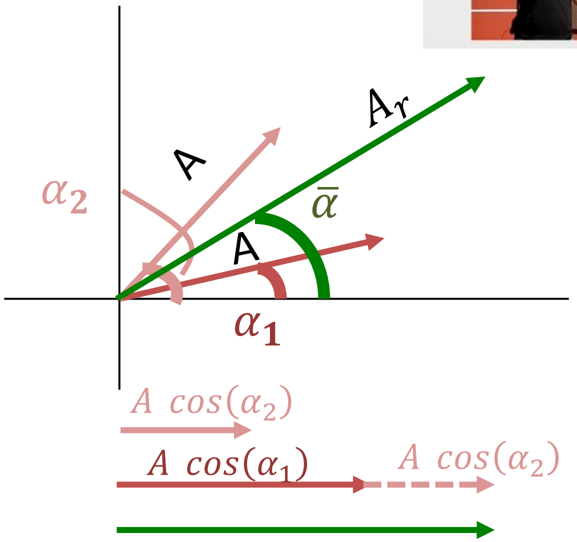
$$R_2(\delta) = \underbrace{2A\,cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}_{A_r}\ \cos(\bar{\alpha})$$

con $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}$

$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

Amplitud A_r de la suma de fasores

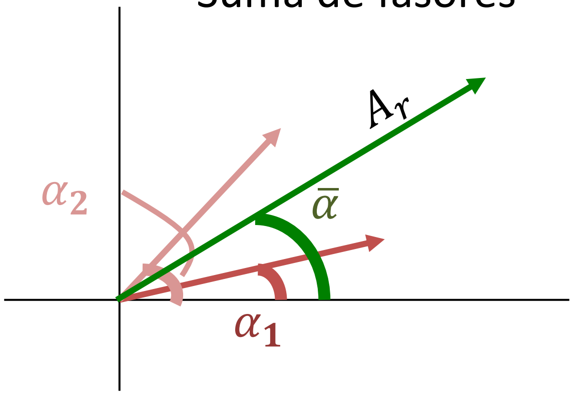
Suma de fasores



La matematica del slide anterior*

$$R = A\ cos(\alpha_1) + A\ cos(\alpha_2)$$

Suma de fasores



definimos

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}$$

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$$

$\longrightarrow$

$$\alpha_1 = \bar{\alpha} - \frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$\alpha_2 = \bar{\alpha} + \frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$R = A\ cos\left(\bar{\alpha} - \frac{\Delta\alpha}{2}\right) + A\ cos\left(\bar{\alpha} + \frac{\Delta\alpha}{2}\right)$$

$$= A\ cos\,\bar{\alpha}\cos\frac{\Delta\alpha}{2} + A\sin\bar{\alpha}\sin\frac{\Delta\alpha}{2} + A\ cos\,\bar{\alpha}\cos\frac{\Delta\alpha}{2} - A\sin\bar{\alpha}\sin\frac{\Delta\alpha}{2}$$

$$\boxed{R = 2A\ \cos\frac{\Delta\alpha}{2}\,cos\,\bar{\alpha}}$$

Entonces ya sabemos sumar contribuciones desfasadas geometricamente

$$R_2(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$
$$= A\ \cos(\alpha_1) + A\ \cos(\alpha_2)$$

$$R_2(\delta) = 2A\,cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)\ \cos(\bar{\alpha})$$

con $\bar{\alpha} = \frac{\alpha_2+\alpha_1}{2}$

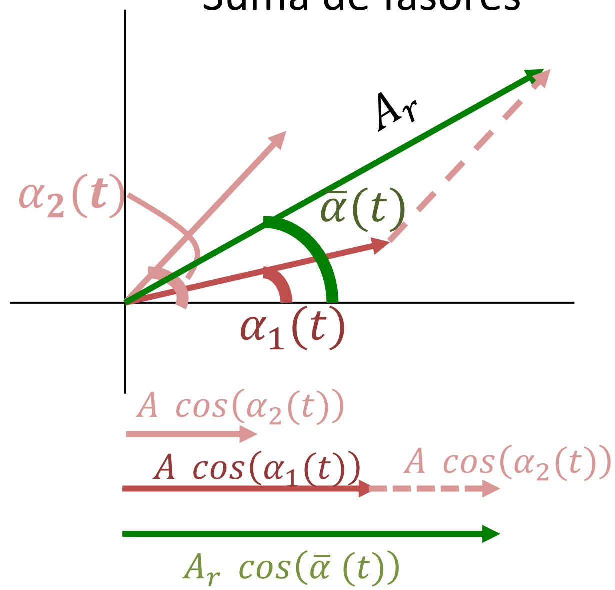
$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

$$2A\,cos\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

Esta parte depende del tiempo…

$$\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon + \delta/2)$$

Suma de fasores

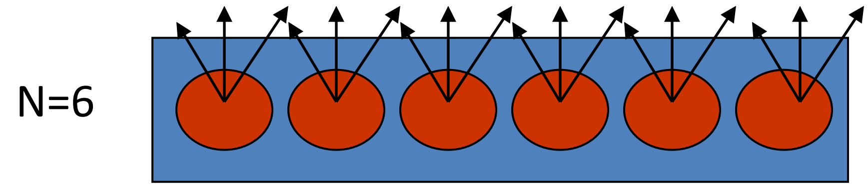


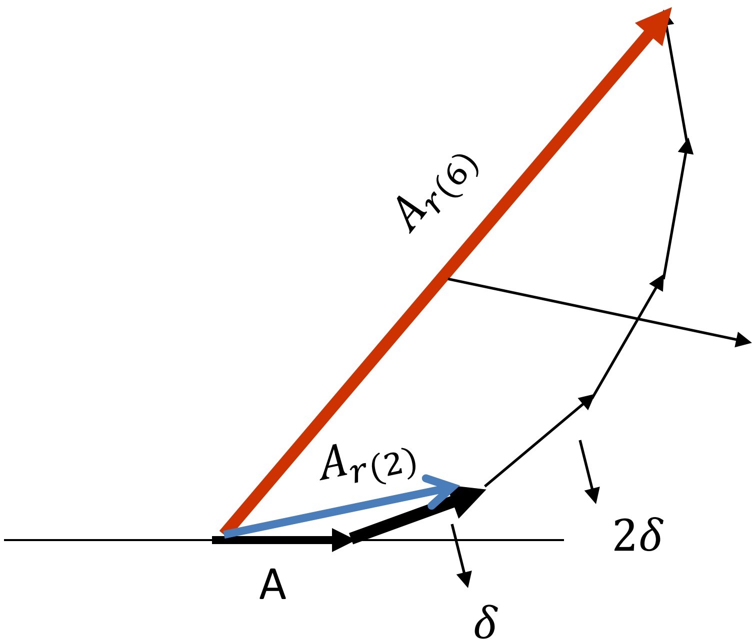
$$A_r = 2A\,cos\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = 2A\cos\frac{\delta}{2}$$

La amplitud resultante depende de la diferencia de fases

Para seguir sumando fuentes seguimos geometricamente…..

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



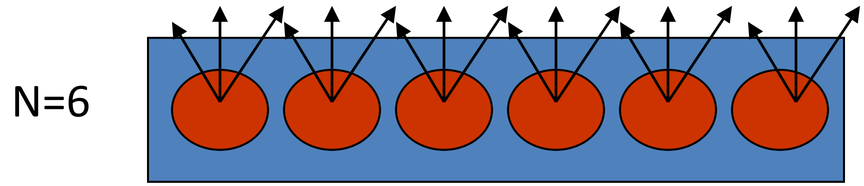


El vector resultante de sumar la suma de arriba, con seis términos. Esta resultante es una función geométrica no trivial de:

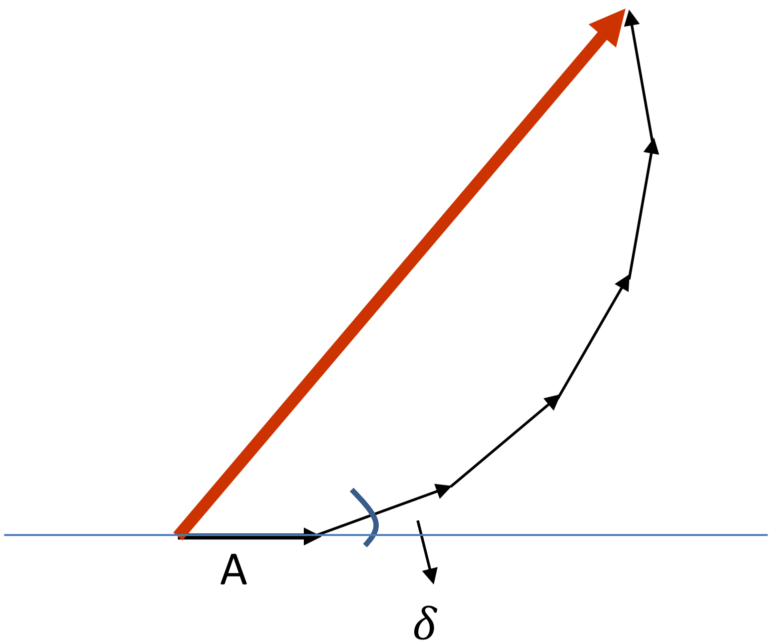
- el desfasaje δ,
- el numero de términos (resulta en una suerte de espiral)
- y es, sencillamente multiplicativa por la amplitud (si todas son iguales.)

$$A_{r(6)} = \text{expresion analitica?}$$

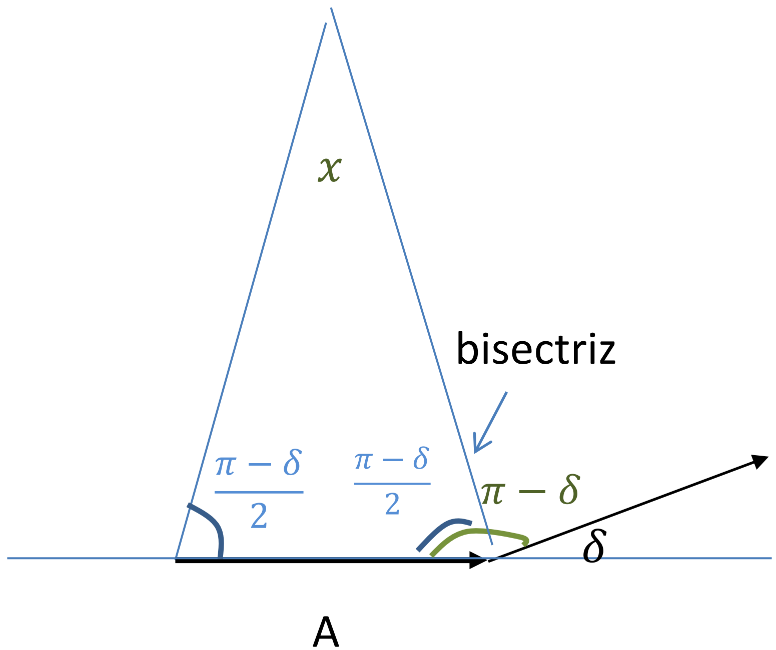
$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



Ya encontramos graficamente Ar… habra una manera de obtener una expresion analitica?



El teorema de la pizza.

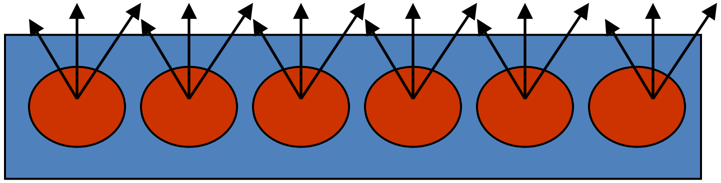


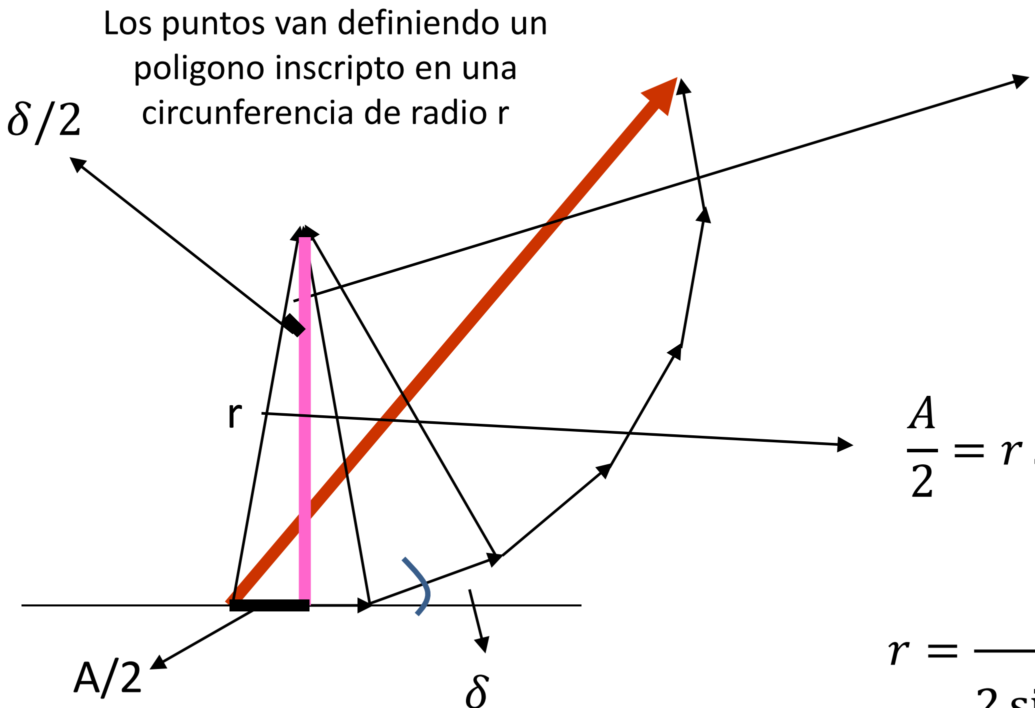
Como en todo triangulo: la suma de sus angulos debe ser π

$$\frac{\pi-\delta}{2} + \frac{\pi-\delta}{2} + x = \pi \longrightarrow \boxed{x = \delta}$$

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

N=6



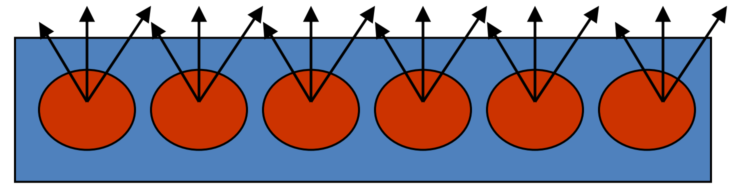


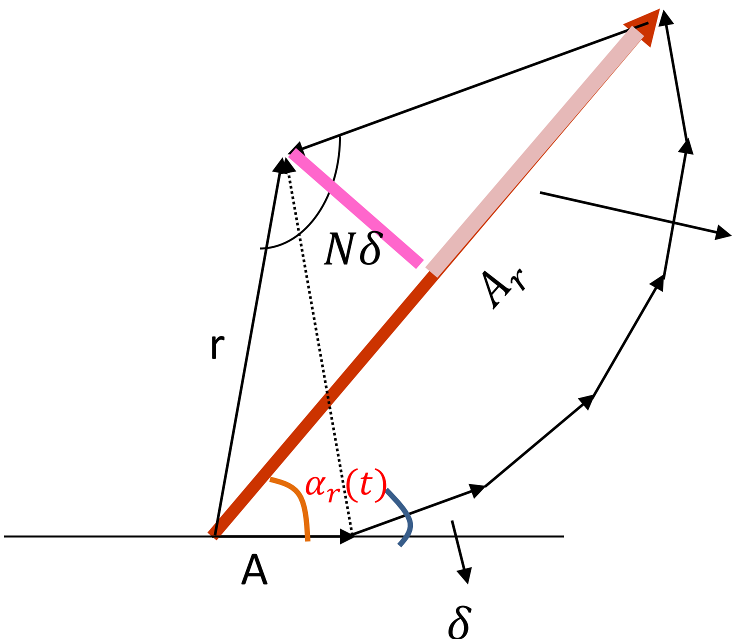
$$\frac{A}{2} = r \sin\left(\frac{\delta}{2}\right)$$

$$r = \frac{A}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

N=6





Amplitud de la onda resultante

$$\frac{A_R}{2} = r\ \sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)$$

$$r = \frac{A}{2\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$A_R(\delta) = A\frac{\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

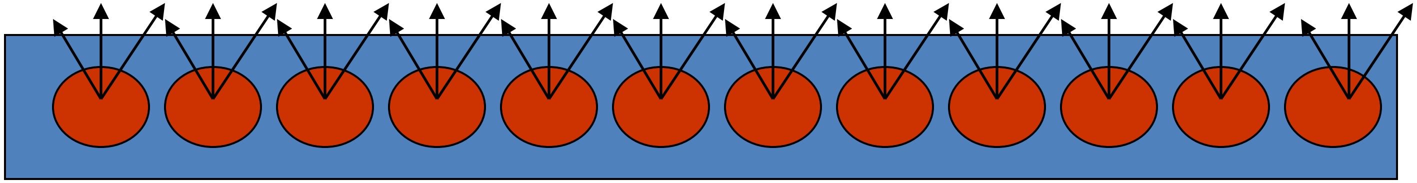
$$E_R = A_R\cos(\alpha_r(t))$$

$$I_R = {A_R}^2\langle\cos^2(\alpha_r(t))\rangle$$

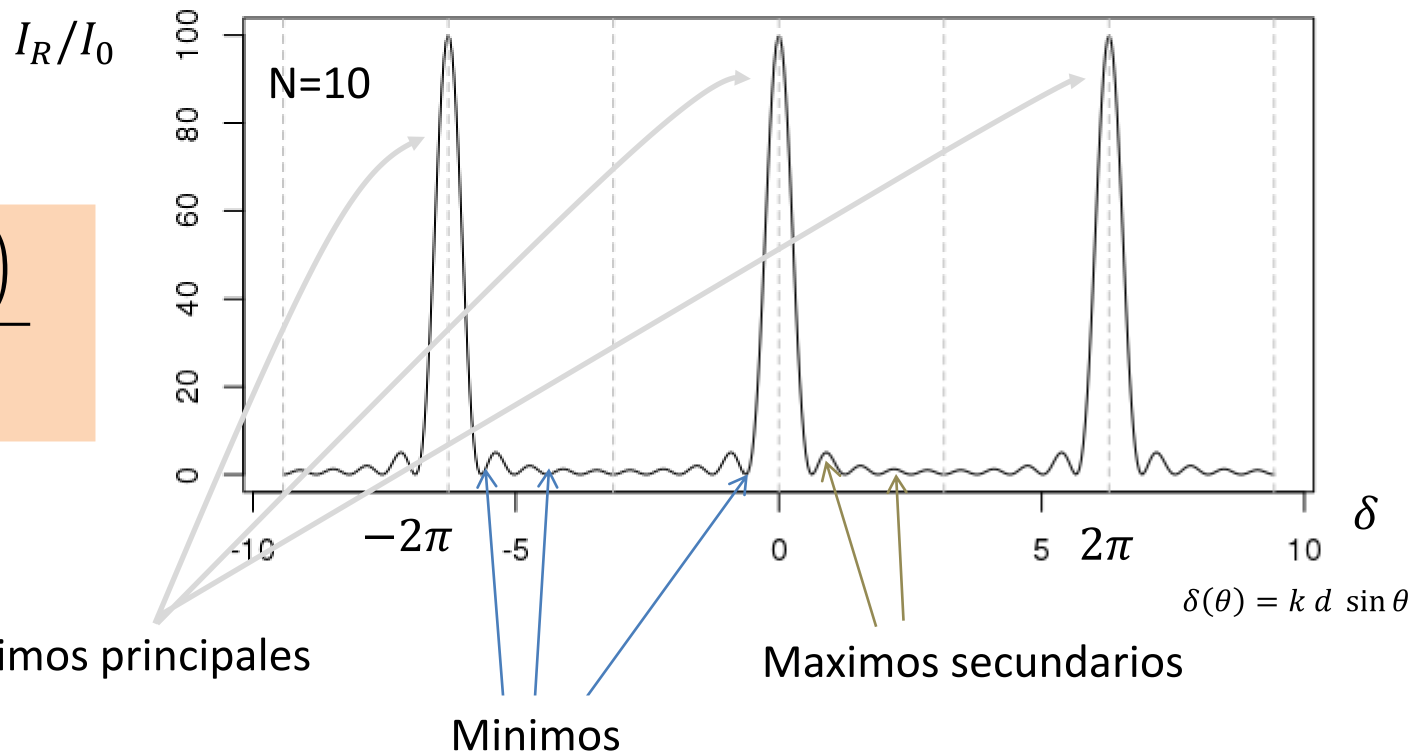
Irradiancia resultante en funcion del desfasaje entre fuentes δ

$$I_R(\delta) = I_0\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

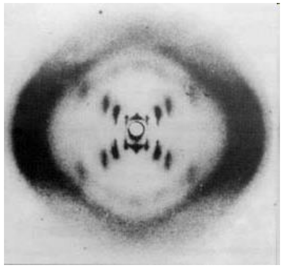
$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

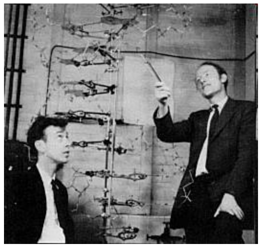


$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

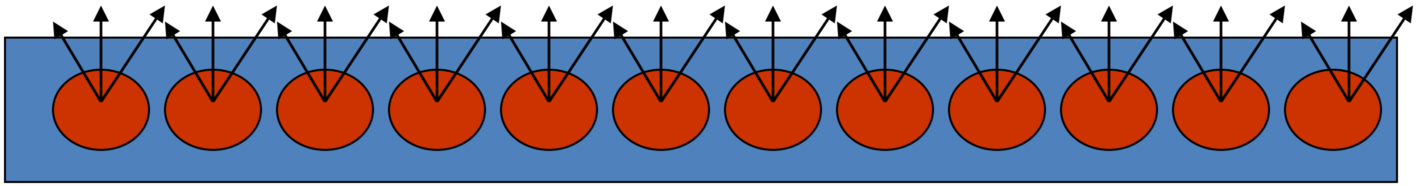


El patron de maximos y minimos tiene mucha estructura relacionada con la geometria de las fuentes. En esto se basan las aplicaciones derivadas de solucionar el **problema inverso** que mencionabamos antes

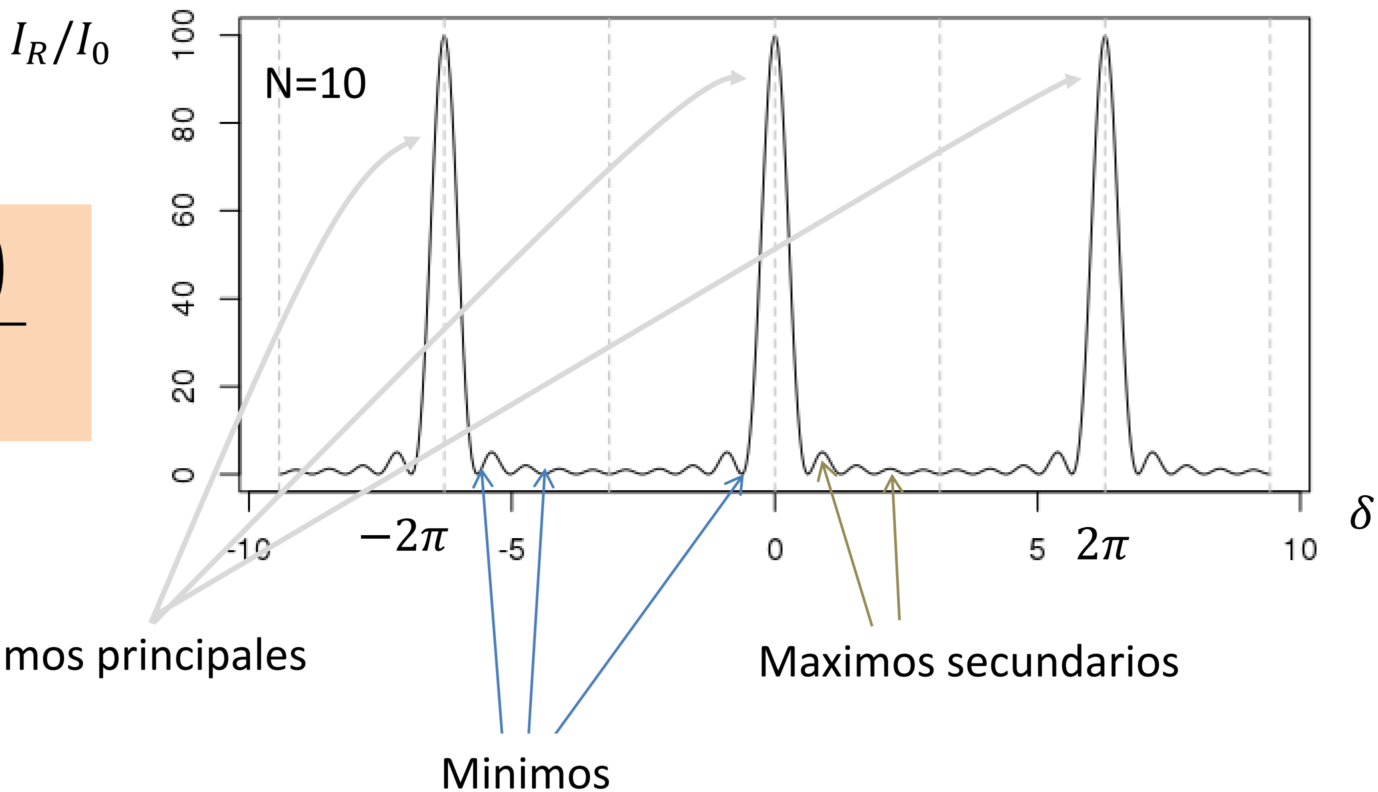




$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$

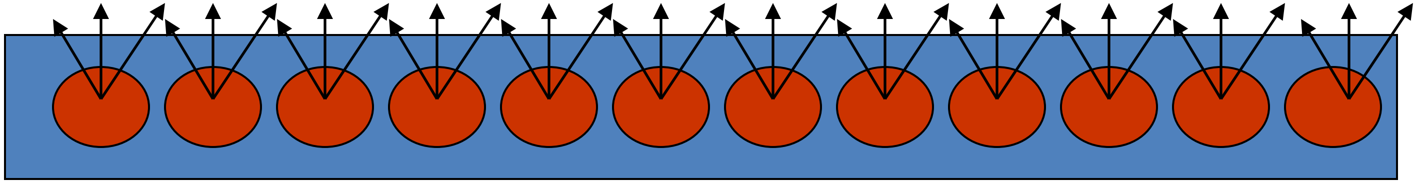


$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

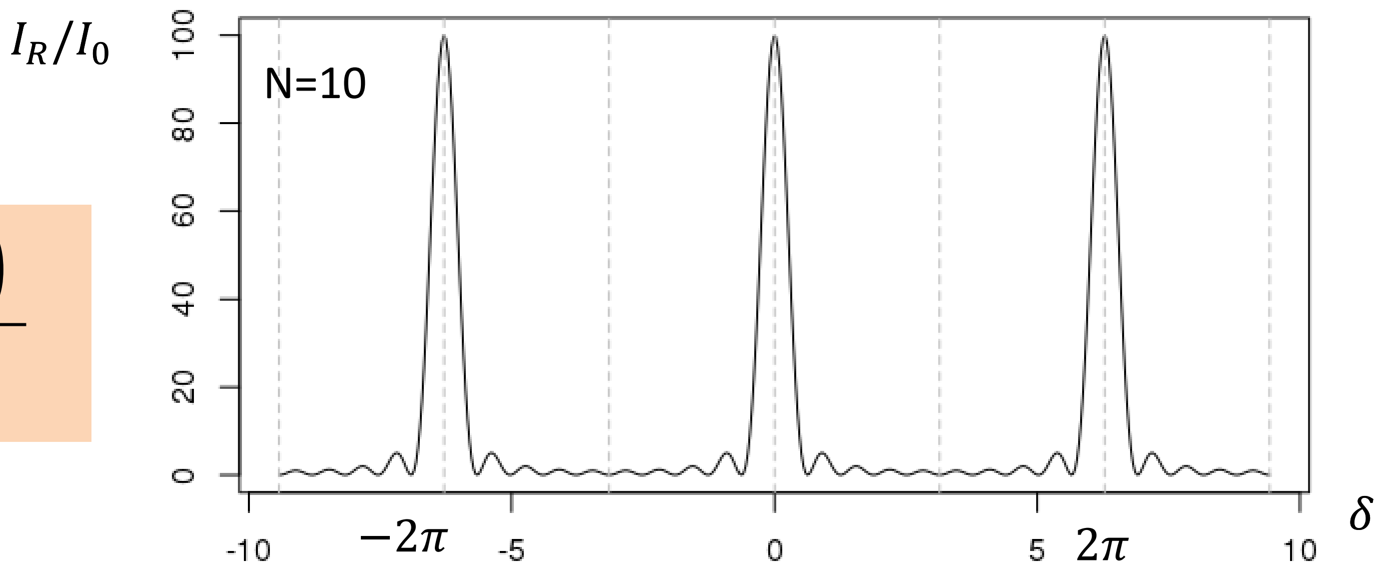


Animemonos!

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



Maximos principales se producen cuando se anula el denominador (y por tanto tambien el numerador):

$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = m\frac{2\pi}{N}$$

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} = n\pi \rightarrow \boxed{\delta = 2n\pi}$$

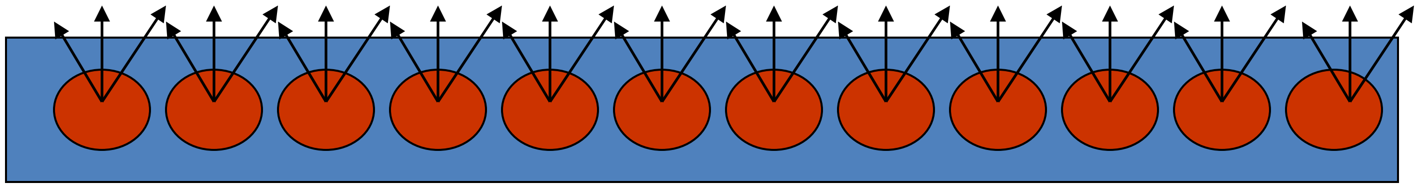
(si se cumple esto, se cumple lo de arriba: m=n*N)

Vemos cuanto valen los max: Si $\delta \rightarrow 0$

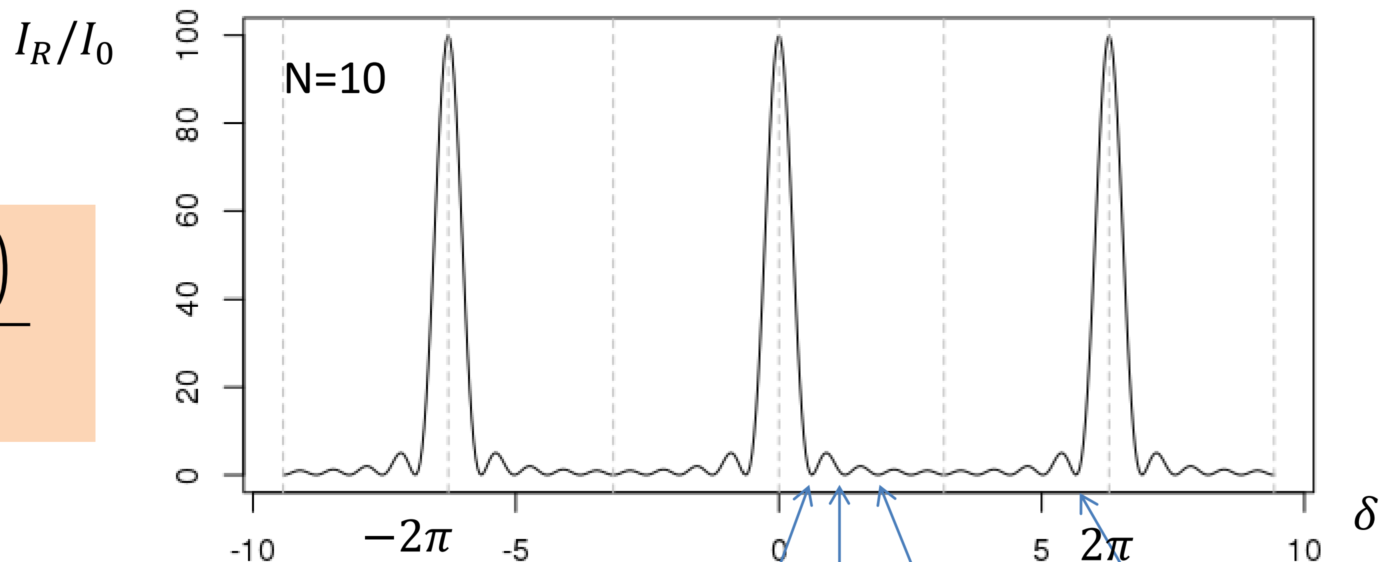
$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{N\delta}{2}\right)^2 \quad \text{y} \quad \sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\left(\frac{N\delta}{2}\right)^2}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2} \qquad I_R(\delta = 0) = I_0 N^2$$

$$R(\delta) = A\cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



Minimos se producen cuando se anula el numerador, <u>pero no</u> el denominador:

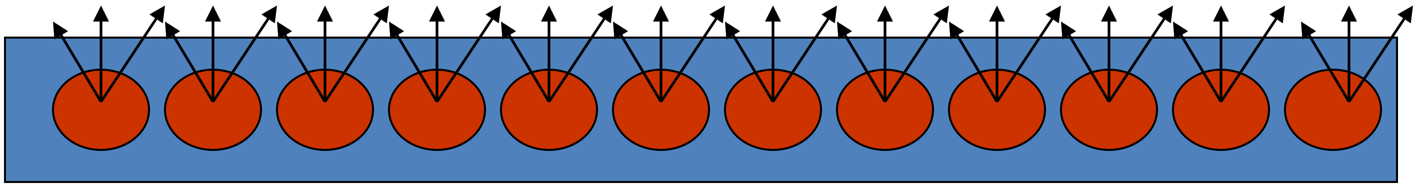
$$\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{N\delta}{2} = m\pi \rightarrow \delta = 2m\frac{\pi}{N}$$

$$\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \neq 0 \rightarrow \frac{\delta}{2} \neq n\pi \rightarrow \delta \neq 2n\pi$$

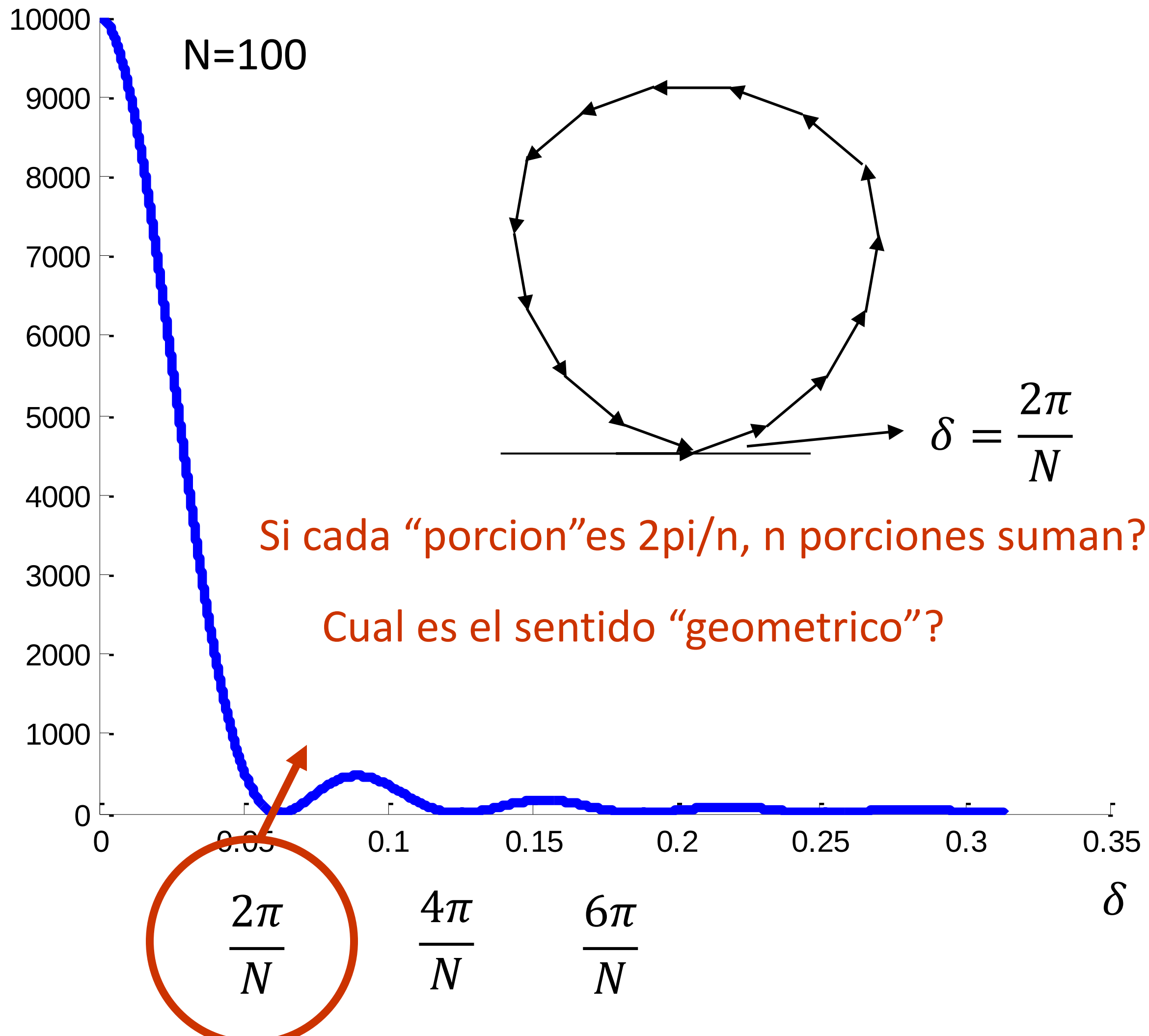
$$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, 3\frac{2\pi}{N}, \ldots, (N-1)\frac{2\pi}{N}$$

Tengo N-1 minimos entre 2 maximos cualesquiera….contando minimos puedo saber cuantas fuentes tengo!

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + (\boldsymbol{N-1})\boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon)$$



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

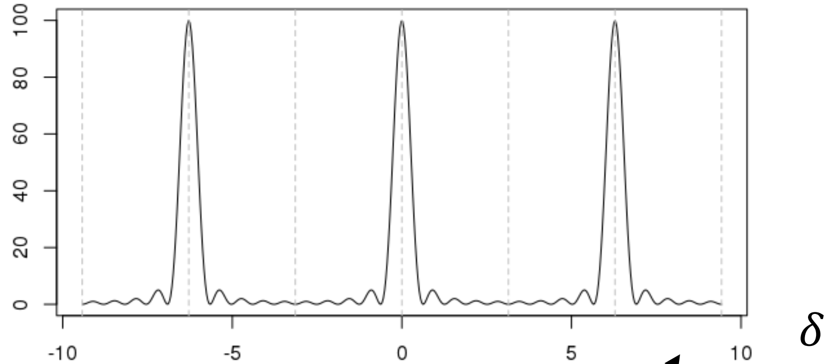


Si cada “porcion”es 2pi/n, n porciones suman?

Cual es el sentido “geometrico”?

Ya entendimos como funciona la intensidad emitida de acuerdo al desfasaje

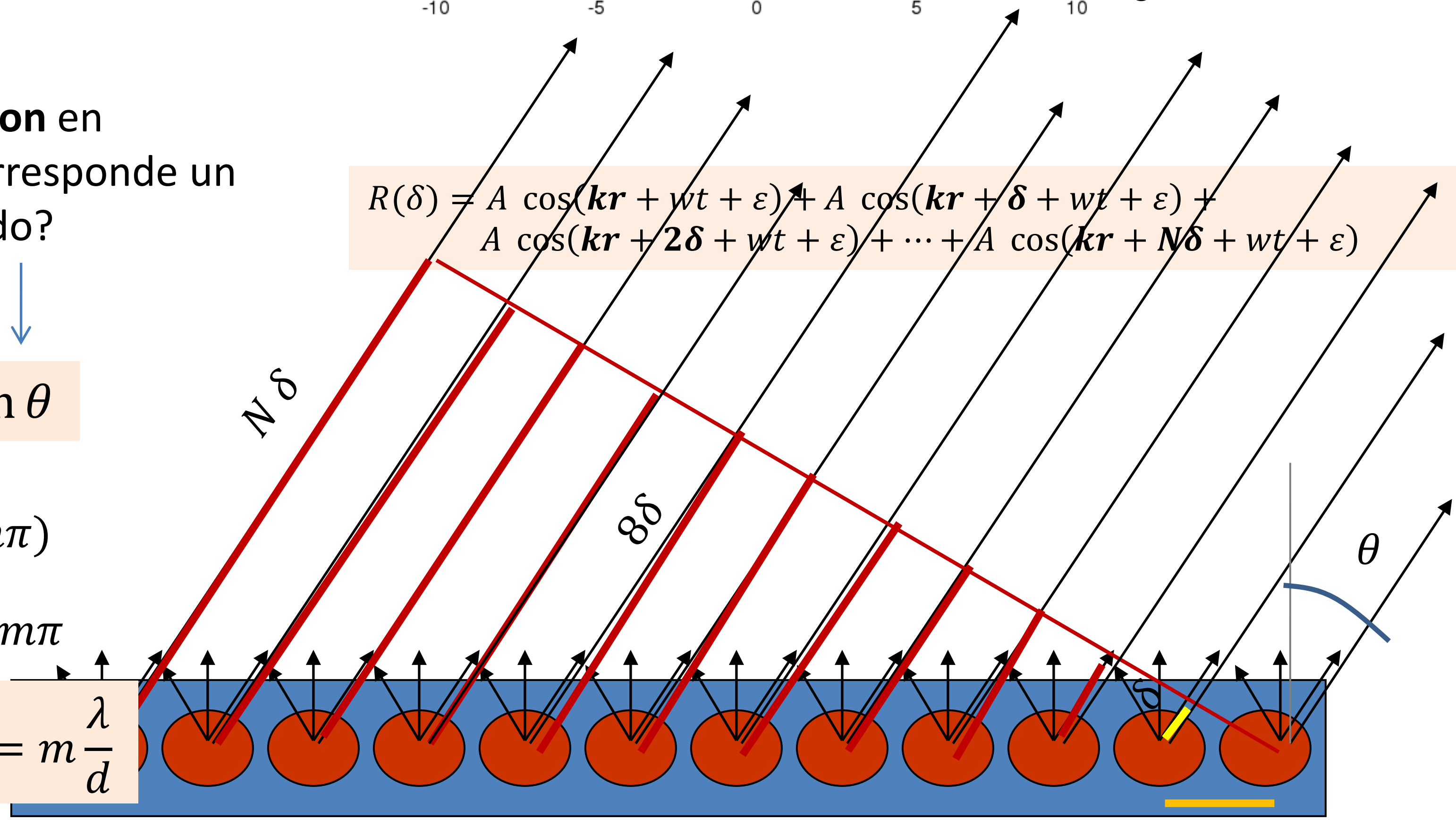
$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$



A que **direccion** en particular corresponde un desfasaje dado?

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

$$R(\delta) = A\ \cos(\boldsymbol{kr} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{\delta} + wt + \varepsilon) + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{2\delta} + wt + \varepsilon) + \cdots + A\ \cos(\boldsymbol{kr} + \boldsymbol{N\delta} + wt + \varepsilon)$$

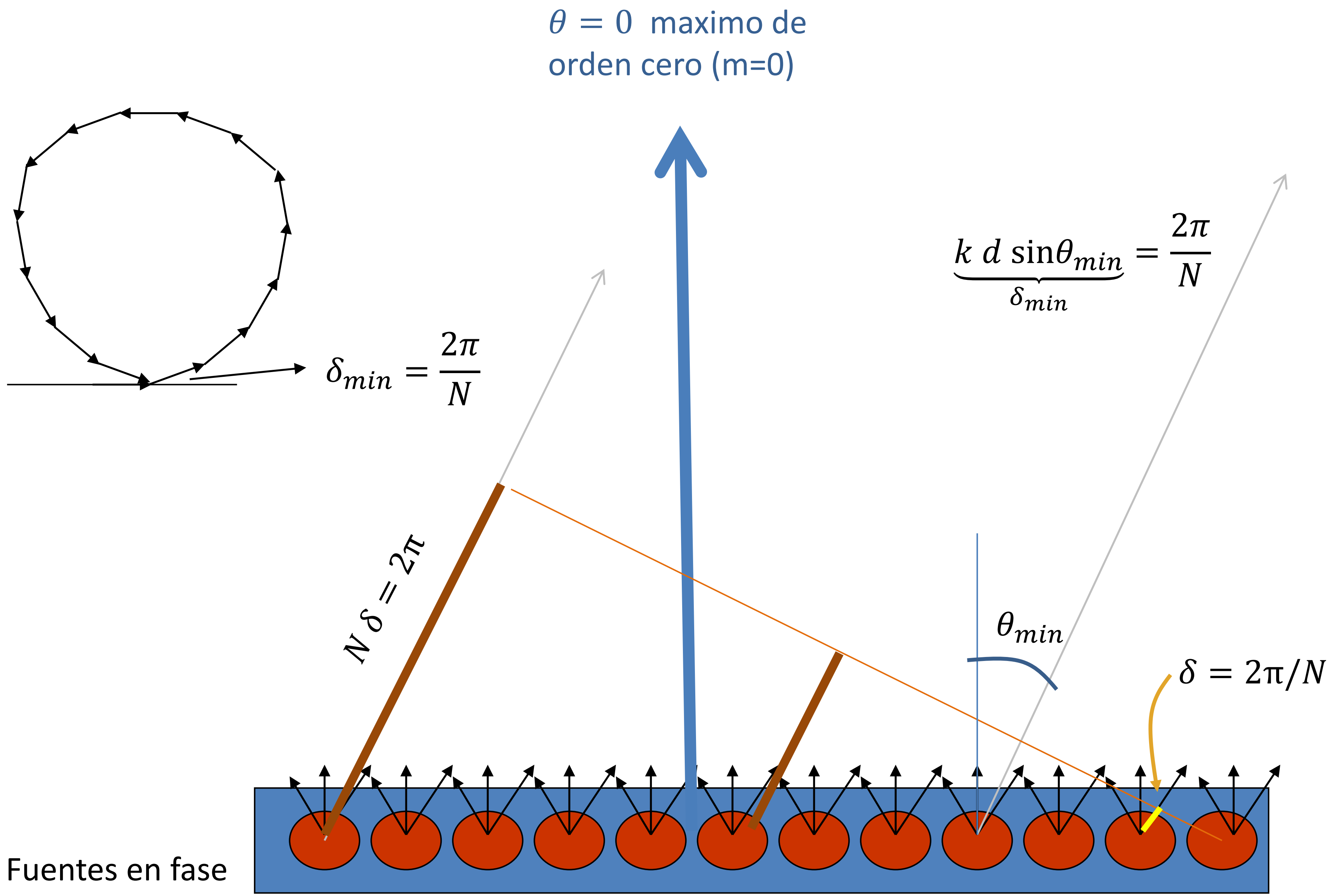


Maximos ($\delta = 2m\pi$)

$$k\ d\ \sin\theta_{max} = 2m\pi$$

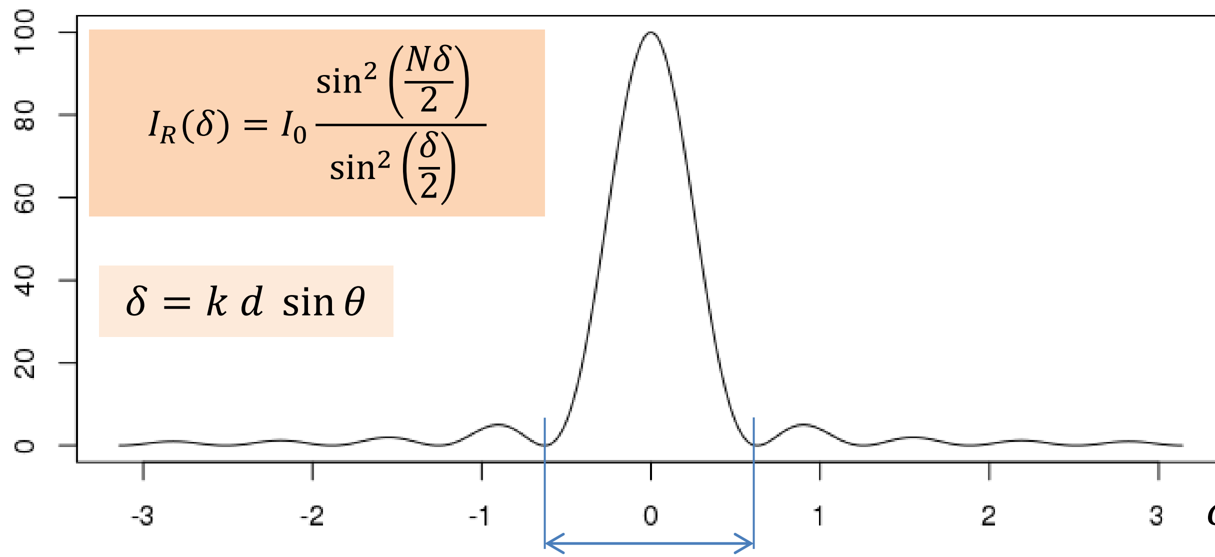
$$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k\ d} = m\frac{\lambda}{d}$$

Notar que si λ/d>1 tengo un unico maximo (!) correspondiente a m=0



$\theta = 0$ maximo de orden cero (m=0)
$\underbrace{k\ d\ \sin\theta_{min}}_{\delta_{min}} = \frac{2\pi}{N}$
$\delta_{min} = \frac{2\pi}{N}$
$N\,\delta = 2\pi$
θ_{min}
$\delta = 2\pi/N$
Fuentes en fase

La campana de difraccion



$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$

$$-\frac{2\pi}{N} \qquad \Delta_\delta \qquad \frac{2\pi}{N}$$

Maximos $(\delta = 2n\pi)$

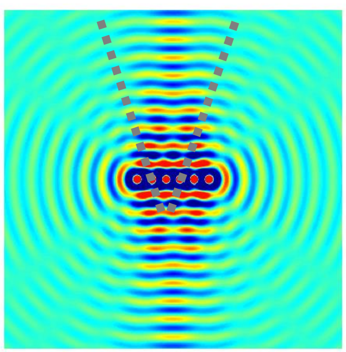
$$k\ d\ \sin\theta_{max} = 2m\pi$$

$$\sin\theta_{max} = \frac{2m\pi}{k\ d} = m\frac{\lambda}{d}$$

El ancho de la campana principal resulta de analizar los primeros minimos a izq y derecha

Minimos $(\delta = \pm 2\pi/N)$

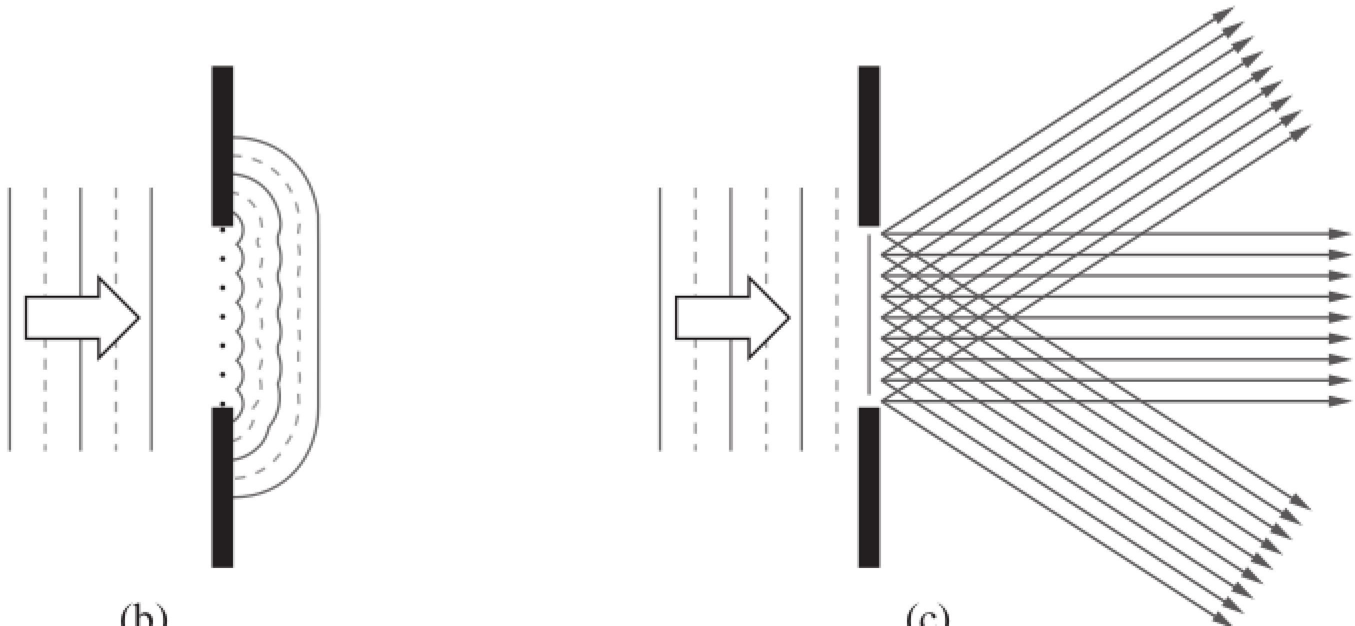
$$k\ d\ \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{2\pi}{N} \longrightarrow \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}$$



Cuantas mas fuentes mas angosto ese maximo

(En este ejemplo $d < \lambda$ y se produce un unico maximo correspondiente m=0)

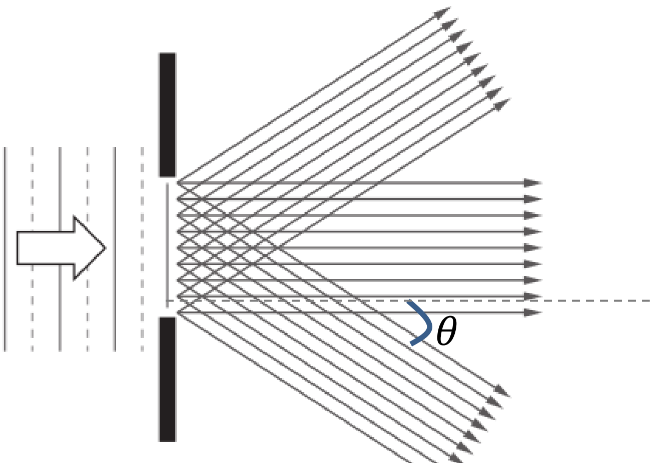
La rendija



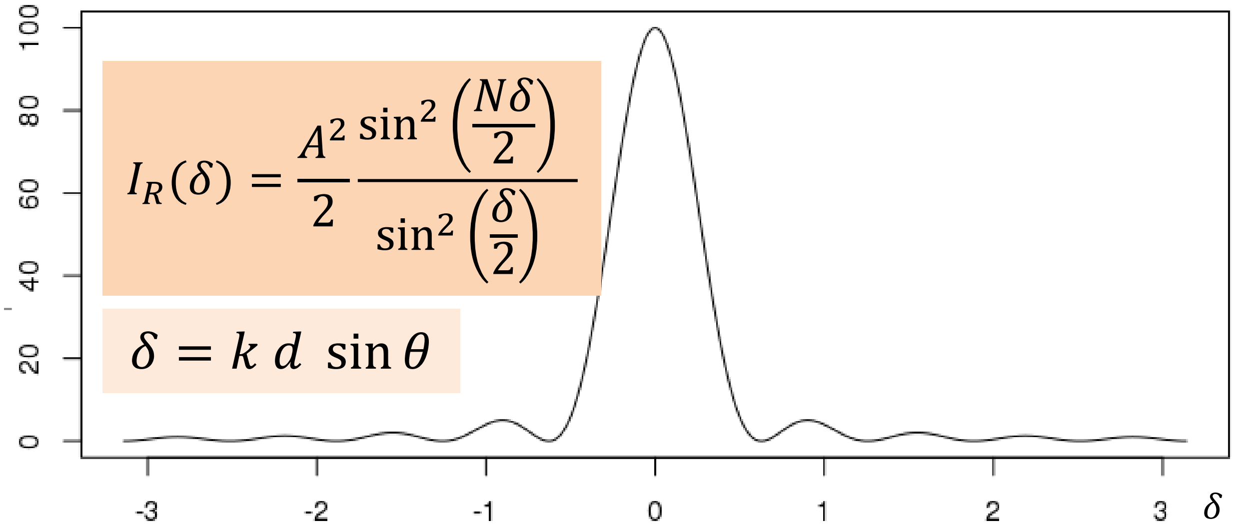
(b) (c)

En una rendija de ancho D sobre la que incide luz
Cuantas fuentes hay?

La rendija

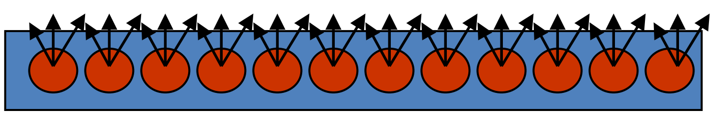


(c)

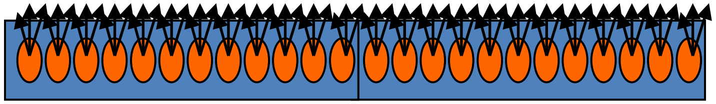


$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

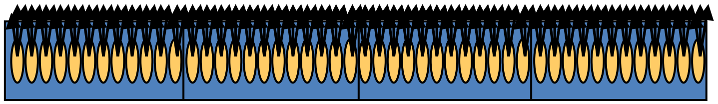
$$\delta = k\ d\ \sin\theta$$



Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) $\lim N \to \infty$



Infinitamente cerca unas de otras $\lim d \to 0$



Cada una emite una amplitud diferencial $\lim A \to 0$

$$N * d = cte = D$$

$$N * A = cte$$

Tomando limites para entender la rendija

(no prigunto cuantos son…sino que vayan saliendo)

$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\, d\ \sin\theta$$

Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial $\lim A \to 0$

$$\left.\begin{matrix} \lim N \to \infty \\ \lim d \to 0 \\ \lim A \to 0 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} N * d = cte = D \\ N * A = cte \end{matrix}$$

$$I_{Rendija}(\delta) = \lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0 \\ A\to 0 \\ Nd=D \\ NA=cte}} \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{Nk\, d\ \sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\, d\ \sin\theta}{2}\right)} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\, D\ \sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\, d\ \sin\theta}{2}\right)}$$

$$\sim \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\, D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\, d\ \sin\theta}{2}\right)^2} = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\, D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\, Nd\ \sin\theta}{2N}\right)^2} = \frac{(AN)^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\, D\ \sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\, D\ \sin\theta}{2}\right)^2}$$

$\sin\alpha \sim \alpha$

$\alpha \to 0$

Tomando limites para entender la rendija

$$I_R(\delta) = \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\, d\, \sin\theta$$

Tengo muchisisimas fuentes (Huygens) $\lim N \to \infty$

Infinitamente cerca unas de otras $\lim d \to 0$

Cada una emite una amplitud diferencial $\lim A \to 0$

$$N * d = cte = D$$

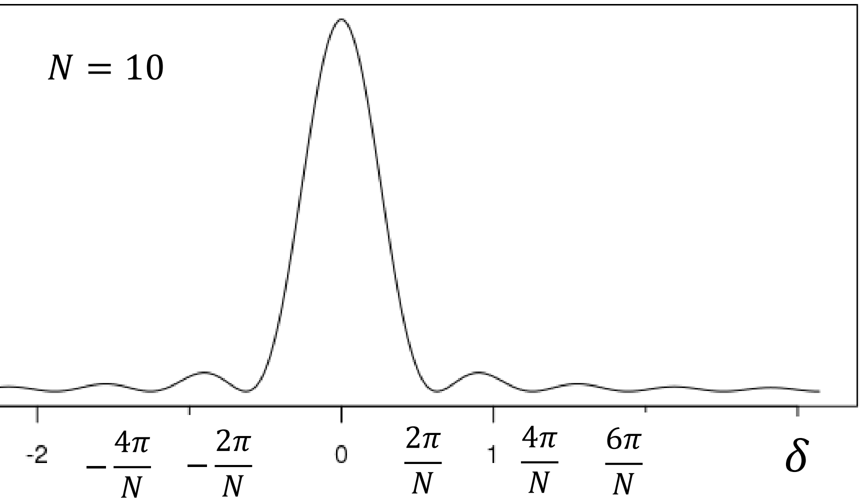
$$N * A = cte = \mathcal{A}$$

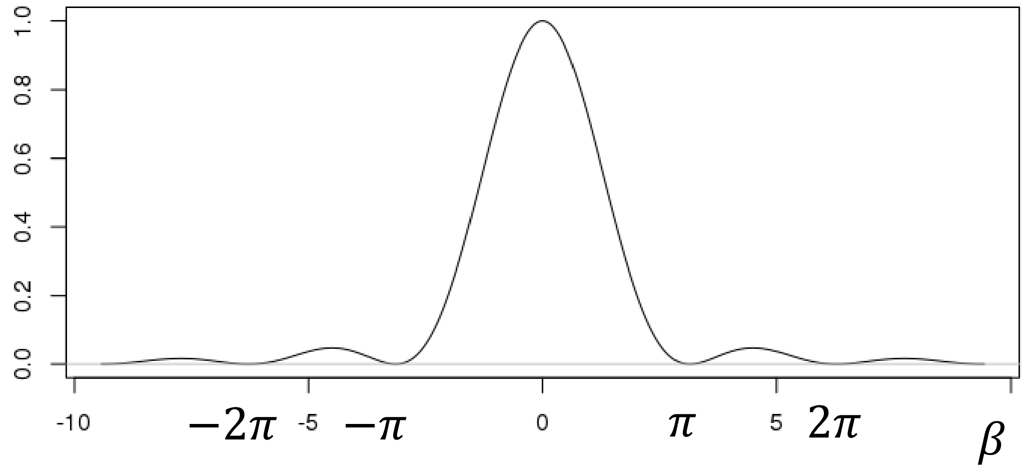
$$I_{Rendija} = \lim_{\substack{N\to\infty \\ d\to 0 \\ A\to 0 \\ Nd=D \\ NA=cte}} \frac{A^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2\left(\frac{k\,D\,\sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\,D\,\sin\theta}{2}\right)^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\,D\,\sin\theta}{2}$$

$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

N fuentes vs 1 rendija





$$I_R(\delta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\delta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

$$\delta = k\, d\ \sin\theta$$

$\lim N \to \infty$
$\lim d \to 0$
$\lim A \to 0$

$$I_{Rendija} = \frac{(AN)^2}{2} \frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$$

$$\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$$

Ancho campana (minimos $\delta = \pm 2\pi/N$)

(minimos $\beta = \pm\pi$)

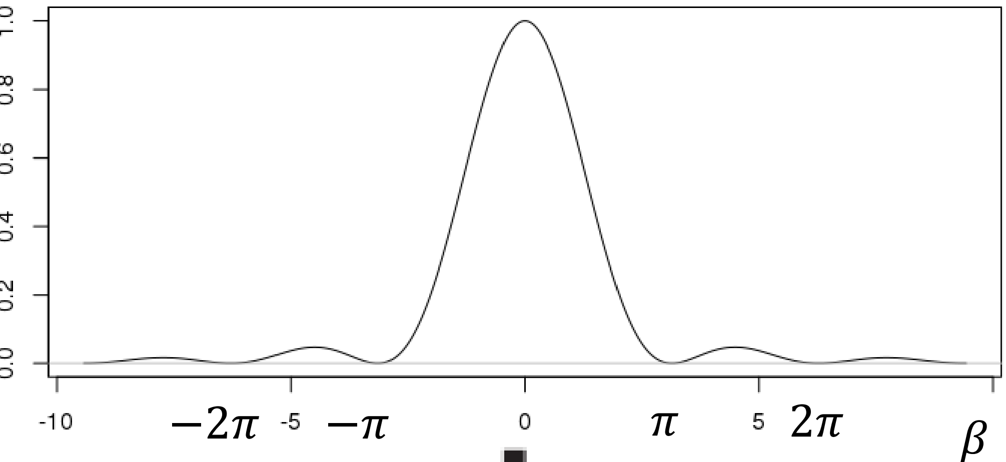
$$k\ d\ \sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{2\pi}{N}$$

$$\sin\theta_{\min\pm} = \pm\frac{\lambda}{Nd}$$

$$\frac{\pi\ D\ \sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi$$

$$\sin\theta_{min} = \pm\frac{\lambda}{D}$$

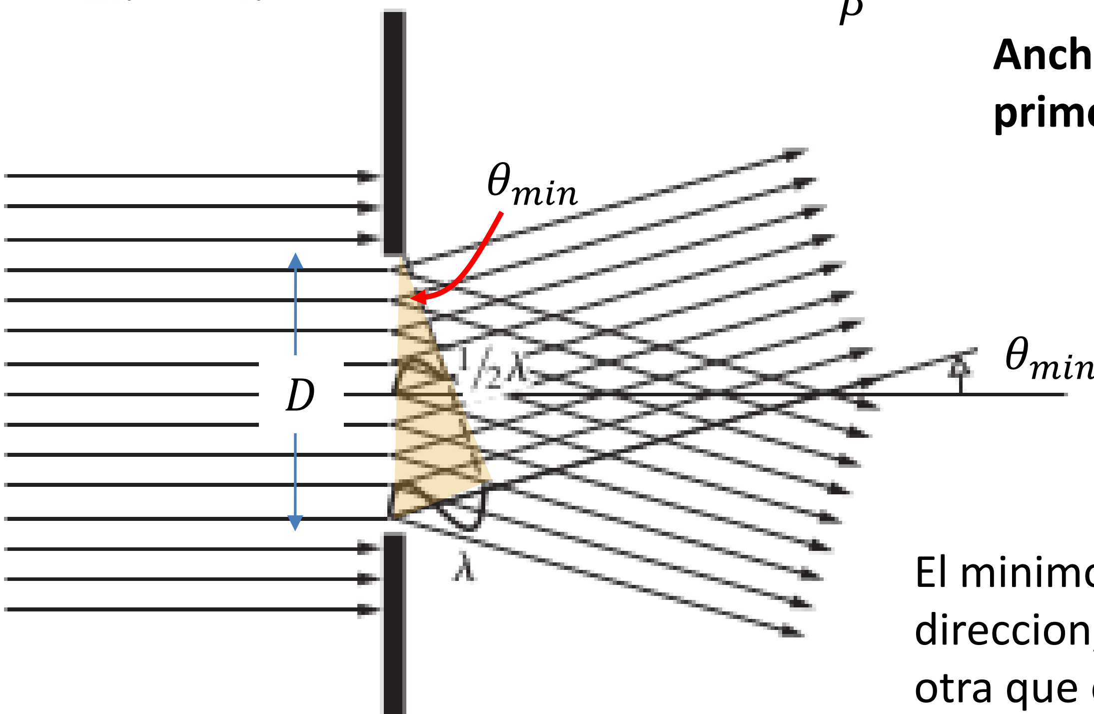
Entendamos los minimos de la rendija



$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\operatorname{sinc}^2\beta$$

con $\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$

manera ñoña de escribir $\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2}$



Ancho de la campana de difraccion: primeros minimos a izq y derecha

$$\beta = \pm\pi$$

$$\frac{\pi\ D\ \sin\theta_{min}}{\lambda} = \pm\pi$$

$$D\sin\theta_{min} = \pm\lambda$$

El minimo se produce porque en esta direccion, por cada fuente secundaria hay otra que emite a contrafase

Lo que acabamos de resolver es esto

$$I_{Rendija} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\frac{\sin^2(\beta)}{\beta^2} = \frac{\mathcal{A}^2}{2}\operatorname{sinc}^2\beta$$

con $\beta = \frac{k\ D\ \sin\theta}{2}$