

APENDICES.

A. ALGEBRA.

Reglas para sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, donde a , b , c y d son cuatro números:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$$

Para multiplicar y dividir potencias, se aplican las siguientes reglas, donde n y m son números y x alguna variable:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Una potencia fraccionaria corresponde a una raíz:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Cualquier cantidad x^n que es elevada a una potencia m , es:

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Algunas fórmulas útiles para factorizar una ecuación son:

$$\text{Cuadrado de un binomio: } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\text{Diferencia de cuadrados: } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

La forma general de una ecuación cuadrática es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x es la cantidad desconocida y a , b y c son factores numéricos conocidos como coeficientes de la ecuación; tiene dos soluciones dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las soluciones serán reales.

Logaritmos. Si la variable x se expresa como potencia de una cantidad a , de la forma

$$x = a^y$$

el número a se llama base. El logaritmo de x con respecto a la base a es igual al exponente al cual se debe elevar la base, que se escribe como:

$$y = \log_a x$$

En la práctica, las dos bases más usadas son la base 10, llamada logaritmo común, y la base $e = 2.718\dots$, llamada logaritmo natural. Para el logaritmo común y natural se utiliza respectivamente las notaciones:

$$y = \log x \Leftrightarrow x = 10^y$$

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y$$

Algunas propiedades de los logaritmos son las siguientes:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log(x/y) = \log x - \log y$$

$$\log(x^n) = n \log x$$

$$\log 1 = \ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^a = a$$

B. GEOMETRÍA

La distancia d entre dos puntos cuyas coordenadas son (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para calcular el ángulo en radianes, se sabe que la longitud del arco s (Fig. B.1) es proporcional al radio r , para el valor de θ medido en radianes.

$$s = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{s}{r}$$

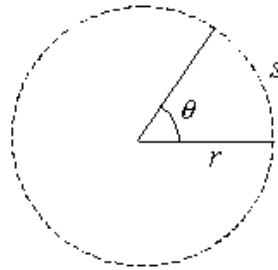


Figura B.1

La ecuación de una línea recta (Fig. B.2) está dada por $y = mx + b$, donde b es la intersección con y y m la pendiente de la recta.

La ecuación de un círculo de radio R centrado en el origen es: $x^2 + y^2 = R^2$

La ecuación de una elipse con el origen como su centro (Fig. B.3) es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, donde a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor.

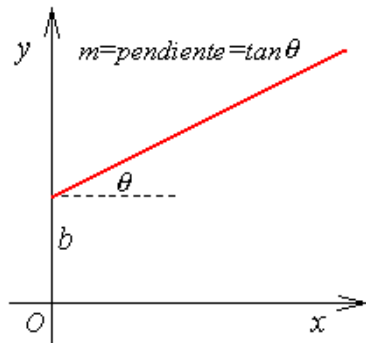


Figura B.2

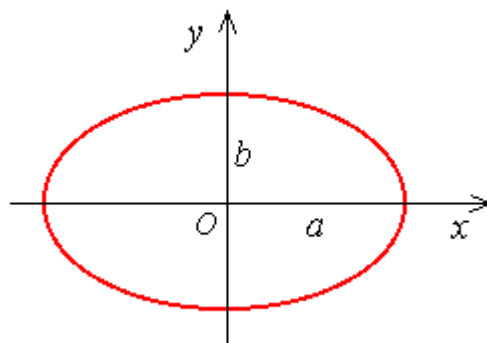


Figura B.3

La ecuación de la parábola cuyo vértice está en $y = b$ (Fig. B.4) es: $y = ax^2 + b$.

La ecuación de una hipérbola rectangular (Fig. B.5) es: $xy = cte$

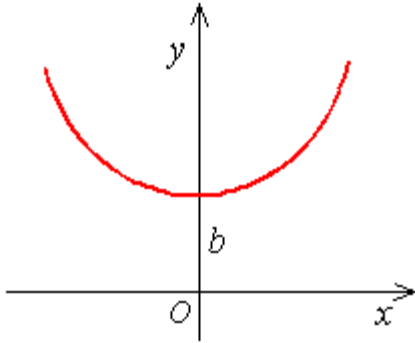


Figura B.4

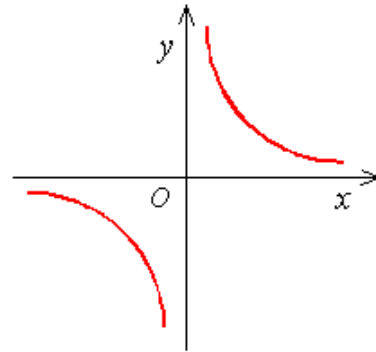


Figura B.5

Áreas y volúmenes.

Forma	Área	Volumen
Rectángulo lados a y b	$a \times b$	
Circunferencia de radio r	πr^2	
Triángulo base b , altura h	$\frac{1}{2}bh$	
Caja rectangular lados a, b, c	$2(ab + bc + ca)$	$a \times b \times c$
Cilindro largo h , radio r	$2(\pi r^2 + \pi rh)$	$\pi r^2 h$
Esfera radio r	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

C. TRIGONOMETRÍA.

La parte de las matemáticas que se basa en las propiedades especiales de los triángulos rectángulos se llama trigonometría. Por definición, un triángulo recto es el que contiene un ángulo de 90° . Considérese el triángulo recto de la figura C.1, donde el lado a es opuesto al ángulo θ , el lado b es adjunto al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas para tales triángulos son las funciones seno (sen), coseno (cos) y tangente (tan). En términos del ángulo θ , estas funciones se definen por:

$$\text{sen}\theta \equiv \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cos}\theta \equiv \frac{\text{lado adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tan}\theta \equiv \frac{\text{lado opuesto a } \theta}{\text{lado adyacente a } \theta} = \frac{a}{b}$$

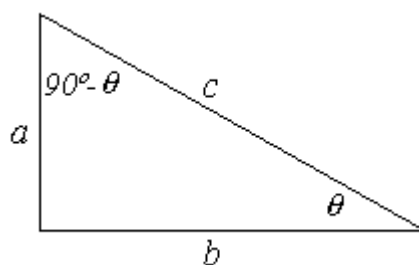


Figura C.1

El teorema de Pitágoras da la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

De las definiciones anteriores y el teorema de Pitágoras, se sigue que:

$$\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1 \quad \text{tan}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$$

Las funciones cotangente, secante y cosecante están definidas directamente de un triángulo recto mostrado en la figura C.1 como:

$$\text{cot}\theta \equiv \frac{1}{\text{tan}\theta} \quad \text{sec}\theta \equiv \frac{1}{\text{cos}\theta} \quad \text{csc}\theta \equiv \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

Algunas de las propiedades de las funciones trigonométricas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta &= \cos(90^\circ - \theta) & \operatorname{sen}(-\theta) &= -\operatorname{sen} \theta \\
 \cos \theta &= \operatorname{sen}(90^\circ - \theta), & \cos(-\theta) &= \cos \theta \\
 \cot \theta &= \tan(90^\circ - \theta) & \tan(-\theta) &= -\tan \theta
 \end{aligned}$$

Las siguientes relaciones se aplican a cualquier triángulo, como el de la figura C.2:

$$a + \beta + \gamma = 180^\circ$$

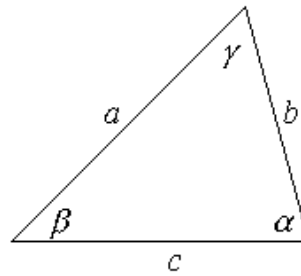


Figura C.2

$$\text{Ley de los cosenos} \quad \left\{ \begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \end{aligned} \right.$$

$$\text{Ley de los senos} \quad \left\{ \frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \right.$$

La tabla C.1 lista algunas identidades trigonométricas útiles.

Tabla C.1 Algunas identidades trigonométricas.

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$	$\operatorname{cos} 2\theta = \operatorname{cos}^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$
$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$	$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cos} \theta}{1 + \operatorname{cos} \theta}}$
$\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \operatorname{cos} \theta)$	$\operatorname{cos}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cos} \theta)$
$\operatorname{sec}^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$	$\operatorname{csc}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$
$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$	
$\operatorname{cos}(A \pm B) = \operatorname{cos} A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$	
$\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A \pm B) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A \mp B)$	
$\operatorname{cos} A + \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A - B)$	
$\operatorname{cos} A - \operatorname{cos} B = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(B - A)$	

D. DERIVADAS E INTEGRALES.

Tabla D.1 Derivadas de algunas funciones.

Nota: Las letras a y n son constantes.

$\frac{d}{dx}(a) = 0$	$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a \sec^2 ax$
$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\cot ax) = -a \csc^2 ax$
$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x$
$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a \cos ax$	$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\cot x \csc x$
$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a \operatorname{sen} ax$	$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{a}{x}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arccos} \frac{x}{a} = \frac{\mp 1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
$\frac{d}{dx} \operatorname{arctan} \frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$	$\frac{d}{dx} \operatorname{arc cot} \frac{x}{a} = \frac{-a}{a^2 + x^2}$
$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{1}{v} \frac{du}{dx} - \frac{u}{v^2} \frac{dv}{dx}$

Tabla D.2 Algunas integrales indefinidas.

Nota: Las letras a , b , c y n son constantes.

Una constante arbitraria se debe sumar a cada una de estas integrales.

$\int dx = x$	$\int x \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3} (x^2 \pm a^2)^{3/2}$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$
$\int \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{x}{a} = -\operatorname{arccos} \frac{x}{a}$
$\int -\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctan} \frac{x}{a}$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x}$	$\int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$

$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$	$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{sen} ax$
$\int x e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^2} (ax - 1)$	$\int \tan ax dx = -\frac{1}{a} \ln(\cos ax) = \frac{1}{a} \ln(\sec ax)$
$\int a^x dx = \frac{a}{\log a}$	$\int \cot ax dx = \frac{1}{a} \ln(\operatorname{sen} ax)$
$\int \ln ax dx = x \ln ax - x$	$\int \sec ax dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln x$	$\int \csc ax dx = \frac{1}{a} \ln(\csc ax - \cot ax)$
$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln(a+bx)$	$\int \operatorname{sen}^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a+be^{cx}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ac} \ln(a+be^{cx})$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$
$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}, a^2-x^2 > 0$	$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\frac{1}{a} \cot ax$
$\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln(a^2 \pm x^2)$	$\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \tan ax$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$	$\int \tan^2 ax dx = \frac{1}{a} \tan ax - x$
$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$	$\int \cot^2 ax dx = -\frac{1}{a} \cot ax - x$
$\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$	$\int \arcsin ax dx = x \arcsin ax + \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$
$\int x\sqrt{a^2-x^2} dx = -\frac{1}{3} (a^2-x^2)^{3/2}$	$\int \arccos ax dx = x \arccos ax - \frac{\sqrt{1-a^2x^2}}{a}$

E. DATOS COMUNES EN EL SISTEMA SOLAR Y TERRESTRE.

Tabla E1. Datos del sistema solar.

Cuerpo	Masa (kg)	Radio prom. (m)	Periodo (s)	Distancia al Sol (m)
Mercurio	3.18×10^{23}	2.43×10^6	7.60×10^6	5.79×10^{10}
Venus	4.88×10^{24}	6.06×10^6	1.94×10^7	1.08×10^{11}
Tierra	5.98×10^{24}	6.37×10^6	3.156×10^7	1.496×10^{11}
Marte	6.42×10^{23}	3.37×10^6	5.94×10^7	2.28×10^{11}
Júpiter	1.90×10^{27}	6.99×10^7	3.74×10^8	7.78×10^{11}
Saturno	5.68×10^{26}	5.85×10^7	9.35×10^8	1.43×10^{12}
Urano	8.68×10^{25}	2.33×10^7	2.64×10^9	2.87×10^{12}
Neptuno	1.03×10^{26}	2.21×10^7	5.22×10^9	4.50×10^{12}
Plutón	$\approx 1.4 \times 10^{22}$	$\approx 1.5 \times 10^6$	7.82×10^9	5.91×10^{12}
Luna	7.36×10^{22}	1.74×10^6		
Sol	1.99×10^{30}	6.96×10^8		

Tabla E2. Valores de los datos físicos comúnmente utilizados.

Aceleración debida a la gravedad	$\approx 9.80 \text{ m/s}^2$
Rapidez de la luz	$\approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Presión atmosférica estándar	$\approx 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$
Densidad del aire (20°C y 1 atm)	$\approx 1.25 \text{ kg/m}^3$
Densidad del agua (20°C y 1atm)	$1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$
Rapidez angular de la Tierra	$7.27 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
Inclinación eje terrestre	23.5°
Distancia promedio Tierra-Luna	$3.84 \times 10^8 \text{ m}$
Distancia promedio Tierra-Sol	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
Radio promedio de la Tierra	$6.37 \times 10^6 \text{ m}$
Masa de la Tierra	$5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masa de la Luna	$7.36 \times 10^{22} \text{ kg}$
Masa del Sol	$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

F. FACTORES DE CONVERSIÓN DE UNIDADES DE MEDIDA.

Tabla F1. Longitud.

	m	Cm	km	pulg	pie	mi
1 metro	1	10^2	10^{-3}	39.37	3.281	6.214×10^{-4}
1 centímetro	10^{-2}	1	10^{-5}	0.3937	3.281×10^{-2}	6.214×10^{-6}
1 kilómetro	10^3	10^5	1	3.937×10^4	3.281×10^3	0.6214
1 pulgada	2.54×10^{-2}	2.54	2.54×10^{-5}	1	8.333×10^{-2}	1.578×10^{-5}
1 pie	0.3048	30.48	3.048×10^{-4}	12	1	1.894×10^{-4}
1 milla	1609	1.609×10^5	1.609	6.336×10^4	5280	1

Tabla F2. Masa.

	Kg	g	slug	u
1 kilogramo	1	10^3	6.852×10^{-2}	6.024×10^{26}
1 gramo	10^{-3}	1	6.852×10^{-5}	6.024×10^{23}
1 slug (lb/g)	14.59	1.459×10^4	1	8.789×10^{27}
1 unidad de masa atómica	1.66×10^{-27}	1.66×10^{-24}	1.137×10^{-28}	1

Tabla F3. Tiempo.

	s	Min	h	Día	año
1 segundo	1	1.667×10^{-2}	2.778×10^{-4}	1.157×10^{-5}	3.169×10^{-8}
1 minuto	60	1	1.667×10^{-2}	6.994×10^{-4}	1.901×10^{-6}
1 hora	3600	60	1	4.167×10^{-2}	1.141×10^{-4}
1 día	8.64×10^4	1440	24	1	2.738×10^{-3}
1 año	3.156×10^7	5.259×10^5	8.766×10^3	365.2	1

Tabla F4. Fuerza.

	N	dina	lb
1 Newton	1	10^5	0.2248
1 dina	10^{-5}	1	2.248×10^{-6}
1 libra	4.448	4.448×10^5	1

Tabla F5. Trabajo, energía y calor

	J	erg	pie · Ib	eV	cal	Btu	kWh
1 joule	1	10^7	0.7376	6.242×10^{18}	0.2389	9.481×10^{-4}	2.778×10^{-7}
1 erg	10^{-7}	1	7.376×10^{-8}	6.242×10^{11}	2.389×10^{-8}	9.481×10^{-11}	2.778×10^{-14}
1 pie · Ib	1.356	1.356×10^7	1	8.464×10^{18}	0.3239	1.285×10^{-3}	3.766×10^{-7}
1 eV	1.6×10^{-19}	1.602×10^{-12}	1.182×10^{-19}	1	3.827×10^{-20}	1.519×10^{-22}	4.450×10^{-26}
1 cal	4.186	4.186×10^7	3.087	2.613×10^{19}	1	3.968×10^{-3}	1.163×10^{-6}
1 Btu	1.06×10^3	1.055×10^{10}	7.779×10^2	6.585×10^{21}	2.520×10^2	1	2.930×10^{-4}
1 kWh	3.6×10^6	3.6×10^{13}	2.655×10^6	2.247×10^{25}	8.601×10^5	3413×10^2	1

Tabla F6. Presión.

	Pa	dina/cm²	Atm	cm Hg	Ib/pulg²	Ib/pie²
1 pascal	1	10	9.869×10^{-6}	7.501×10^{-4}	1.45×10^{-4}	2.089×10^{-2}
1 dina/centímetro²	10^{-1}	1	9.869×10^{-7}	7.501×10^{-5}	1.45×10^{-5}	2.089×10^{-3}
1 atmósfera	1.013×10^5	1.013×10^6	1	76	14.7	2.116×10^3
1 cm de mercurio*	1.333×10^3	1.333×10^4	1.316×10^{-2}	1	0.1943	27.85
1 libra/pulgada²	6.895×10^3	6.895×10^4	6.805×10^{-2}	5.171	1	144
1 libra/pie²	47.88	4.788×10^2	4.725×10^{-4}	3.591×10^{-2}	6.944×10^{-3}	1

* A 0°C y en un lugar donde la aceleración debida a la gravedad sea su valor estándar, 9.80665 m/s^2 .

G. LETRAS GRIEGAS.

Tabla G1. Alfabeto Griego - Αλφαβητο Γριεγο.

Alfa	α Α	Nu	ν Ν
Beta	β Β	Omicron	ο Ο
Gamma	γ Γ	Pi	π Π
Delta	δ Δ	Theta	θ ϑ Θ
Epsilon	ε Ε	Rho	ρ Ρ
Phi (Fi)	φ ϕ Φ	Sigma	σ Σ
Eta	η Η	Tau	τ Τ
Iota	ι Ι	Upsilon	υ Υ
Chi (Ji)	χ Χ	Omega	ω Ω
Kappa	κ Κ	Xi	ξ Ξ
Lambda	λ Λ	Psi	ψ Ψ
Mu	μ Μ	Zeta	ζ Ζ