Tensión de una soga alrededor de una polea fija

V 2.0

morenog@df.uba.ar

Consideremos el problema de una soga inextensible y sin masa que desliza sobre una polea fija (o equivalentemente un poste) con rozamiento dinámico μ, como se muestra en la figura 1. La pregunta que nos hacemos es cual es la tensión de la cuerda si ésta se encuentra enrollada un ángulo Θ alrededor de la polea. O sea, con $T(0)$ como dato, queremos determinar cual es la función $T(\Theta)$ de la figura 1 .

Para resolver este problema aplicaremos las leyes de la dinámica a cada elemento de cuerda.

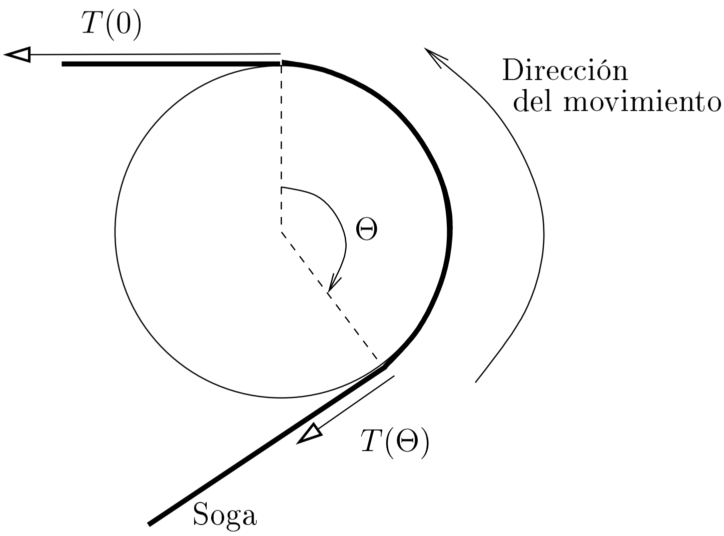

Figure 1: Esquema del problema que buscamos resolver

Esto es, idealizaremos la situación pensando que la cuerda esta compuesta de una gran cantidad de pedacitos de tamaño finito en los cuales podemos definir las variables que entran en las ecuaciones de Newton. Si logramos hacer esto y luego tomar el límite cuando el tamaño de los elementos tiende a cero tendremos una descripción (continua) de la soga. Entonces visualizamos el problema como se muestra en la figura 2. Notar que allí tomamos un elemento de tamaño $\delta\theta$ e incluímos el efecto de la tensión en los extremos de este pedacito de cuerda. Además tenemos el efecto de la normal (que suponemos podemos aplicar en promedio en el centro) y la fuerza de rozamiento. Notar que la dificultad que se presenta para escribir las ecuaciones de Newton es que, como la soga sigue un tramo de circunferencia, los versores polares (que son los mejor adaptados para un problema con simetría circular) están rotados unos respecto de otros.

Para poder lidiar con este inconveniente vamos a demostrar una propiedad que necesitaremos en las cuentas, que es como son los versores polares al rotarlos un poco. Formalmente estudiamos esto a partir de los desarrollos de Taylor de los versores $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ centrados en θ y

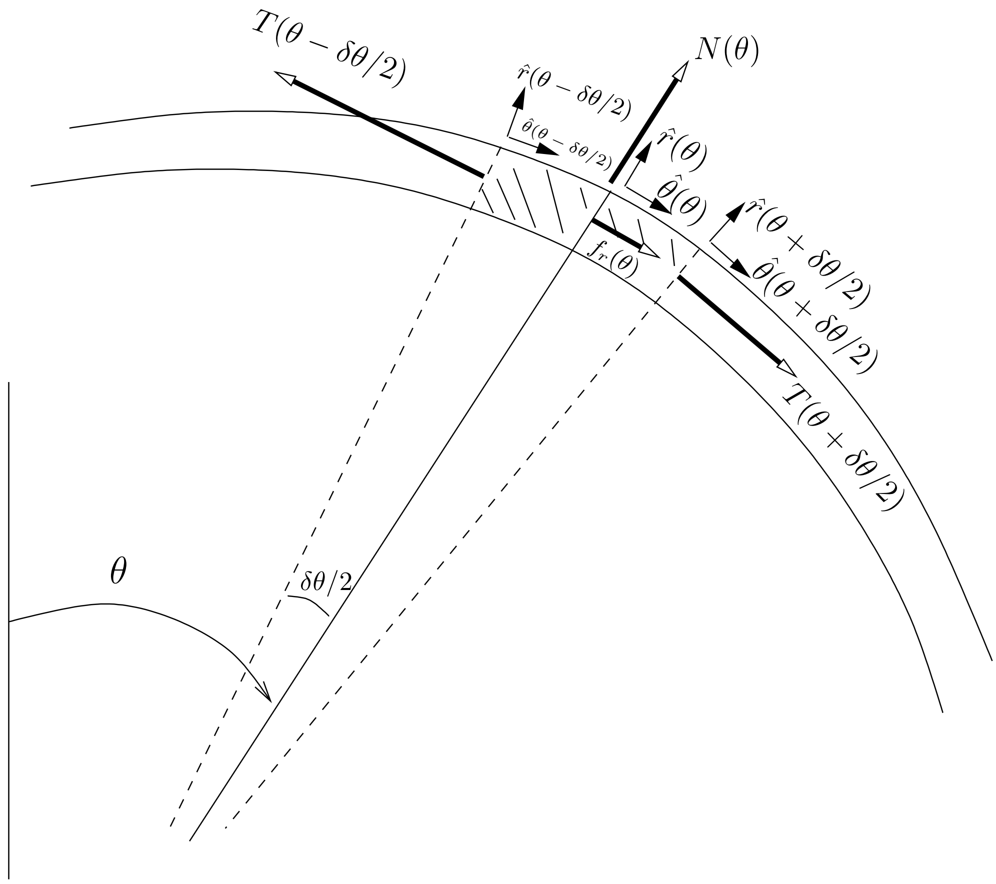

Figure 2: Detalle de la soga alrededor del poste. La cuerda desliza en sentido antihorario

con apartamiento $\delta\theta$:

$$\hat{r}(\theta + \delta\theta) = \hat{r}(\theta) + \delta\theta \frac{d\hat{r}(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2}(\delta\theta)^2 \frac{d^2\hat{r}(\theta)}{d\theta^2} + \dots \tag{1}$$

y

$$\hat{\theta}(\theta + \delta\theta) = \hat{\theta}(\theta) + \delta\theta \frac{d\hat{\theta}(\theta)}{d\theta} + \frac{1}{2}(\delta\theta)^2 \frac{d^2\hat{\theta}(\theta)}{d\theta^2} + \dots \tag{2}$$

Ahora bien, usando las proyecciones de $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ sobre ejes cartesianos pueden demostrar sin mucha dificultad que:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{r}(\theta)}{d\theta} = \hat{\theta}(\theta) \\ \frac{d^2\hat{r}(\theta)}{d\theta^2} = \frac{d\hat{\theta}(\theta)}{d\theta} = -\hat{r}(\theta) \\ etc, \end{cases}$$

y también

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\theta}(\theta)}{d\theta} = -\hat{r}(\theta) \\ \frac{d^2\hat{\theta}(\theta)}{d\theta^2} = \frac{d\hat{(}-r(\theta))}{d\theta} = -\hat{\theta}(\theta) \\ etc. \end{cases}$$

Entonces tenemos los siguientes desarrollos:

$$\begin{cases} \hat{\theta}(\theta+\delta\theta) = \hat{\theta}(\theta) - \delta\theta\,\hat{r}(\theta) - \frac{1}{2}(\delta\theta)^2\,\hat{\theta}(\theta) + \frac{1}{6}(\delta\theta)^3\,\hat{r}(\theta)\,+\dots \\ \hat{r}(\theta+\delta\theta) = \hat{r}(\theta) + \delta\theta\,\hat{\theta}(\theta) - \frac{1}{2}(\delta\theta)^2\,\hat{r}(\theta) - \frac{1}{6}(\delta\theta)^3\,\hat{\theta}(\theta)\,+\dots \end{cases}$$

Esto nos dice como se modifican los versores al correrlos un pequeño ángulo $\delta\theta$.
Volvamos ahora al problema de la figura 2. Dado que estamos suponiendo que la cuerda no tiene masa, la suma de todas las fuerzas sobre el elemento de cuerda que estamos considerando tiene que ser nulo. Esto es:

$$-T(\theta-\frac{\delta\theta}{2})\,\hat{\theta}(\theta-\frac{\delta\theta}{2}) + T(\theta+\frac{\delta\theta}{2})\,\hat{\theta}(\theta+\frac{\delta\theta}{2}) + N(\theta)\,\hat{r}(\theta) + \underbrace{\mu N(\theta)}_{f_r(\theta)}\,\hat{\theta}(\theta) = 0 \tag{3}$$

Notar que usamos la relación $f_r(\theta) = \mu N(\theta)$ (la dirección de f_r tiene que ser consistente con el sentido de giro). Entonces, expandiendo los versores con los desarrollos de Taylor que vimos antes obtenemos:

$$-T(\theta-\frac{\delta\theta}{2})\,[\hat{\theta}(\theta)+\frac{\delta\theta}{2}\hat{r}(\theta))+\dots]+T(\theta+\frac{\delta\theta}{2})\,[\hat{\theta}(\theta)-\frac{\delta\theta}{2}\hat{r}(\theta))+\dots]+N(\theta)\,\hat{r}(\theta)+\underbrace{\mu N(\theta)}_{f_r(\theta)}\,\hat{\theta}(\theta) = 0 \tag{4}$$

Por lo tanto, si escribimos ahora la proyección de esta ecuación sobre $\hat{\theta}(\theta)$ y $\hat{r}(\theta)$ obtenemos:

$$\begin{cases} -T(\theta-\frac{\delta\theta}{2}) + T(\theta+\frac{\delta\theta}{2}) + \mu N(\theta) + \mathcal{O}(\delta\theta^2) = 0 \\ -T(\theta-\frac{\delta\theta}{2})\,\frac{\delta\theta}{2} - T(\theta+\frac{\delta\theta}{2})\,\frac{\delta\theta}{2} + N(\theta) + \mathcal{O}(\delta\theta^3) = 0 \end{cases}$$

Donde por $\mathcal{O}(\delta\theta^k)$ queremos decir que el término que sobra tiene potencias $(\delta\theta)^k$ o superiores. Esta notación es conveniente ya que, como veremos a continuación, todas los términos que contienen correcciones de la forma $(\delta\theta)^k$ donde k es grande serán *irrelevantes*. Para continuar, notemos que de las ecuaciones anteriores podemos eliminar $N(\theta)$:

$$-T(\theta-\frac{\delta\theta}{2}) + T(\theta+\frac{\delta\theta}{2}) + \mu\,[T(\theta-\frac{\delta\theta}{2}) + T(\theta+\frac{\delta\theta}{2})]\,\frac{\delta\theta}{2} + \mathcal{O}(\delta\theta^2) = 0, \tag{5}$$

por lo tanto

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{T(\theta+\frac{\delta\theta}{2}) - T(\theta-\frac{\delta\theta}{2})}{\delta\theta} + \mu\lim_{\delta\theta\to 0}\frac{T(\theta-\frac{\delta\theta}{2}) + T(\theta+\frac{\delta\theta}{2})}{2} + \lim_{\delta\theta\to 0}\mathcal{O}(\delta\theta) = 0. \tag{6}$$

Pero notar que justamente:

$$\lim_{\delta\theta\to 0}\mathcal{O}(\delta\theta) = 0,$$

por lo tanto tenemos que:

$$\boxed{\frac{dT(\theta)}{d\theta} + \mu T(\theta) = 0} \tag{7}$$

Esta es la ecuación diferencial que verifica la tensión de la cuerda alrededor de la polea o poste. Podemos integrarla con las técnicas usuales:

$$\frac{1}{T(\theta)}\frac{dT(\theta)}{d\theta} = -\mu \tag{8}$$

o sea que, integrando entre 0 y Θ, tenemos:

$$\int_0^{\Theta} \frac{1}{T(\theta)} \frac{dT(\theta)}{d\theta} d\theta = -\mu \int_0^{\Theta} d\theta \tag{9}$$

lo que nos da

$$Ln\,(T(\theta))\,|_0^{\Theta} = -\mu\Theta \tag{10}$$

Finalmente:

$$T(\Theta) = T(0)e^{-\mu\Theta} \tag{11}$$

Esto muestra que a medida que enrollamos la cuerda la tensión decae exponencialmente, es decir que en caso de existir rozamiento el mecanismo es muy eficiente para atenuar la fuerza. Por ejemplo si asumimos $\mu = 0,3$ y $T(0) = 100\,kg\,g$, con dos vueltas al poste solo tenemos que hacer $2,3\,kg\,g$ de fuerza (notar que este mecanismo aparece muy seguido!, ejemplo para amarrar una vaca).
Volviendo a nuestro problema original, vemos que el caso particular en que $\mu = 0$ nos da trivialmente que la tensión a todo ángulo es la misma, como queríamos demostrar.