Problemas adicionales para guía de osciladores

Problema 1

Considere una cadena de $N+1$ partículas de masa m, unidas por N resortes idénticos, de constante elástica k y longitud natural $l_0 = 0$ (las partículas sólo pueden moverse en la dirección vertical, a lo largo del eje z, y sus coordenadas son z_0, z_1, ..., z_N). Inicialmente, se sostiene la primer partícula, ubicándola en la posición $z_0(0) = 0$. y se deja que las demás cuelguen bajo la acción de la gravedad.

i Escriba las ecuaciones de Newton para todas las partículas indicando cuales son las fuerzas que actúan sobre cada una de ellas.

ii Calcule el estiramiento de cada resorte cuando la cadena está en equilibrio. Calcule la longitud total de la cadena en esa situación.

iii En el instante $t = 0$, cuando todas las partículas están quietas, se suelta la primera de ellas, cuya coordenada es z_0 y la cadena comienza a desplazarse. Discuta cualitativamente cómo será la caida de la cadena. Para eso calcule:

   a La aceleración inicial de todas las masas (en el instante $t = 0^+$, inmediatamente posterior a que se suelte la primer partícula).

   b las ecuaciones de Newton para calcular todas las derivadas de las funciones $z_j(t)$ evaluadas en el instante $t = 0^+$. A partir de esa información discuta cualitativamente cómo será la caida de cada partícula.

Compare sus conclusiones con lo observado en un experimento con un sistema "similar" en {https://www.youtube.com/watch?v=rCw5JXD18y4}. Piense cuales son las diferencias entre la cadena analizada y el sistema que aparece en el experimento mencionado.

Problema 2

Considere una partícula de masa m que se mueve sobre una recta (que coincide con el eje x). La partícula se mueve en un medio viscoso que ejerce una fuerza de la forma $\vec{F} = -m\,\gamma\dot{x}\vec{e}_x$ y está unida a un resorte ideal de constante elástica k y longitud libre $l_0 = 0$, cuyo otro extremo está fijo en la posición $x = 0$. En el instante inicial $t = 0$ se estira el resorte hasta una posición $x_0 > 0$ y se lo suelta con velocidad $\dot{x}_0$. Para los casos de movimiento sub-amortiguado, sobre-amortiguado y de amortiguamiento crítico, analice:

i Cuál es el mínimo valor de la velocidad inicial $\dot{x}_0$ (en módulo) para la cual la partícula cruza del otro lado de la posición de equilibrio (o sea, llegua a la región $x \leq 0$).

ii Cuántas veces pasa la partícula por el punto de equilibrio $x = 0$. Para los casos sobre-amortiguado y crítico, estime el tiempo en el cual la partícula cruza por $x = 0$. En el caso sub-amortiguado, diga cuanto tiempo transcurre entre dos cruces sucesivos (si es que estos existen).