Cinemática y dinámica del Cuerpo Rígido (no se incluye el movimiento de precesión y el del giróscopo)

El cuerpo rígido

El cuerpo rígido es un caso especial de un sistema de partículas. Es un cuerpo ideal en el cual las partículas que lo componen no modifican su posición relativa entre ellas, cualquiera sea la fuerza o torque a la que esté sometido. Es decir, ninguna fuerza y/o torque que "actúe" sobre el sólido rígido será capaz de modificar la distancia que guarda cada una de las partículas que componen al sólido con todas las demás. Esta es su característica distintiva.
Comenzaremos por estudiar la cinemática del sólido rígido.

Traslación pura

El cuerpo rígido puede tener un movimiento de traslación pura; en este tipo de movimiento, las velocidades de cada una de las partículas que componen al sólido, en cada instante de tiempo, son iguales (tener presente que la velocidad es un vector; esto implica que el módulo, la dirección y el sentido de la velocidad son iguales para todas las partículas en un instante dado).
En general, el movimiento del sólido será curvilíneo y, por lo tanto, tendrá componentes de aceleración tangencial y normal.

Rotación pura

Si el único movimiento del cuerpo rígido es de rotación alrededor de un eje, decimos que el movimiento es de rotación pura; en este caso, las trayectorias de todas las partículas del sólido son circunferencias concéntricas; la velocidad de cada partícula tendrá la dirección y sentido del versor tangente a la circunferencia en cada instante de tiempo. Asimismo, las velocidades de las distintas partículas que integran el sólido no serán las mismas; ***la única velocidad común será la velocidad angular del cuerpo.***

Movimiento roto-traslatorio

El sólido rígido puede trasladarse y rotar simultáneamente. En esta circunstancia, diremos que el movimiento es roto-traslatorio; es el movimiento más general que puede tener. Un típico ejemplo del movimiento roto-traslatorio lo constituye el movimiento de la Tierra[1]: se traslada en una órbita elíptica alrededor del Sol y simultáneamente gira en torno a un eje que pasa por sus polos.

a) Velocidad del movimiento roto-traslatorio

Supongamos que un cuerpo rígido de forma cualquiera esté efectuando, con relación a un observador inercial fijo a su sistema de referencia, un movimiento roto-traslatorio, como indica la figura 1. Desde este sistema de referencia, si ***R*** es el vector posición de

[1] La Tierra no es un sólido rígido debido a las mareas, los movimientos del terreno por interacción gravitatoria, el desplazamiento de las placas tectónicas, etc.; en una primera aproximación, podemos suponer que lo es.

una partícula del sólido ubicada en el punto P, la velocidad de esa partícula desde el sistema inercial será:

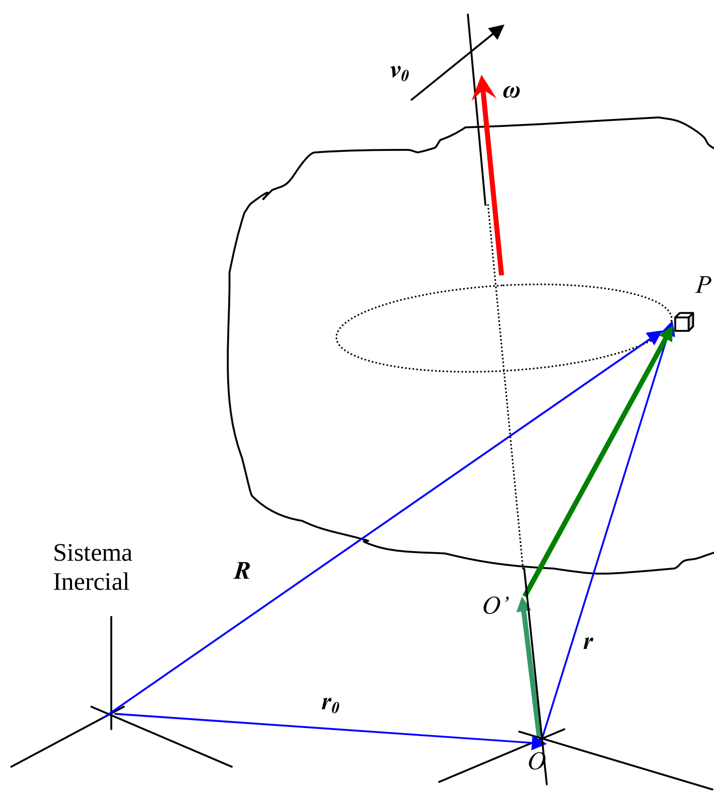
$$\vec{v} = d\vec{R} / dt \,.$$

Tomemos otro sistema de referencia, de origen en el punto O, con uno de sus ejes coincidente, en todo instante de tiempo, con el eje de rotación del sólido. Es evidente que este sistema de referencia se trasladará con velocidad $\vec{v}_0$, que es la velocidad de traslación del eje, velocidad que tendrían todas las partículas del cuerpo rígido si éste sólo tuviera movimiento de traslación. Hacemos $\vec{R} = \vec{r}_0 + \vec{r}$ donde $\boldsymbol{r_0}$ es el vector posición del origen del sistema de referencia móvil y $\boldsymbol{r}$ es el vector posición del punto P desde el sistema móvil. La expresión de la velocidad, desde el sistema del observador inercial, quedará entonces como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \,.$$

Nótese que si el eje de rotación del sólido no es uno de los ejes del sistema móvil, siempre se puede "acomodar" el sistema de referencia móvil de forma tal que uno de sus ejes sea el eje de rotación del sólido (por ejemplo, mediante una transformación de coordenadas al nuevo sistema más conveniente).

Figura 1



El punto *O* del eje de rotación no es un punto "especial". Si hubiéramos tomado otro punto *O'* como origen de coordenadas del sistema que se traslada con velocidad $\boldsymbol{v_0}$, la velocidad del punto *P* sería la misma:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (OO' + O'P) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge OO' + \vec{\omega} \wedge O'P$$

y como la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el vector ***OO'*** son paralelos, o sea su producto vectorial es cero, queda:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \omega \wedge \vec{r} = \vec{v}_0 + \omega \wedge O'P$$

b) Condición de rigidez

Durante el movimiento se debe verificar la condición de rigidez; es decir, que dos puntos cualesquiera del sólido mantengan inalterada, para todo instante de tiempo, la distancia que los separa. Debemos entonces demostrar que la expresión de la velocidad con la que se mueve cada punto del sólido rígido recién obtenida, nos permite verificar la condición de rigidez a cumplir (ver la figura 2 en la que se prescinde del sistema de referencia inercial del observador).

De acuerdo a lo visto será:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_2$$

Restando miembro a miembro queda:

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\omega} \wedge (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12} \quad ; \qquad [2]$$

Multiplicando escalarmente por $\boldsymbol{r_{12}}$ se obtiene:

$$\vec{r}_{12} \bullet (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \vec{r}_{12} \bullet (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{12})$$

El segundo miembro de la ecuación es cero pues el vector que surge de la operación indicada dentro del paréntesis es perpendicular al vector $\boldsymbol{r_{12}}$ y por lo tanto el producto escalar es cero. De aquí

$$\vec{r}_{12} \bullet \vec{v}_2 = \vec{r}_{12} \bullet \vec{v}_1$$

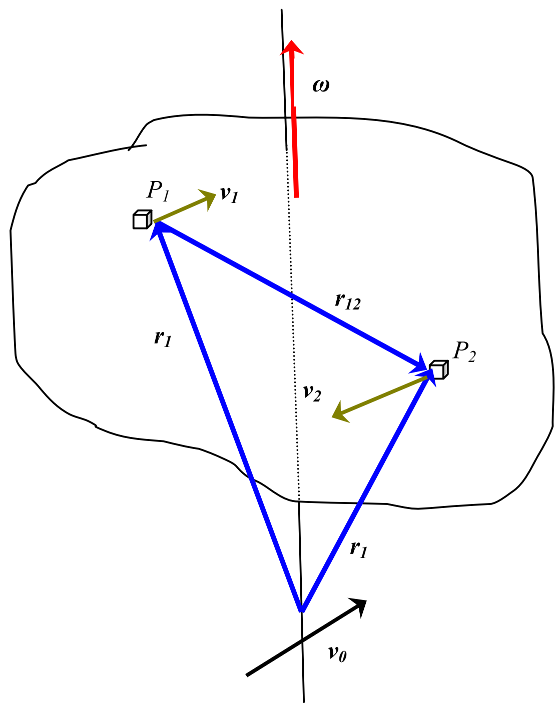


Figura 2

Esta ecuación nos indica que las proyecciones de las velocidades de ambos puntos sobre el vector $\boldsymbol{r_{12}}$ son iguales y que, en consecuencia, la distancia entre ambos puntos no se modificará con el movimiento.

Una conclusión es que la condición de rigidez permite que la cinemática del cuerpo rígido, cuerpo al que podemos suponer como compuesto por un número "infinito" de

[2] Los subíndices indican que el vector tiene origen en el punto 1 y extremo en el punto 2.

partículas, se exprese mediante una expresión sencilla para la velocidad: con sólo seis funciones del tiempo (tres para cada una de las componentes de $\boldsymbol{v_0}$ y tres para cada una de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$) queda determinada la velocidad de cualquier punto en función del tiempo.

c) Centro instantáneo de rotación (CIR)

Una propiedad importante del movimiento del cuerpo rígido es que todas las partículas que estén alineadas sobre una recta paralela al eje de rotación, tienen iguales velocidades. Esto se puede comprobar a partir de la determinación de las velocidades de las partículas ubicadas en los puntos *P* y *Q,* que están sobre una recta paralela al eje de rotación como indica la figura 3.

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_Q$$
$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}, \quad \therefore$$
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}\right) =$$
$$= \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ}$$
$$\vec{\omega} \text{ es paralelo a } \vec{r}_{PQ}$$
$$\Rightarrow \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{PQ} = 0$$
$$\therefore \quad \vec{v}_P = \vec{v}_Q$$

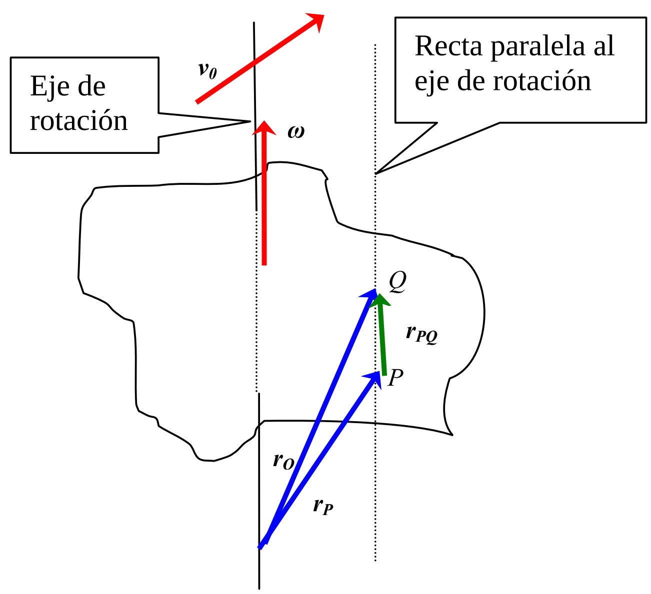


Figura 3

La igualdad de velocidades en las condiciones enunciadas más arriba tiene una consecuencia muy importante.

Supongamos un cilindro rígido de radio *R* que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal (figura 4). Este movimiento se lo puede considerar como una superposición de una traslación del eje con una cierta velocidad $\boldsymbol{v_0}$, con una rotación alrededor del eje con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. En cada

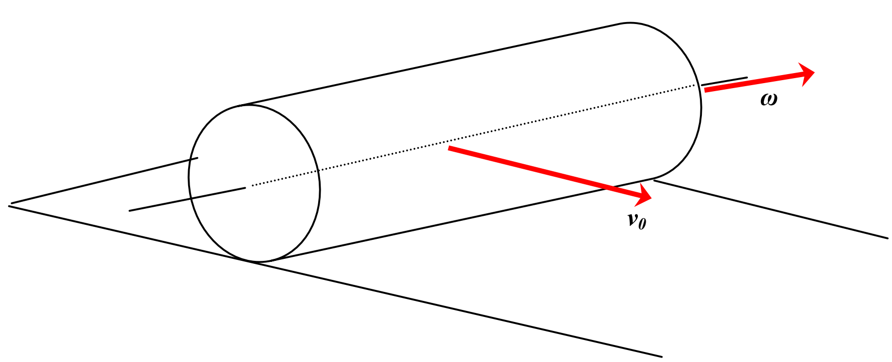


Figura 4

instante de tiempo habrá una única generatriz del cilindro en contacto con el plano, que llamaremos generatriz de contacto.

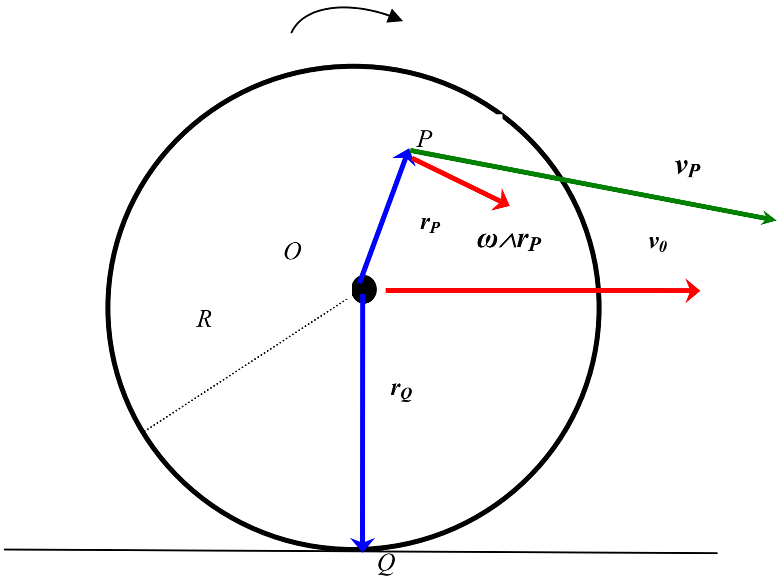


Figura 5

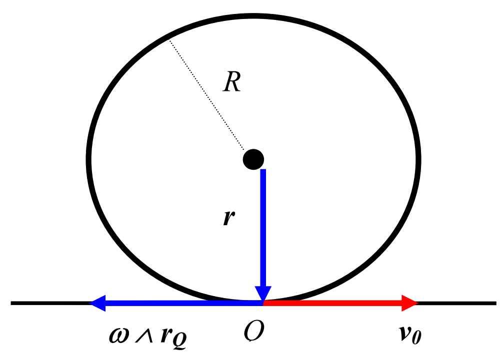
Visto de costado, figura 5, la velocidad de una partícula del cilindro ubicada en un punto cualquiera *P*, será:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P$$

Para que el cilindro ruede sin deslizar, la velocidad angular ω no puede ser arbitraria; quedará fijada por la condición que los puntos de la generatriz de contacto con el plano tengan velocidad nula. Por lo tanto, la velocidad del punto genérico *Q* (punto de la generatriz de contacto entre el cilindro y el plano) debe anularse (figura 6).

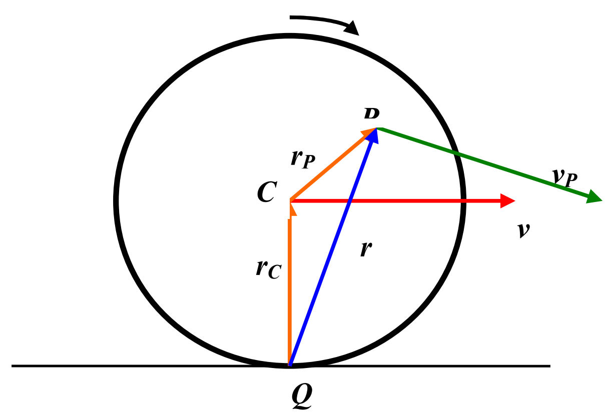
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_Q = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_0 = -\vec{\omega} \wedge \vec{r}_Q$$

Dado que los vectores ω y $\boldsymbol{r_Q}$ son perpendiculares, su producto vectorial tendrá por módulo el producto de los módulos de dichos vectores. Por lo tanto, el módulo de la velocidad angular será: $|\omega| = {v_0}/{R}$. Si la velocidad $\boldsymbol{v_Q} = 0$, y teniendo en cuenta que esa es la velocidad de todos los puntos de la generatriz de contacto, entonces podemos suponer el movimiento del cilindro como una rotación pura alrededor de dicha generatriz con la velocidad angular hallada.



Figura

En un instante de tiempo posterior, el eje de la rotación pura será otro, pues es otra la generatriz de contacto con el plano. A esta generatriz se la denomina eje instantáneo de rotación. La velocidad de un punto cualquiera será ahora (figura 7):



C: centro del círculo
P: punto en el que se calcula la velocidad
Q: centro instantáneo de rotación

Figura 7

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge(\vec{r}\,'-\vec{r}_C) = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'-\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$
$$\vec{v}_0 = \vec{\omega}\wedge\vec{r}_C \quad \therefore \quad \vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P = \vec{\omega}\wedge\vec{r}\,'$$

En el ejemplo anterior hemos descrito el movimiento rototraslatorio del cuerpo rígido de dos formas distintas. El resultado obtenido brinda la posibilidad de generalizarlo. Supongamos que un sólido rígido describe un movimiento rototraslatorio; en un instante cualquiera su velocidad de traslación es $\boldsymbol{v_0}$ y ω su velocidad angular (figura 8). En la figura se ha omitido el sistema de referencia inercial del observador y sólo se ha dibujado el eje alrededor del cual gira el cuerpo del sistema de referencia que se traslada con él.

Las velocidades de dos puntos cualesquiera *P* y *Q* del sólido serán:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P$$
$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_Q$$

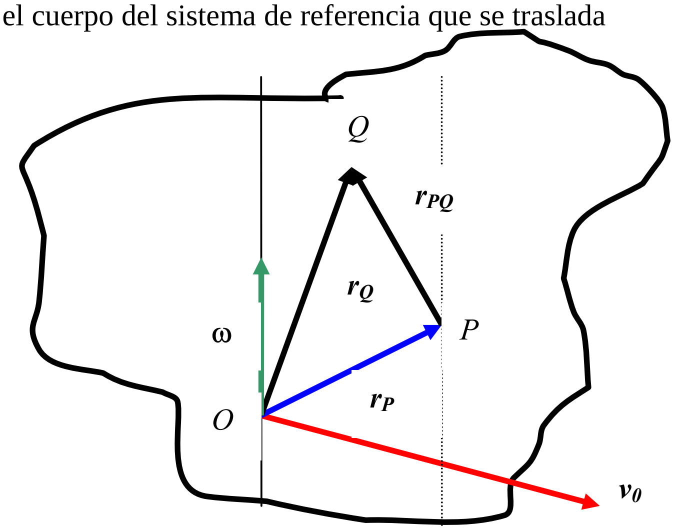
Pero como

$$\vec{r}_Q = \vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}$$

será:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{r}_P + \vec{r}_{PQ}\right) =$$
$$= \vec{v}_0 + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_P + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_{PQ} = \vec{v}_P + \vec{\omega}\wedge\vec{r}_{PQ}$$

El último miembro de la ecuación representa un movimiento rototraslatorio en torno a un eje que pasa por el punto *P* y es paralelo al que pasa por *O,* con la mmisma velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y velocidad de traslación $\boldsymbol{v_P}$.



O: origen de coordenadas del sistema móvil
La línea de puntos que pasa por *P* es paralela al eje de coordenadas alrededor del cual gira el cuerpo.

Figura 8

En este caso se dice que la velocidad del punto *Q* (y por ser un punto cualquiera, la velocidad del cuerpo rígido) "está referida" al punto *P*. Dado que el centro de masa es un punto notable del cuerpo rígido, es muy útil tomarlo como punto de referencia del movimiento del sólido. Por lo tanto, conviene describir todo movimiento rototraslatorio del sólido como la superposición de una rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa y una traslación del centro de masa. La velocidad de traslación será entonces la suma de la velocidad del centro de masa más la velocidad lineal debida a la rotación alrededor de un eje que pasa por el centro de masa (figura 9):

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

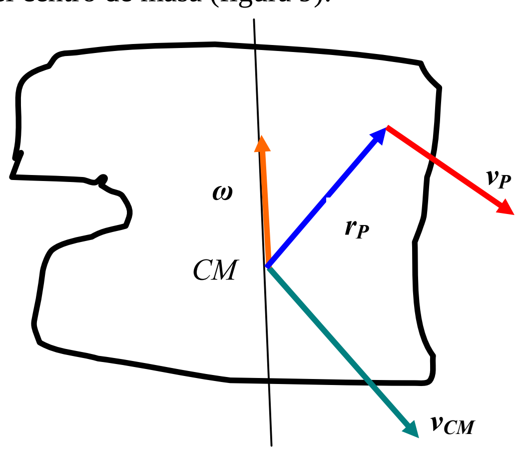


Figura 9

Momentum angular del sólido rígido

Supongamos un cuerpo rígido en movimiento rototraslatorio: traslación respecto de un sistema inercial de origen O y rotación respecto de un eje que pasa por su centro de masa, como se indica en la figura 10.

Si en el punto P del sólido ubicamos un pequeño elemento de volumen dV que contiene una masa dm (suponemos elementos de volumen infinitesimales desde un punto de vista macroscópico de forma tal de no poner de manifiesto el carácter discreto de la materia, compuesta de partículas separadas entre sí), su contribución $d\boldsymbol{L}$ al momentum angular del sólido será:

$$d\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_P) \wedge dm(\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) =$$
$$= \vec{r}_{CM} \wedge dm(\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) + \vec{r}_P \wedge dm(\vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P)$$

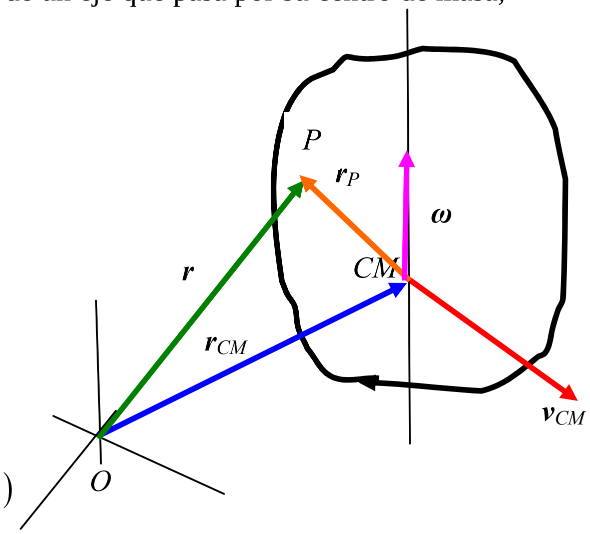


Figura 10

Dado que estamos suponiendo la continuidad del sólido, podemos suponer que $dm=\rho dV$ dónde ρ es su densidad. Reemplazando en la expresión anterior, podemos obtener el momentum angular total respecto del origen O por integración sobre todo el volumen ocupado por el cuerpo rígido:

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM} dV + \int_V \rho \vec{r}_{CM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) dV + \int_V \rho \vec{r}_P \wedge \vec{v}_{CM} dV + \int_V \rho \vec{r}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) dV =$$
$$= (\vec{r}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM}) \int_V \rho dV + \vec{r}_{CM} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge \int_V \rho \vec{r}_P dV\right] + \left(\int_V \rho \vec{r}_P dV\right) \wedge \vec{v}_{CM} + \int_V \rho \vec{r}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) dV$$

Como $\boldsymbol{r}_{CM}$ y $\boldsymbol{v}_{CM}$ no dependen del volumen del cuerpo, en la integral del primer término del segundo miembro, el producto vectorial entre ambas magnitudes sale fuera de la integral; la integral queda entonces igual a la masa total M del sólido. En la integral del segundo término también sale fuera la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$; esta integral es cero pues su resultado es proporcional al vector posición del centro de masa en el mismo sistema. Por esta misma razón, también es cero la integral del tercer término. La expresión queda así:

$$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM} + \int_V \rho \vec{r}_P \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) dV = \vec{r}_{CM} \wedge \vec{P}_{CM} + \vec{L}_{CM}$$

En esta ecuación, al primer término del segundo miembro se lo denomina momentum angular ***orbital*** del cuerpo rígido respecto del punto O (en el cual ubicamos el origen de coordenadas) porque representa el momentum angular que tendría un cuerpo puntual de la misma masa M que siga la misma trayectoria que el centro de masa del cuerpo. El segundo término, momentum angular respecto del centro de masa, es denominado momentum angular ***propio*** o de ***spin***. En un sistema fijo al campo de juego, una pelota de fútbol impulsada por un jugador adquiere momentum angular orbital (recordar el caso del proyectil en tiro oblicuo al cual se suponía una partícula) y un momentum angular de spin al girar sobre un eje que pasa por su centro de masa.

Momento de Inercia

Supongamos ahora un cuerpo rígido (de densidad ρ) animado de un movimiento de rotación, con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, en torno a un eje fijo. Calculemos su momentum angular ubicando el origen en algún punto del eje de rotación (este punto no tiene por qué ser el centro de masa del sólido y el eje tampoco está obligado a pasar por el centro de masa), como se indica en la figura 11.

La contribución al momentum angular de un elemento de masa *dm* ubicado en un punto *P* será:
$d\vec{L} = \vec{r}_P \wedge \left(\rho dV \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P\right)$ donde dV es el elemento de volumen en el punto *P*.
El momentum angular total se obtendrá por integración sobre el volumen del sólido:

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r}_P \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P\right) dV$$

En general, el momentum angular y la velocidad angular tienen direcciones diferentes; esto dificulta resolver la última integral. Se puede demostrar que hay sólo 3 direcciones perpendiculares entre sí (que coinciden con los ejes de simetría del sólido cuando estos existen) para las cuales, si el cuerpo rota alrededor de alguna de ellas, el momentum angular total es colineal con el vector velocidad angular. Estas tres direcciones particulares se denominan *ejes principales de inercia* (figura 12).

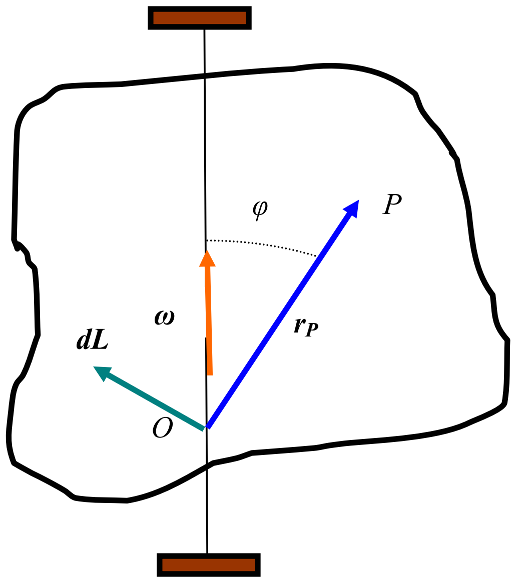


Figura 11

Calcularemos la proyección del momentum angular respecto del eje de rotación (figura 11).
El vector ***dL*** está en el plano formado por el eje y $\boldsymbol{r_P}$ y es perpendicular a éste último. El módulo de su componente a lo largo del eje de rotación será:

$$dL = \omega r_P^2 sen\varphi \rho dV \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \omega r_P^2 sen^2 \varphi \rho dV$$

Puesto que $r_P.sen\varphi = R$ es el radio de la circunferencia que describe el punto *P* al rotar en torno al eje, la proyección sobre el eje de rotación del diferencial de momentum angular quedará:

$$dL = \omega R^2 \rho dV$$

La componente del momentum angular buscado resultará entonces:

$$L\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = Lsen\varphi = \int_V dL = \omega \int_V \rho R^2 dV = I\omega \quad \Rightarrow \quad L_{eje} = I\omega$$

expresión en la que hemos denominado como *I*, al momento de inercia del sólido respecto del eje de rotación, dado por: $I = \int_V \rho R^2 dV$

El momento de inercia es aditivo: el momento de inercia respecto de un eje de dos cuerpos unidos rígidamente entre sí es la suma de los momentos de inercia de cada uno de los cuerpos respecto de ese mismo eje.[3]
Si el eje de rotación es un eje principal de inercia, el momentum angular es colineal con la velocidad angular,

[3] Importante: hay que referir los momentos de inercia de cada parte al eje final para poder sumarlos.

$\therefore \quad \vec{L} = I\vec{\omega}$. En este caso, el momento de inercia se denomina momento principal de inercia.
Si el vector velocidad angular no es paralelo a alguno de los ejes principales de inercia, entonces tampoco lo será con relación al momentum angular (figura 12).

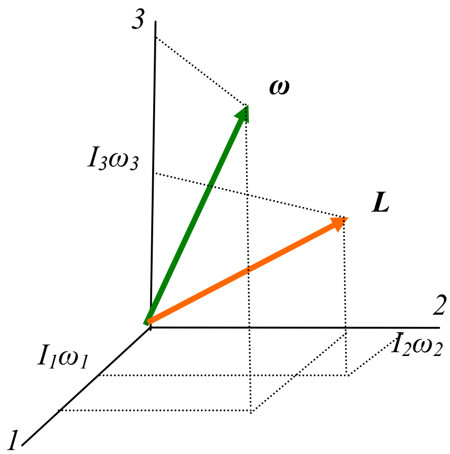


Figura 12

En este caso, la relación entre $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{\omega}$ es más compleja: la relación entre ambos vectores se establece mediante el tensor de inercia, que no estudiaremos. Con relación a la figura 12, para los ejes principales de inercia *1*, *2* y *3* se cumple que:
$L_1 = I_1\omega_1$; $L_2 = I_2\omega_2$; $L_3 = I_3\omega_3$; donde I_i y ω_i son los momentos de inercia y las componentes de la velocidad angular, respectivamente, a lo largo de los ejes principales.
Un ejemplo de lo dicho más arriba es el caso de dos masas iguales puntuales unidas mediante una varilla rígida de peso despreciable, que rota alrededor de un eje que forma un ángulo φ con la varilla (figura 13).

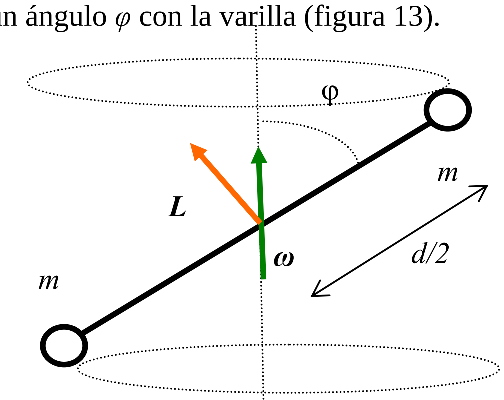


Figura 13

De la figura 13 se observa que:

$$\vec{L} = 2\vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \qquad \vec{r} = \frac{d}{2}\hat{r}$$

El módulo del vector momentum angular será:

$$L = 2\frac{d}{2}m\left(\omega\frac{d}{2}sen\varphi\right) = 2m\omega\left(\frac{d}{2}\right)^2 sen\varphi$$

La componente del momentum angular a lo largo del eje de rotación será entonces:

$$L_{eje} = L\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = Lsen\varphi = 2m\omega\left(\frac{d}{2}\right)^2 sen^2\varphi$$

Como $\frac{d}{2}sen\varphi = R$, siendo R el radio de la circunferencia que describe cada masa. Por lo tanto: $L_{eje} = 2mR^2\omega$; y como $2mR^2 = I \;\; \Rightarrow \;\; L_{eje} = I\omega$. El momento de inercia de ambas masas es $2mR^2$ pues hemos supuesto que las masas son puntuales.
Si las masas no son puntuales, el cálculo del momento de inercia hay que efectuarlo con la expresión integral.
Ejemplo: cálculo del momento de inercia de una varilla delgada homogénea de longitud L (figura 14) en torno a:

i) un eje perpendicular a ella que pasa por su centro de masa;
ii) un eje perpendicular a ella que pasa por su extremo.

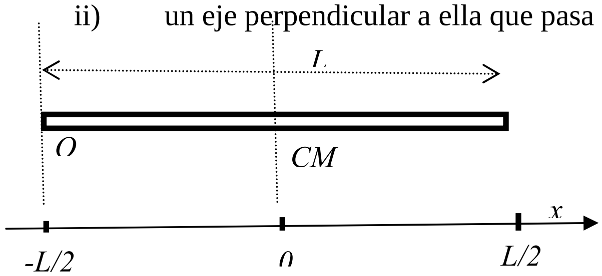


Figura 14

Caso i):
Tomamos un elemento de volumen dV en algún punto entre x y $x+dx$. Dado que la barra es de sección constante A, delgada y homogénea, el elemento de volumen estará dado por:

$$dV = Adx \quad \therefore \quad I_{CM} = \rho\int_{-L/2}^{L/2} x^2 Adx = \frac{1}{3}\rho A\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(\frac{-L}{2}\right)^3\right] \quad \Rightarrow \quad I_{CM} = \frac{2}{3}\rho A\left(\frac{l}{2}\right)^3$$

Puesto que $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{AL}$, queda $I_{CM} = m\frac{L^2}{12}$.

Caso ii): Ahora la integral debe hacerse entre *0* y *L*, o sea, entre los extremos de la barra. El nuevo momento de inercia será: $I_O = \rho A\int_0^L x^2 dx = \rho A\frac{L^3}{3} = m\frac{L^2}{3}$.

Teorema de Steiner

Veamos la relación que hay entre el momento de inercia de un cuerpo rígido con respecto a un eje que pasa por su centro de masa (I_{CM}) y el momento de inercia con respecto a un eje paralelo al anterior y separado por una cierta distancia *a* (I_O).
En la figura 15, δm_i es la masa contenida en un pequeño elemento de volumen del cuerpo rígido.

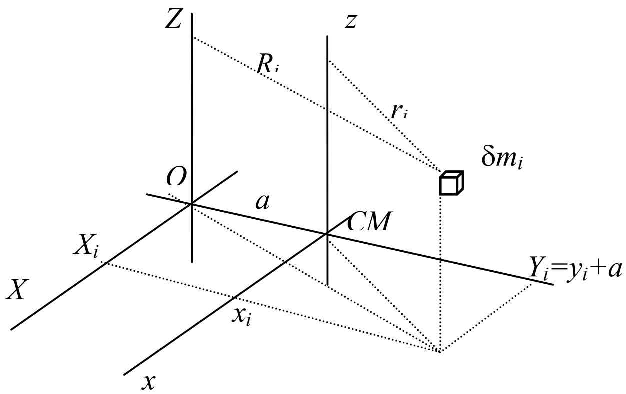


Figura 15

Se observa que el momento de inercia respecto del eje *O* se puede escribir como:

$$X_i = x_i \quad Y_i = y_i + a$$

$$I_O = \sum_i R_i^2 \delta m_i = \sum_i \left(X_i^2 + Y_i^2\right)\delta m_i = \sum_i \left[x_i^2 + \left(y_i + a\right)^2\right]\delta m_i$$

$$I_O = \sum_i \left(x_i^2 + y_i^2\right)\delta m_i + 2a\sum_i y_i \delta m_i + a^2\sum_i \delta m_i = \sum_i r_i^2 \delta m_i + a^2 M$$

$$I_O = I_{CM} + Ma^2$$

donde *M* es la masa total del cuerpo.
El resultado es entonces que el momento de inercia de un sólido rígido respecto de un eje cualquiera es igual al momento de inercia del cuerpo respecto de un eje paralelo al anterior sumado al producto de la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia que separa a ambos ejes. Obsérvese que si los ejes no son paralelos el teorema no se aplica. Tampoco se aplica si ninguno de los dos ejes pasa por el centro de masa del cuerpo.
En el caso del cálculo del momento de inercia de la varilla, la distancia entre los ejes (el que pasa por el centro de masa y el que pasa por el extremo), es *L/2*. Con $I_{CM}=mL^2/12$, aplicando el teorema de Steiner para el eje que pasa por el extremo de la varilla se obtiene:

$$I_O = I_{CM} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}mL^2 + \frac{1}{4}mL^2 = \frac{1}{3}mL^2$$

resultado idéntico al obtenido mediante el cálculo directo de la integral que nos da el momento de inercia.

Radio de giro

La forma que adquiere el momento de inercia para el caso de una masa puntual $I = mr^2$ donde r es la distancia de la masa puntual m hasta el eje de rotación, permite establecer una analogía para calcular el momento de inercia de un cuerpo rígido. Se puede suponer que toda la masa M del cuerpo se encuentra concentrada a una distancia K del eje de forma tal que $I=MK^2$. A esta distancia K se la denomina radio de giro. Para la varilla, cuyo momento de inercia respecto de un eje que pasa por su centro de masa es $I_{CM}=ML^2/12$, el valor de K será $K^2=L^2/12$. De igual forma se determinan los valores de K para otros cuerpos rígidos de diferentes formas: cilindro, esfera, etc.

Dinámica del cuerpo rígido

La aplicación de una fuerza a un cuerpo rígido no vinculado (por ejemplo, no tiene ejes de rotación fijos preestablecidos) provocará una traslación de su centro de masa y una rotación en torno a un eje que lo contenga. Esto último es así debido a la condición de rigidez: dado que las partículas que componen al cuerpo rígido deben conservar constantes sus distancias relativas, el único movimiento que se puede superponer al de traslación del centro de masa y compatible con esta exigencia, es el de una rotación en torno a un eje que pase por el centro de masa.
Si el cuerpo rígido está realizando un movimiento rototraslatorio y $\boldsymbol{F}$ es la fuerza resultante que actúa sobre él, será:

$\vec{F} = M\vec{a}_{CM}$; $\quad \dfrac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\tau}_{CM}$ donde $\boldsymbol{\tau_{CM}}$ y $\boldsymbol{L_{CM}}$ son el torque resultante sobre el sólido rígido y el momentum angular (ambos con respecto al centro de masa) respectivamente.
En las ecuaciones precedentes se da por supuesto que el eje de rotación contiene al centro de masa; tiene un movimiento de traslación y las magnitudes involucradas se refieren al centro de masa.
En el caso en que el movimiento del cuerpo rígido no vinculado se estudiara ubicando el origen de coordenadas en el CIR (centro instantáneo de rotación), ***el movimiento sería de rotación pura***; entonces, tanto el torque como el momentum angular deben ser calculados con respecto a dicho punto (el CIR). En este caso, la ecuación que vincula al momentum angular con el torque queda: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$. $\boldsymbol{L}$ y $\boldsymbol{\tau}$ deben estar referidos al mismo punto; punto que debe estar en reposo instantáneo.
En el caso en que la velocidad angular del sólido coincida con un eje principal de inercia (es decir, que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje principal de inercia), el momentum angular será colineal con la velocidad angular y, por lo tanto será: $\boldsymbol{L=I\omega}$**,** lo que lleva a que: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{\tau}$. Y si el eje de rotación no cambia de posición respecto del cuerpo, el momento de inercia será constante y por propiedades de la operación de derivación, se puede escribir:
$\dfrac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \Rightarrow \quad I\vec{\alpha} = \vec{\tau}$, pues $\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\alpha}$ siendo $\boldsymbol{\alpha}$ la aceleración angular del cuerpo.
La expresión $I\,\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\tau}$ es formalmente igual a la expresión $m\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}$ en la que el papel de la masa lo juega el momento de inercia; el de la aceleración lineal, la aceleración angular y el de la fuerza, el torque.
Analizaremos dos ejemplos.

1) Un cilindro macizo de masa M y radio R tiene arrollada una cuerda ideal sobre su superficie lateral. Uno de los extremos de la cuerda está sobre la superficie y el otro está fijo a un techo (figura 16). El cilindro, vinculado por la cuerda, cae verticalmente y sin deslizar. Se quiere conocer tanto la aceleración del centro de masa como la tensión en la cuerda.

El cilindro gira alrededor de su eje (que contiene al centro de masa y es un eje principal de inercia) y se traslada verticalmente hacia abajo. El sistema de coordenadas del observador inercial se ubica de forma tal que la aceleración lineal del cilindro sea positiva. Las ecuaciones a utilizar, siendo T la tensión en la cuerda serán:

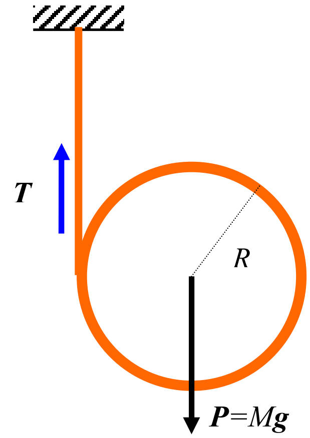


Figura 16

$$P - T = Ma_{CM}$$

$$I_{CM}\,\alpha = \tau = TR \qquad I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$$

$$a_{CM} = R\alpha$$

Se ha quitado el símbolo de vector a las magnitudes vectoriales considerando, en las ecuaciones, su dirección y sentido.

El alumno debe verificar que es correcta la ecuación que vincula a la aceleración angular con el torque.

Dado que el cilindro cae sin deslizar respecto de la cuerda, la aceleración del centro de masa

$a_{CM} = \alpha \wedge r_{CIR-CM}$; donde r es el vector posicion del centro de masa respecto del centro instantaneo de rotacion, que para este problema coincide con el punto donde la soga toca al cilindro en cada instante, [4]

resolviendo el sistema de ecuaciones queda:

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a_{CM}}{R} = TR \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}Ma_{CM}$$

$$Mg - \frac{1}{2}Ma_{CM} = Ma_{CM} \quad \therefore \quad a_{CM} = \frac{2}{3}g, \quad T = \frac{1}{3}Mg$$

Debe observarse que el cuerpo cae con una aceleración menor que la gravitatoria y que hay tensión en la cuerda.

2) El segundo caso es el de un cilindro de masa M y radio R que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal. Supondremos que hay una fuerza $\boldsymbol{F}$ horizontal (conocida) que lo impulsa, aplicada en su centro de masa (en el eje del cilindro, que es eje principal de inercia) como se indica en la figura 17. El cilindro tampoco está totalmente libre en este ejemplo sino que tiene un vínculo, la superficie horizontal, que limita su movimiento.

La fuerza de roce $\boldsymbol{F_r}$ tiene, en este caso el sentido indicado en la figura, para contrarrestar el

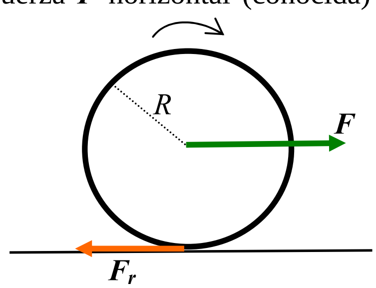


Figura 17

[4] Podría interpretarse el movimiento como una “rodadura” sin resbalar del cilindro sobre la cuerda; esto es: el cilindro cae sin deslizar respecto de la cuerda, la aceleración de cada punto del cilindro se puede interpretar como una superposición de la aceleración del CM más la aceleración tangencial del movimiento de rotación de los puntos del CR respecto del CM (alrededor del CM).

deslizamiento que tiende a provocar la fuerza ***F*** sobre el cilindro. A su vez, es la fuerza que imprime un torque respecto del eje del cilindro y es la responsable de la rotación de éste. Esta fuerza de roce puede ser caracterizada como de tipo estático. Así como las fuerzas de roce estáticas por deslizamiento ya estudiadas varían desde cero hasta un valor máximo, lo mismo ocurre con las que se manifiestan en los problemas de rodadura sin deslizamiento.
En el caso del cilindro que rueda sin deslizar, el módulo de la fuerza de roce y su sentido deben ser determinados a partir de las condiciones concretas del problema en estudio. Determinaremos la aceleración y la fuerza de roce para el cilindro de la figura 17.
Las ecuaciones serán:

$$F - F_r = Ma, \quad I\alpha = RF_r, \quad a = R\alpha$$

$$F_r = \frac{I\alpha}{R} = \frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R}\frac{1}{R} = \frac{1}{2}Ma \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{2}Ma$$

$$a = \frac{2}{3}\frac{F}{M} \quad F_r = \frac{1}{3}F$$

Los resultados son similares a los del caso anterior, del cilindro que cae. En ese caso, el papel de ***F*** lo hace el peso y el de la fuerza de roce, la tensión en la cuerda.

Energía

Supongamos un cuerpo rígido de forma cualquiera que tiene un movimiento de rotación pura alrededor de un eje fijo, caso similar al descrito en la figura 11. La contribución a la energía cinética de un elemento de volumen dV que contiene un dm, ubicado mediante el vector posición ***r*** será:

$$dE_C = \frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}dm\omega^2R^2 \quad \therefore$$

$$E_C = \int dE_C = \frac{1}{2}\omega^2\int_V \rho R^2 dV = \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde R es el radio de la circunferencia que describe en torno al eje el elemento de volumen y la integral de volumen es el momento de inercia del cuerpo que gira.
Si el cuerpo rígido tiene un movimiento de rototraslación, su energía cinética será, de acuerdo a lo visto para un sistema de partículas: $E_C = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + E_{C,CM}$ en la cual, el primer término del segundo miembro es la energía cinética de traslación del cuerpo de masa M y $E_{C,CM}$ es la energía cinética de las partículas que componen al cuerpo respecto de su centro de masa. Por la condición de rigidez, la última parte de la energía cinética es la energía cinética de rotación alrededor de un eje que pasa por su centro de masa, ya que las partículas del cuerpo no pueden modificar su distancia relativa entre ellas. Por lo tanto, la energía cinética del cuerpo rígido será: $E_C = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$. La misma condición de rigidez impone que la energía potencial interna del sistema de partículas que conforma al sólido rígido sea constante. Al igual que para un sistema de partículas tendremos que el trabajo de las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo provocará un incremento de la energía cinética, $\Delta E_C = W_{ext}$ y, si esas fuerzas externas son conservativas, entonces $\Delta E_C = -\Delta E_P^{ext}$. Esto implica que, si f indica el estado final e i el inicial:

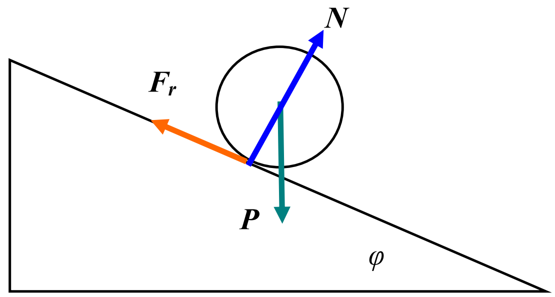
$$E_{C,f} - E_{C,i} = E_{P,i} - E_{P,f} \quad \Rightarrow \quad E_{C,f} + E_{P,f} = E_{C,i} + E_{P,i} = E$$

$$E = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 + E_P^{ext} = constante$$

Si hay fuerzas externas no conservativas que realizan trabajo será, al igual que para un sistema de partículas: $\Delta E = W_{NC}^{ext}$.

Analicemos el caso de un cuerpo de sección circular de radio *R*, masa *M*, que cae rodando sin deslizar por un plano inclinado (figura 18).

De las fuerzas que actúan, la normal al plano es una fuerza no conservativa que no realiza trabajo; el peso es una fuerza conservativa externa que realiza un trabajo igual a la variación de energía potencial gravitatoria y la fuerza de rozamiento es una fuerza externa no conservativa que no realiza trabajo pues el punto de aplicación de esta fuerza es el CIR que, si bien es diferente en cada instante durante el movimiento, no se desplaza pues su velocidad instantánea es cero.



Es decir, la única fuerza que realiza trabajo mecánico es el peso, que es conservativa. Por lo tanto se debe cumplir que la energía mecánica se conserve. Suponiendo que y_0 es la altura inicial (respecto del pie del plano inclinado) del centro de masa del cuerpo (altura a la que su velocidad inicial es cero) e y es la altura del centro de masa luego de transcurrido un cierto tiempo t (altura a la que éste tendrá una cierta velocidad $\mathbf{v}$), será: $E = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgy = Mgy_0$. Dado que el momento de inercia respecto del eje del cuerpo rígido se puede escribir como $I = MK^2$ siendo K el radio de giro, y que la velocidad angular está relacionada con la velocidad del centro de masa por $\omega = \frac{v}{R}$, operando en la ecuación de la energía se obtiene: $v^2 = \frac{2(y_0 - y)}{1 + \frac{K^2}{R^2}} g$. Recordando la expresión de la cinemática $v^2 = v_0^2 + 2ad$ en la que d es la distancia recorrida, se observa que, en nuestro caso, $y_0 - y = d.sen\varphi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{sen\varphi}{1 + \frac{K^2}{R^2}} g$

Resolviendo el mismo problema a partir de las ecuaciones dinámicas para el cuerpo rígido, y recordando que el momento de inercia respecto de un eje que pase por su centro de masa se puede escribir como $I=MK^2$, tendremos:

$$Psen\varphi - F_r = Ma, \quad MK^2\alpha = F_r R, \quad a = \alpha R$$

$$\therefore \quad F_r = M\frac{K^2}{R^2}a, \quad Mgsen\varphi - M\frac{K^2}{R^2}a = Ma$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{gsen\varphi}{1 + \frac{K^2}{R^2}}$$

Como no podía ser de otra forma, la expresión de la aceleración es la misma.

Esta expresión de la aceleración indica que no todos los cuerpos redondos (cilindro macizo, aro, esfera) caen a lo largo del plano con la misma aceleración, sino que su valor depende del valor de *K,* que es diferente para cada cuerpo.

Bibliografía

1.- Marcelo Alonso, Edward J. Finn "Física", vol. I: "Mecánica", Addison-Wesley Iberoamericana S.A. (1988).

2.- Juan G. Roederer "Mecáncia elemental" Eudeba (1966)

3.- Richard Feynman "Física", vol. I: "Mecánica, radiación y calor", Addison-Wesley (1987)