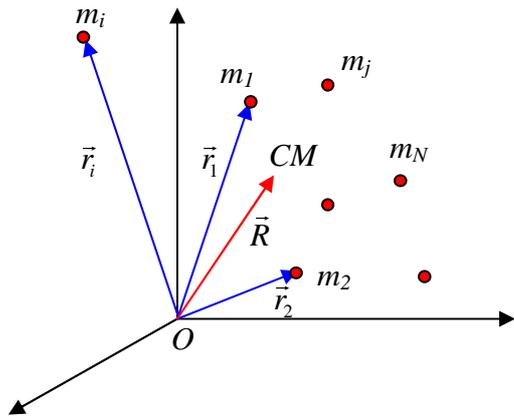


## 7. TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

En los capítulos anteriores estudiamos lo que denominamos *primeras integrales de movimiento*, y se vio que, bajo ciertas condiciones, éstas se comportan como *constantes de movimiento*, es decir, magnitudes físicas que se mantienen constantes a lo largo de todo el movimiento. Estas tres magnitudes son el impulso lineal  $\vec{p}$ <sup>1</sup>, el impulso angular  $\vec{L}$ <sup>2</sup> y la energía mecánica  $H$ <sup>3</sup>. Establecer las condiciones bajo las cuales estas magnitudes permanecen constantes es lo que se denomina *teoremas de conservación*. Como hemos mencionado con anterioridad y veremos en este capítulo, la presencia de una constante de movimiento implica que el sistema bajo estudio posee una simetría asociada. Y, equivalentemente, si el sistema posee una determinada simetría, podremos asegurar *a priori* que está caracterizado por la constante de movimiento relacionada con dicha simetría.

Repasemos los teoremas de conservación en el caso de un *sistema de partículas*, que hemos visto en los tres capítulos anteriores:



Sea un sistema de N partículas, sobre las que actúan:

- Fuerzas externas al sistema, aplicadas sobre cada una de las partículas:  $\vec{F}_i^{ext}$ ;
- Fuerzas internas entre las partículas:  $\vec{f}_{ij}$   $\equiv$  fuerza sobre la partícula  $i$  debida a la partícula  $j$ .

Y cuyo centro de masa (CM) se encuentra en la posición:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^N m_i = M \equiv \text{masa total del sistema}$$

<sup>1</sup> También llamado *cantidad de movimiento* o *ímpetu*.

<sup>2</sup> También recibe diferentes denominaciones: *momento angular*, *momento de la cantidad de movimiento*, *momento del impulso lineal*.

<sup>3</sup> Debe entenderse que, si bien estas magnitudes son las más usuales, no agotan de ninguna manera las posibles constantes de movimiento.

• **Impulso lineal  $\vec{p}$  del sistema**

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = M \vec{v}_{CM} \quad (7.1)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = M \vec{a}_{CM} \quad (7.2)$$

$$\therefore \vec{p} = ct\vec{e} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \vec{0} \quad (7.3)$$

Recordemos:

- El CM se comporta como una única partícula de masa  $M$  e impulso lineal  $\vec{p}$  (ec.(7.1)), y como si todas las fuerzas externas estuviesen aplicadas sobre él (ec.(7.2)).
- Las fuerzas internas, si bien afectan el movimiento de cada partícula, no modifican el impulso lineal total del sistema (se anulan de a pares) y, por lo tanto, tampoco el movimiento del CM.
- El teorema de conservación (7.3) puede escribirse en componentes:

$$p_\alpha = cte \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N F_{i\alpha}^{ext} = 0 \quad \alpha = x, y, z$$

• **Impulso angular  $\vec{L}_O$  del sistema respecto del centro de momentos (cm)  $O$**

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^N \vec{L}_{Oi} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad (7.4)$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_{Oi} - \vec{v}_O \times \vec{p} \quad (7.5)$$

donde  $\vec{v}_O$  es la velocidad del centro de momentos  $O$  respecto del sistema de referencia, y  $\vec{N}_{Oi} = \vec{N}_{Oi}^{ext} + \vec{N}_{Oi}^{int}$  es el torque de **todas** la fuerzas (internas y externas al sistema) que actúan sobre la partícula  $i$ . La ec.(7.5) es **general**, pero pueden darse ciertas condiciones particulares:

⇒ Si el centro de momentos  $O$  es tal que:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_O = \vec{0} \\ \vec{v}_O \parallel \vec{p} = M\vec{v}_{CM} \\ O \equiv CM \end{array} \right\} \Rightarrow \text{la ec. (5) será: } \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_{Oi}} \quad (7.6)$$

⇒ Si las fuerzas internas son paralelas al vector posición relativa entre ambas partículas, el torque de las fuerzas internas se anula de a pares. En ese caso:

$$\vec{f}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \Rightarrow \sum_{i=1}^N \vec{N}_{Oi}^{int} = \vec{0} \Rightarrow \text{la ecuación (7.5) será: } \boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_{Oi}^{ext} - \vec{v}_O \times \vec{p}} \quad (7.7)$$

⇒ Si se cumplen **ambas** condiciones, (7.6) y (7.7), entonces:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{N}_{Oi}^{ext}} \quad (7.8)$$

En ese caso, el teorema de conservación toma una forma más simple (¡y “usable”!):

$$\boxed{\sum_{i=1}^N \vec{N}_{Oi}^{ext} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_O = ct\vec{e}} \quad (7.9)$$

Notar que la conservación del impulso angular respecto de un origen involucra que los torques externos *respecto del mismo origen* se anulen.

➤ Recordemos, asimismo, que el impulso angular del sistema respecto del centro de momentos O puede escribirse:

$$\boxed{\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{p} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_O^{(CM)}} \quad (7.10)$$

donde:

⇒  $\vec{L}_{CM}$  es el impulso angular *respecto del CM* y se denomina *impulso angular intrínseco*;

⇒  $\vec{R} \times \vec{p} \equiv L_O^{(CM)}$  es el impulso angular *del CM respecto del origen O*.

De acuerdo a la ec.(7.10), podría darse que:

$$\text{a) } \boxed{\vec{L}_{CM} = ct\vec{e} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \vec{N}_{CM}^{ext} = \vec{0}} \quad (\text{sii se cumple que } \vec{f}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j) ) \quad (7.11)$$

$$\text{b) } \boxed{\vec{L}_O^{(CM)} = \vec{R} \times \vec{p} = ct\vec{e} \Leftrightarrow \vec{N}_O^{ext} = \vec{R} \times \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \vec{0}} \quad (7.12)$$

Notemos que la ec.(7.12) nos muestra, otra vez, que el CM se comporta como una única partícula, sobre la que están aplicadas todas las fuerzas externas del sistema.

• **Energía mecánica total**

$$H = \sum_{i=1}^N (T_i + V_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N U_{ij} \quad (7.13)$$

Recordemos que, en general, la energía mecánica total *no es la suma de las energías de todas las partículas si éstas interactúan entre sí*. En la ec.(7.13):

- 1)  $T_i$  representa la energías cinética de la partícula  $i$ .
- 2)  $V_i$ , la energías potencial de las partícula  $i$ , debidas a las fuerzas externas conservativas que actúen sobre ella, y
- 3)  $U_{ij}$ , la energía potencial de interacción entre las partículas  $i$  y  $j$ , debido a las fuerzas conservativas de interacción entre ellas.

En general, la energía mecánica total del sistema va a variar si actúan **fuerzas externas o internas no conservativas que realizan trabajo sobre el sistema:**

$$dH = dW^{NC} = dW^{NC,ext} + dW^{NC,int} = \sum_{i=1}^N dW_i^{NC,ext} + \sum_{i=1}^N dW_i^{NC,int} \quad (7.14)$$

Y, por lo tanto, la energía será una constante de movimiento si el trabajo de todas las fuerzas no conservativas se anula:

$$H = cte \Leftrightarrow W^{NC} = W^{NC,ext} + W^{NC,int} = 0 \quad (7.15)$$

➤ Existe, sin embargo, como hemos visto, una situación para la cual el trabajo de las fuerzas internas se anula. Esto es si:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cte \quad \forall \text{ par de partículas } (i, j) \Leftrightarrow W^{int} = 0^4 \quad (7.16)$$

En ese caso, la energía mecánica va a variar solo por el trabajo de las fuerzas externas no conservativas y, entonces:

$$H = cte \Leftrightarrow W^{NC} = W^{NC,ext} = 0 \quad (7.17)$$

**Sistema de dos cuerpos interactuantes**

El sistema más simple es el que está formado por dos masas puntuales  $m_1$  y  $m_2$  que interactúan entre sí. Pensemos en estas dos partículas interactuando con una interacción a distancia que, generalmente, va a depender de la distancia relativa entre ambas masas:

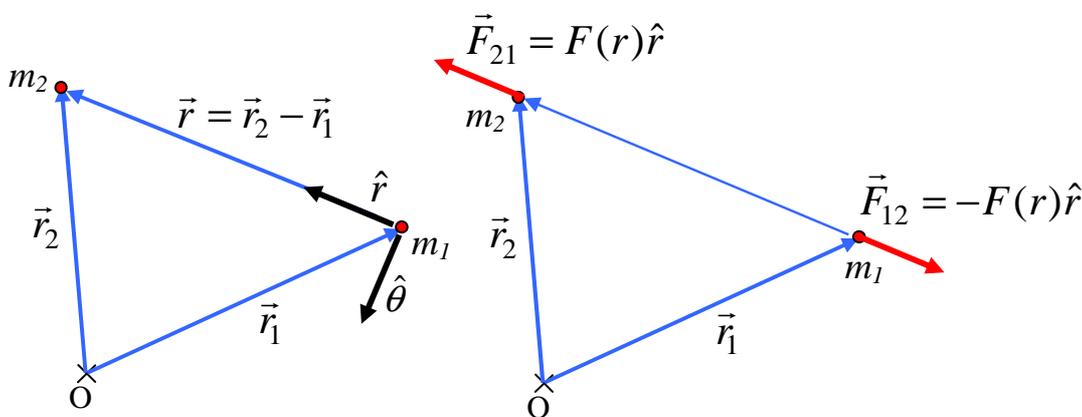
<sup>4</sup> Un sistema que cumple que las *distancias relativas entre partículas permanecen constantes* se denomina *rígido*.

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \equiv r \hat{r} \quad y \quad r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

donde  $\hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$  es el versor dirigido a lo largo de la recta que une a ambas partículas

(el sentido, tal como está definido, es desde  $m_1$  hacia  $m_2$ ). Suponiendo que las fuerzas tienen la dirección dada por  $\hat{r}$ <sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -F(r) \hat{r} \\ \vec{F}_{21} &= F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = F(r) \hat{r} \end{aligned} \tag{7.18}$$



Las ecuaciones de Newton para este sistema resultan:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \hat{r} = -F(r) \hat{r} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21} = -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \hat{r} = F(r) \hat{r} \end{aligned} \tag{7.19}$$

Las ecs.(7.19) es un sistema de ecuaciones *acopladas* y, por lo tanto los movimientos de ambas partículas no son independientes: se dice que están *correlacionados*. Como las fuerzas de interacción dependen de las posiciones de ambas partículas, el movimiento de una de ellas, modifica la posición relativa entre ambas y por lo tanto, la fuerza actuante sobre la otra partícula, lo que, en definitiva afecta su movimiento<sup>6</sup>.

<sup>5</sup> Esta condición, en principio, no es necesaria para el desarrollo que sigue. Sin embargo, vamos a tenerla en cuenta para el análisis de conservación.

<sup>6</sup> Obviamente, el movimiento de cada una de ellas afecta a la otra. Notar que, en este análisis, no interviene el tiempo, es decir, el cambio en la posición de una de las partículas afecta *inmediatamente* a la otra. Esto presupone que la velocidad de propagación de la información (es decir, la velocidad con la que segunda partícula se “entera” del cambio de la primera) es *infinita*. Esto claramente, está en contradicción con la Teoría de la Relatividad. Sin embargo, como vamos a ver, la Mecánica Clásica es una aproximación de la Teoría de la Relatividad, por lo que esta velocidad *infinita* representa una velocidad muy grande respecto de las velocidades ordinarias que entran dentro del rango de la Mecánica Clásica.

Para resolver el movimiento de este sistema conviene desacoplar las ecs.(7.19). Para ello, vamos a hacer un *cambio de coordenadas*, es decir, vamos a re-escribir (7.19) en función de otras posiciones (relacionadas con  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ ) de tal manera que resulten dos ecuaciones desacopladas. La pregunta es, entonces, cómo elegimos esas nuevas posiciones. Usemos un criterio físico:

- El sistema de las dos partículas es un sistema *aislado*; por lo tanto el CM del sistema se va a mover con un movimiento rectilíneo y uniforme (su ecuación de movimiento va a ser muy sencilla).
- Las fuerzas dependen de la posición relativa entre ambas masas, así que, de existir una posición que desacople el sistema, podemos suponer que debería ser ésta.

Entonces, hacemos el siguiente cambio de coordenadas:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \end{array} \right. \quad (7.20)$$

Para recuperar las posiciones de ambas partículas, aplicamos la transformación inversa<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \\ \vec{r}_2 &= \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \end{aligned} \quad (7.21)$$

Introduciendo el cambio de coordenadas, las ecuaciones de movimiento para  $\vec{R}$  y  $\vec{r}$  resultan:

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = \frac{-F(r)\hat{r} + F(r)\hat{r}}{m_1 + m_2} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{R}} = \vec{0}} \quad (7.22)$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{F(r)\hat{r}}{m_2} - \frac{-F(r)\hat{r}}{m_1} \Rightarrow \boxed{\ddot{\vec{r}} = \left( \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) F(r)\hat{r}} \quad (7.23)$$

- La ec.(7.22) expresa lo que ya sabíamos: el CM se mueve con movimiento rectilíneo uniforme.
- La ec.(7.23) describe el *movimiento relativo entre ambas masas*. Si definimos:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \Rightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

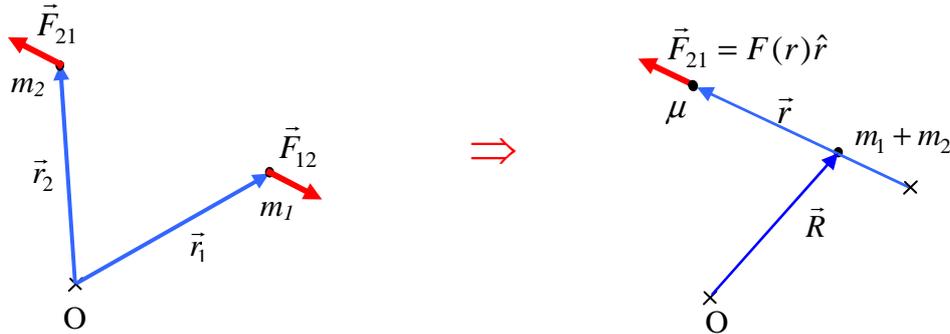
<sup>7</sup> El sistema de dos partículas interactuantes es el único problema que está *formalmente* resuelto en Física. Esto es, existe para este problema una transformación de coordenadas que desacopla el sistema. Si se tienen tres o más partículas interactuantes (aunque las interacciones, como ya sabemos, se producen de a pares), no existe una transformación general de coordenadas que desacople el sistema.

La cantidad  $\mu$  se denomina *masa reducida del sistema*. La ec.(7.23) resulta:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = F(r) \hat{r} \quad (7.24)$$

Esta ecuación representa el movimiento de una única partícula de masa  $\mu$  que se mueva bajo la acción de una fuerza  $F(r)\hat{r}$ <sup>8</sup>.

- En definitiva, hemos conseguido pasar de resolver:



El movimiento correlacionado de dos partículas interactuantes que, en general, puede ser muy complicado:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_{12} = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \hat{r} \\ m_1 \ddot{\vec{r}}_2 &= \vec{F}_{21} = -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \end{aligned}$$

a

El movimiento no acoplado de otro sistema de dos partículas: el CM y la partícula ficticia de masa  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{R}} &= \vec{0} \\ \mu \ddot{\vec{r}} &= F(r) \hat{r} \end{aligned}$$

- Una vez resuelto este sistema, se puede encontrar el movimiento de  $m_1$  y  $m_2$  a través de la transformación inversa, ecs.(7.21).
- Si una de las masas es mucho mayor que la otra (por ejemplo,  $m_1 \gg m_2$ ), entonces:

$$\begin{aligned} \vec{R} &\cong \vec{r}_1 \\ \mu &\cong m_2 \end{aligned}$$

Es decir, el movimiento del CM es *prácticamente* el de la masa  $m_1$  (la mayor), y el movimiento de la partícula de masa  $\mu$  es *prácticamente* el de la partícula  $m_2$ , tomando como origen la partícula  $m_1$  (o sea, *prácticamente*, el CM)<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> Notar que  $F(r)\hat{r} = \vec{F}_{21}$ , es la fuerza que actúa sobre  $m_2$ . Esto resultó así ya que definimos la coordenada relativa como  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , posición relativa de  $m_2$  respecto de  $m_1$ . Notar, asimismo que, si bien consideramos la dirección de las fuerzas paralela a la recta que une ambas masas, no existe restricción en cuanto a la dirección, para aplicar este procedimiento.

<sup>9</sup> Sin embargo, esto es una aproximación.

- Analicemos qué magnitudes se conservan para este sistema (el conjunto de ambas masas) y cómo se escriben las integrales de movimiento en función de  $\vec{R}$  y  $\vec{r}$ .

➤ **Impulso lineal:**

Se trata de un sistema *aislado*, por lo que las fuerzas actuantes son internas, entonces:

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = ct\vec{e}$$

$$\vec{p} = (m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} \quad (7.25)$$

donde  $\dot{\vec{R}} = \vec{v}_{CM}$  es la velocidad del CM. Como  $\vec{p} = ct\vec{e}$ , el CM se moverá con movimiento rectilíneo uniforme (como ya habíamos deducido a partir de las ecuaciones de Newton), por lo que se puede adoptar el sistema CM como sistema de referencia inercial. En ese caso:

$$\vec{p}^{(CM)} = \vec{0} \quad (7.26)$$

➤ **Impulso angular:**

Las fuerzas actuantes en nuestro sistema son internas y *están dirigidas a lo largo de la recta que une a ambas masas*, por lo que los torques *respecto de cualquier centro de momentos* se anulan<sup>10</sup>. Elijamos, entonces, un centro de momentos conveniente. De acuerdo a las condiciones (7.6), éste debe ser, por ejemplo, un punto en reposo respecto de nuestro sistema de referencia (O), o bien el CM del sistema.

- Sea, por ejemplo, el punto O<sup>11</sup>:

$$\vec{L}_O = \vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2 \quad (7.27)$$

De acuerdo a (7.21):

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= m_1 \left( \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) + m_2 \left( \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} \right) \times \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= (m_1 + m_2) \vec{R} \times \dot{\vec{R}} - \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \dot{\vec{R}} - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{R} \times \dot{\vec{r}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \vec{R} \times \dot{\vec{r}}}_{=\vec{0}} \\ &\quad + \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

<sup>10</sup> Aquí usamos la condición sobre la dirección de las fuerzas entre las partículas. De haber tenido otra dirección, los torques no se hubieran anulado y el impulso angular no se conservaría.

<sup>11</sup> Elegimos, en este caso, aunque no es necesario, como centro de momentos el origen del sistema de referencia.

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= (m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \\ &= (m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}}_{\mu^2} \underbrace{\left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right)}_{1/\mu} \vec{r} \times \dot{\vec{r}}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_O = (m_1 + m_2)\vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (7.28)$$

Como era de esperar, el impulso angular queda escrito como:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^{CM} + \vec{L}^\mu$$

es decir, la suma del impulso angular del CM y el de la partícula de masa  $\mu$ . Notemos, sin embargo, que en la expresión (7.28), el vector  $\vec{r}$  **no está medido** desde el centro de momentos O

- Si elegimos como centro de momentos (o sistema de referencia) el CM:

$$\vec{L}_{CM} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \quad (7.29)$$

### ➤ **Energía mecánica:**

Para analizar la conservación de la energía mecánica, debemos verificar si las fuerzas que actúan sobre las partículas son conservativas o no. Repitamos aquí la expresión de ambas fuerzas (ec.(7.18)):

$$\vec{F}_{12} = -F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -F(r) \hat{r}$$

$$\vec{F}_{21} = F(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = F(r) \hat{r}$$

Notemos que las fuerzas sobre cada partícula dependen, no solo de la posición de la partícula sobre la que está aplicada, sino **también de la posición de la otra partícula**.

Por lo tanto, estas fuerzas *no son conservativas*. Sin embargo, calculemos el trabajo diferencial total de ambas fuerzas:

$$\begin{aligned}dW &= dW_1 + dW_2 = \vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 \\ &= \vec{F}_{21} \cdot (d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = \vec{F}_{21} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\end{aligned}$$

donde hemos considerado que  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Considerando que  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = r \hat{r}$  y la expresión de  $\vec{F}_{21} = F(r) \hat{r}$ :

$$dW = F(r) \hat{r} \cdot d(r \hat{r}) = F(r) \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + r d\hat{r})$$

Como  $d\hat{r} = d\theta \hat{\theta}$ <sup>12</sup>, entonces:

$$\boxed{dW = F(r) dr} \tag{7.30}$$

El trabajo diferencial conjunto de ambas fuerzas **es** un diferencial exacto, es decir,  $W$  va a ser independiente del camino y, por lo tanto, este trabajo es conservativo. Entonces, si bien la energía de cada partícula por separado no se conserva, **sí** se conserva la energía del sistema conjunto ( $m_1 + m_2$ ).

A partir del trabajo conjunto de las fuerzas sobre ambas partículas interactuantes, se puede encontrar una *energía potencial*:

$$\boxed{V_{12}(r) = -\int_{r_0}^r F(r) dr + V_{12}(r_0)} \tag{7.31}$$

donde  $r_0$  es el nivel de referencia. Esta energía potencial **no** es la suma de las energías potenciales de cada partícula (ya que, la fuerza sobre cada partícula por separado no tiene asociada una energía potencial) sino que es *la energía potencial del par interactuante*. Esta energía potencial se denomina *energía potencial de interacción*.

*Las fuerzas de interacción pueden derivarse de este potencial:*

$$\vec{F}_{12} = -\nabla_1 V_{12}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

$$\vec{F}_{21} = -\nabla_2 V_{12}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$$

donde  $\nabla_1$  ( $\nabla_2$ ) es el gradiente respecto de las coordenadas de la partícula 1 (partícula 2).

- Calculemos la energía cinética del sistema:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 (\dot{r}_1 \cdot \dot{r}_1) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{r}_2 \cdot \dot{r}_2) \\ &= \frac{1}{2} m_1 \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \cdot \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) + \frac{1}{2} m_2 \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \cdot \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} - \underbrace{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{R}}}_{=0} + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \frac{1}{2} \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Véase el tema de coordenadas polares en el capítulo de Cinemática.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + \underbrace{\frac{m_1^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}}_{\mu^2} \underbrace{\left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \right)}_{1/\mu} \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + \frac{1}{2}\mu \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \left| \dot{\vec{R}} \right|^2 + \frac{1}{2}\mu \left| \dot{\vec{r}} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

donde  $v_{CM}$  es el módulo de la velocidad del CM y  $v$  es el módulo de la velocidad de la partícula de masa  $\mu$  (que es la velocidad relativa entre ambas partículas). Así, la energía cinética queda expresada como la energía cinética del CM y la de la partícula ficticia de masa  $\mu$ .

La energía mecánica total queda expresada, entonces, como:

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}\mu v^2 + V_{12}(r) \tag{7.33}$$

Finalmente, si tomamos al CM como origen del sistema de referencia:

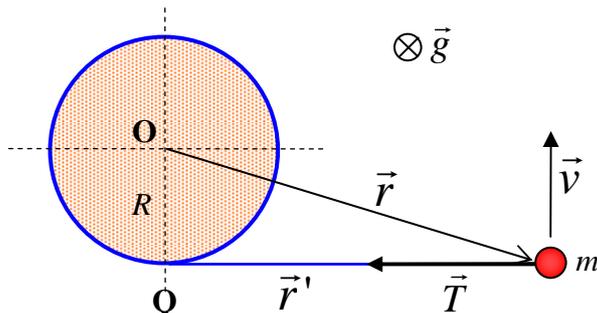
$$H = \frac{1}{2}\mu v^2 + V_{12}(r) \tag{7.34}$$

### Análisis de conservación – Ejemplos

Veamos, a través de algunos ejemplos, cómo se analiza la conservación de  $\vec{p}$ ,  $\vec{L}$  y  $H$ .

*Ejemplo 1. El eje instantáneo de rotación: un concepto útil y una confusión habitual.*

Sea una partícula de masa  $m$  atada a un hilo inextensible que se va enrollando *sin deslizar* en un poste de radio  $R$ . Se supone que el movimiento es en un plano horizontal sin rozamiento.



Las fuerzas actuantes sobre  $m$  son la tensión  $\vec{T}$  del hilo, el peso y la normal. Estas dos últimas se compensan y, por lo tanto, la única que influye en el movimiento es  $\vec{T}$ .

Como el hilo no desliza respecto del poste, todos los puntos del hilo en contacto con él tienen velocidad nula, en particular, el último punto de contacto, es decir, el punto Q. Por lo tanto, la partícula realiza, *instante a instante* un movimiento circular de radio  $r'$ , alrededor de un eje que pasa por el punto Q. Este eje se denomina *eje instantáneo de rotación* (EIR).

- *Impulso lineal*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{T} \Rightarrow \vec{p} \neq ct\vec{e}$$

- *Energía mecánica*

Analicemos el trabajo de la tensión que, por ser una fuerza de vínculo, no es conservativa<sup>13</sup>.

$$dW = \vec{T} \cdot d\vec{r} = \vec{T} \cdot \vec{v} dt$$

Como, en cada instante, el movimiento es circular, la velocidad de la partícula es perpendicular a la porción de hilo, de longitud  $r'$ , que aún no se ha enroscado. Entonces:

$$\vec{T} \perp \vec{v} \Rightarrow dW = 0 \Rightarrow H = cte$$

Como la energía es solamente cinética:

$$H = \frac{1}{2}mv^2 = E \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m}} \equiv cte \tag{7.35}$$

El módulo de la velocidad de la partícula es constante.

- *Impulso angular*

Elegimos un centro de momentos conveniente, donde “conveniente” significa que reúna alguna de las condiciones (7.6). Por ejemplo, un “candidato” que puede parecer ideal es el punto Q. Lo analizamos así<sup>14</sup>: por el punto Q pasa el eje instantáneo de rotación y, por lo tanto,  $\vec{v}_Q = \vec{0}$ ; entonces, se cumple que la ecuación de movimiento de  $\vec{L}_Q$  es:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{N}_Q \tag{7.36}$$

Y, como la tensión  $\vec{T}$  es central respecto de Q  $\Rightarrow \vec{N}_Q = \vec{r}' \times \vec{T} = \vec{0}$

Entonces:

<sup>13</sup> Las fuerzas de vínculo, por adaptarse a las condiciones cinemáticas de la partícula, dependen, en general, de la velocidad de ésta.

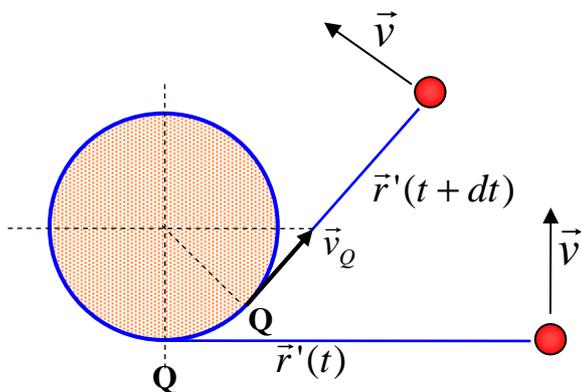
<sup>14</sup> Notar que se va a hacer un análisis incorrecto.

$$\vec{L}_Q = m\vec{r}'v\hat{z} = L\hat{z} \Rightarrow v = \frac{L}{mr'} \quad (7.37)$$

Claramente, el módulo de la velocidad de la partícula que acabamos de obtener no es constante, ya que  $r'$  va cambiando a medida que el hilo se enrolla en el poste. ¡El resultado (7.37) es contrario al obtenido en (7.35)! La explicación a esta aparente paradoja es que la ecuación de movimiento que planteamos para  $\vec{L}_Q$ , ec.(7.36), es incorrecta, ya que la velocidad del punto Q *no es nula*. La ecuación de evolución (7.36) no es correcta, en general, si Q es un punto sobre el EIR, ya que en la ecuación más general:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O - \vec{v}_O \times \vec{p}$$

$\vec{v}_O$  es la velocidad con que se desplaza el *punto del espacio* elegido como origen de momentos, y su velocidad no es nula, y no la de los puntos materiales por los cuales, instante a instante, pasa el EIR. Por lo tanto, es un error considerar, en general, que un punto, por el solo hecho de pertenecer al EIR, es un centro de momentos conveniente, que cumple con la ecuación de movimiento (7.36).



En efecto, en este caso, el punto Q (centro de momentos), se va desplazando sobre la circunferencia. El desplazamiento de Q en un  $dt$  es el diferencial de arco  $ds$  sobre la circunferencia, y esto es, además, la porción de hilo que se enrolla en ese  $dt$ , es decir,  $dr'$ :

$$ds = -dr' \Rightarrow v_Q = \frac{ds}{dt} = -\frac{dr'}{dt}$$

donde el signo menos entre  $ds$  y  $dr'$  indica que lo que aumenta la porción de hilo que se enrolla ( $ds$ ) es igual a lo que se acorta la porción de hilo libre ( $dr'$ ).

La ecuación de evolución correcta del impulso angular con origen en Q es, entonces:

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \underbrace{\vec{N}_Q}_{=0} - \vec{v}_Q(t) \times \vec{p} = -mv_Q(t)v\hat{z} \quad (7.38)$$

(Notar que  $\vec{v}$  y  $\vec{v}_Q$  son ortogonales entre sí).

Esta ecuación nos conduce al mismo resultado (7.35). En efecto, derivando  $\vec{L}_Q$  respecto del tiempo (ec.(7.37):

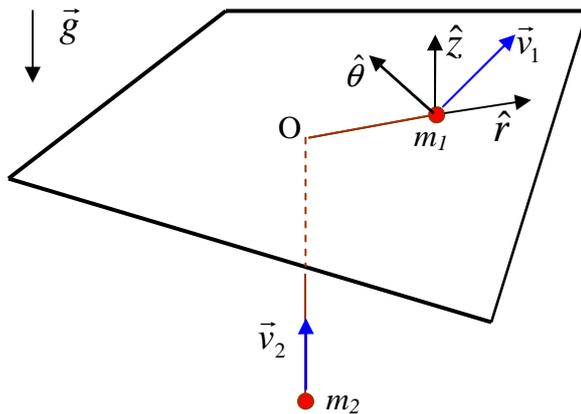
$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \frac{d(mr'v)}{dt} \hat{z} = m \left[ v \frac{dr'}{dt} + r' \frac{dv}{dt} \right] \hat{z} = m \left[ -vv_Q + r' \frac{dv}{dt} \right] \hat{z}$$

e igualando a (7.38):

$$m \left[ -vv_Q + r' \frac{dv}{dt} \right] \hat{z} = -mv_Q v \hat{z} \Rightarrow mr' \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dv}{dt} = 0} \quad (7.39)$$

Es decir, el módulo de la velocidad de la partícula es constante, tal como habíamos encontrado por conservación de la energía (ec.(7.35)).

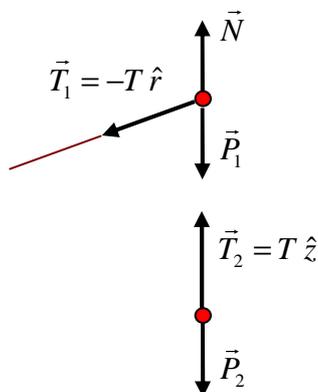
*Ejemplo 2.* Sea una partícula de masa  $m_1$ , que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento.



Esta partícula está unida a un hilo tenso de longitud  $l$ , que pasa a través de un orificio en la superficie (O), y en cuyo otro extremo se encuentra una segunda partícula de masa  $m_2$ , que solo puede moverse en la dirección vertical.

(1) Analicemos, en primer lugar, qué magnitudes se conservan para cada partícula.

• *Impulso lineal:*



➤  $\vec{p}_1 \neq cte$ : sobre la partícula 1 está actuando la tensión del hilo,  $\vec{T}_1 = -T \hat{r}$  (el peso y la normal se compensan);

➤  $\vec{p}_2 \neq cte$ : sobre la partícula 2 actúan la tensión del hilo,  $\vec{T}_2 = T \hat{z}$ , y el peso  $\vec{P}_2$

• *Impulso angular:*

Elegimos el centro de momentos. Las fuerzas actuantes están dirigidas a lo largo del hilo, por lo que un buen centro de momentos resulta ser el punto O. Como  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$  y  $\vec{P}_2$  son centrales respecto de O, sus torques se anulan. Por otra parte, el torque de  $\vec{P}_1$  y el de  $\vec{N}$  se compensan entre sí. Por lo tanto:

$$\rightarrow \vec{L}_{O1} = ct\vec{e}$$

$$\rightarrow \vec{L}_{O2} = ct\vec{e}$$

• *Energía mecánica:*

Las fuerzas no conservativas son  $\vec{T}_1$ ,  $\vec{T}_2$  y  $\vec{N}$ . Analicemos sus trabajos:

$$\rightarrow dW_1^{NC} = \vec{T}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{N} \cdot d\vec{r}_1 = -T \hat{r} \cdot \vec{v}_1 dt + N \hat{z} \cdot \vec{v}_1 dt = -T \hat{r} \cdot (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) dt + \underbrace{N \hat{z} \cdot (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta})}_{=0} dt$$

$$dW_1^{NC} = -T \dot{r} dt \neq 0 \Rightarrow H_1 \neq cte$$

$$\rightarrow dW_2^{NC} = \vec{T}_2 \cdot d\vec{r}_2 = T \hat{z} \cdot \vec{v}_2 dt = T \hat{z} \cdot \dot{z}_2 \hat{z} dt$$

$$dW_2^{NC} = T \dot{z}_2 dt \neq 0 \Rightarrow H_2 \neq cte$$

La energía mecánica de cada partícula no se conserva.

(2) Analicemos ahora el sistema formado por ambas partículas.

• *Impulso lineal*

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \neq ct\vec{e}$$

Las fuerzas externas no se anulan:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \underbrace{\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{P}_2}_{=0} = -T \hat{r} + T \hat{z} - P_2 \hat{z} \neq \vec{0}^{15}$$

• *Impulso angular:*

Es evidente que conviene tomar el mismo centro de momentos que en el caso anterior.

Como  $\vec{L}_{O1} = ct\vec{e}$  y  $\vec{L}_{O2} = ct\vec{e}$ , entonces:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O1} + \vec{L}_{O2} = ct\vec{e}$$

• *Energía mecánica:*

Consideremos el trabajo de las fuerzas no conservativas sobre el sistema (el trabajo de  $\vec{N}$  ya vimos que es nulo por ser la fuerza perpendicular al desplazamiento).

$$dW^{NC} = dW_1^{NC} + dW_2^{NC} = -T \dot{r}_1 dt + T \dot{z}_2 dt$$

<sup>15</sup> Si bien ambas tensiones son iguales en módulo, tienen distintas direcciones.

¿Es nulo este trabajo? Nos falta considerar que el hilo actúa como vínculo entre ambas partículas y que, por lo tanto, sus movimientos no son independientes. El vínculo es la longitud del hilo; en función de las coordenadas:

$$l = -z_2 + r$$

Derivando se encuentra que las velocidades de las partículas *en la dirección del hilo* son iguales:

$$0 = -\dot{z}_2 + \dot{r} \Rightarrow \dot{z}_2 = \dot{r}$$

Entonces:

$$dW^{NC} = -T \dot{r} dt + T \dot{r} dt = 0 \Rightarrow H = H_1 + H_2 = cte^{16}$$

Notemos que las energías de cada partícula van variando a lo largo del movimiento debido al trabajo de las tensiones, pero de tal manera que las variaciones se compensan:

$$dH_1 = -dH_2 \quad \forall dt$$



• Analicemos qué tipo de trayectoria realizan las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Para ello, consideremos las magnitudes que se conservan para el sistema total y asignémosles valores arbitrarios. Sea, por ejemplo:

$$\begin{aligned} H &= \varepsilon \\ \vec{L}_O &= L \hat{z} \end{aligned} \tag{7.40}$$

Sabemos que el impulso angular tiene dirección perpendicular a la mesa, ya que es perpendicular al plano del movimiento. Escribamos, entonces, las expresiones de la energía y el impulso angular y, a partir de ellas, tratemos de describir el movimiento del sistema sin necesidad de integrar las ecuaciones de movimiento. Notemos que la partícula  $m_1$  tiene dos coordenadas de movimiento ( $r$  y  $\theta$ ), mientras que  $m_2$  solo tiene una ( $z_2$ ).

➤ **Energía:**

$$H = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 + m_2 g z_2$$

La energía potencial gravitatoria corresponde a  $m_2$  (para  $m_1$  es constante) y hemos considerado como nivel de referencia a la mesa, es decir  $V(z=0) = 0$ . Escribamos en componentes:

---

<sup>16</sup> No hay ninguna energía potencial de interacción. Por eso, la energía total es la suma de las energías de cada una de las partículas.

$$H = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{z}_2^2 + m_2gz_2$$

Teniendo en cuenta la condición de vínculo:

$$l = r - z_2 \Rightarrow 0 = \dot{r} - \dot{z}_2$$

$$H = \frac{1}{2}m_1(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{r}^2 - m_2g(l - r)$$

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 - m_2g(l - r) = \mathcal{E}$$

Redefinamos la constante para no arrastrar términos espurios<sup>17</sup>:

$$E = \mathcal{E} + m_2gl$$

$$H = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m_1r^2\dot{\theta}^2 + m_2gr = E \quad (7.41)$$

➤ *Impulso angular*<sup>18</sup>:

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_{O1} + \vec{L}_{O2} = \vec{r} \times m_1\vec{v}_1 + \vec{z}_2 \times m_2\vec{v}_2 \\ &= r\hat{r} \times m_1(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) + \underbrace{z_2\hat{z} \times m_2\dot{z}_2\hat{z}}_{=0} \end{aligned}$$

Notemos que  $\vec{L}_{O2} = \vec{0}$ , como corresponde a un movimiento rectilíneo que pasa por el centro de momentos. Entonces:

$$\vec{L}_O = m_1r^2\dot{\theta}\hat{z} = L\hat{z} \quad (7.42)$$

➤ Despejemos  $\dot{\theta}$  de (7.42):

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m_1r^2} \quad (7.43)$$

Introduciendo (7.43) en (7.41):

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m_1r^2} + m_2gr = E \quad (7.44)$$

Las ecs.(7.43) y (7.44) constituyen las *ecuaciones de movimiento de la partícula*  $m_1$ .

Observemos algunas características:

- El signo de la constante  $L$  define el sentido de movimiento de la partícula. El sentido no cambia a lo largo de todo el movimiento, es decir,  $\dot{\theta}$  siempre es positivo (si  $L > 0$ ) o negativo (si  $L < 0$ ).

<sup>17</sup> Esto es equivalente a redefinir el nivel de referencia.

<sup>18</sup> Notemos que podríamos haber tomado directamente el impulso angular de la partícula  $m_1$ , ya que también es constante de movimiento.

- La ec.(7.44) solo depende de  $r$  y  $\dot{r}$ , por lo que puede pensarse como la energía de un *movimiento equivalente unidireccional* (en  $r$ ), donde:

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{r}^2 \quad (7.45)$$

corresponde a la energía cinética de este movimiento equivalente, y

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m_1 r^2} + m_2 g r \quad (7.46)$$

a la energía potencial. Esta energía potencial se denomina *potencial efectivo* del movimiento y es la suma de dos términos:

$\Rightarrow V(r) = m_2 g r \rightarrow$  la energía potencial “real” del sistema;

$\Rightarrow V_{cf}(r) = \frac{1}{2} \frac{L^2}{m_1 r^2} \rightarrow$  una “energía potencial” llamada *potencial centrífugo* o *barrera*

*centrífuga* (que proviene de un término de energía cinética).

Notemos que este movimiento equivalente solo tiene una coordenada de movimiento,  $r$ , ya que hemos “suprimido” el movimiento en  $\theta$ . La manera de hacer esto físicamente sería observar el movimiento desde un sistema de referencia no inercial (SNI) que rotara con la misma velocidad angular de la partícula ( $\dot{\theta}$ ). En ese SNI, la energía potencial de la partícula correspondería a las fuerzas conservativas reales y a los efectos de inercia “conservativos”. En efecto, averigüemos a qué “fuerza” corresponde el potencial centrífugo (es fácil adivinarlo, ¿no?):

$$\vec{f}^* = -\frac{dV_{cf}}{dr} \hat{r} = \frac{L^2}{m_1 r^3} = \frac{m_1^2 r^4 \dot{\theta}^2}{m_1 r^3} = m_1 r \dot{\theta}^2 \equiv \vec{f}_{cf}^*$$

Efectivamente, el potencial centrífugo proviene de la fuerza centrífuga.

¿*Qué pasa con los otros efectos de inercia?* Además de la fuerza centrífuga, en el SNI, aparecen otros efectos de inercia: la fuerza de Coriolis  $\vec{f}_C^*$ , ya que la partícula está realizando un movimiento a lo largo de la coordenada radial  $r$  con velocidad  $\vec{v}' = \dot{r} \hat{r}$  respecto de SNI, y  $\vec{f}_\gamma^*$ , ya que el SNI rota con  $\dot{\theta} = \dot{\theta}(r)$ . La pregunta es, entonces, por qué estos efectos de inercia no aparecen y/o afectan a la energía.

Ambos efectos son no conservativos, ya que dependen de la velocidad de la partícula. Sin embargo, podemos ver que sus trabajos son nulos, por lo que la energía

mecánica también es constante en el SNI (como debía ser...). En efecto, calculemos dichos efectos de inercia:

$$\vec{f}_C^* = 2m_1 \vec{v} \times \vec{\Omega} = 2m_1 \dot{r} \hat{r} \times \dot{\theta} \hat{z} = -2m_1 \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta}$$

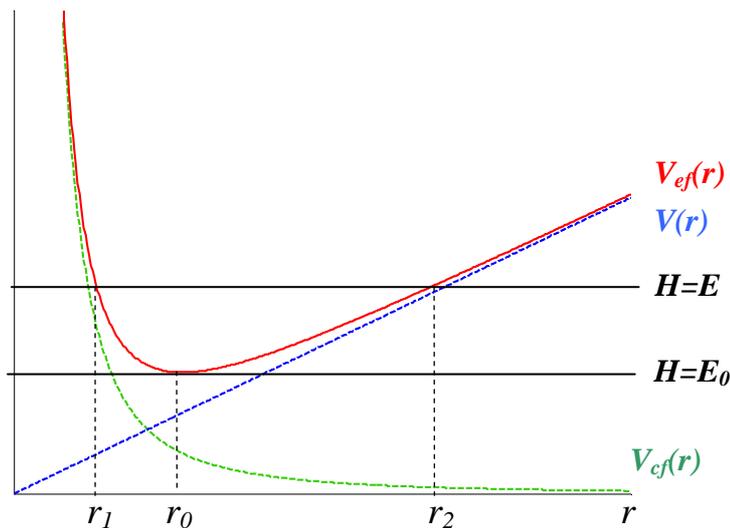
$$\vec{f}_\gamma^* = m_1 \vec{r} \times \ddot{\gamma} = m_1 r \hat{r} \times \ddot{\theta} \hat{z} = -m_1 r \ddot{\theta} \hat{\theta}$$

Por lo tanto, el trabajo de estos efectos de inercia sobre la partícula es:

$$dW^* = \vec{f}_C^* \cdot d\vec{r} + \vec{f}_\gamma^* \cdot d\vec{r} = (-2m_1 \dot{r} \dot{\theta} - m_1 r \ddot{\theta}) \hat{\theta} \cdot dr \hat{r} = 0$$

ya que las fuerzas no inerciales son perpendiculares a la dirección de movimiento de la partícula en el SNI.

- Grafiquemos el potencial efectivo y veamos cómo es el movimiento en la dirección radial:



- El potencial efectivo tiene un mínimo para  $r = r_0$ . Calculemos ese radio:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = -\frac{L^2}{m_1 r_0^3} + m_2 g = 0 \Rightarrow r_0 = \left( \frac{L^2}{m_1 m_2 g} \right)^{1/3} \quad (7.47)$$

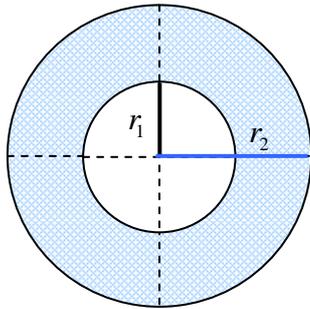
- El movimiento es *ligado*, para cualquier valor de energía  $E$ , con dos radios extremos  $r_1$  y  $r_2$ . Solo para  $E_0 = V_{ef}(r_0)$ , ambos radios coinciden y la trayectoria será una circunferencia de radio  $r_0$ .

- Por otra parte, de la ec.(7.43), vemos que la velocidad angular de  $m_1$

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{L}{m_1 r^2}$$

aumenta a medida que disminuye  $r$  y siempre tiene el mismo sentido. El signo de la constante  $L$  define el sentido de movimiento de la partícula. El sentido no cambia a lo largo de todo el movimiento, es decir,  $\dot{\theta} > 0$  (si  $L > 0$ ) o  $\dot{\theta} < 0$  (si  $L < 0$ ).

➤ El movimiento se desarrollará, entonces, en la zona delimitada entre dos circunferencias de radios  $r_1$  y  $r_2$ .



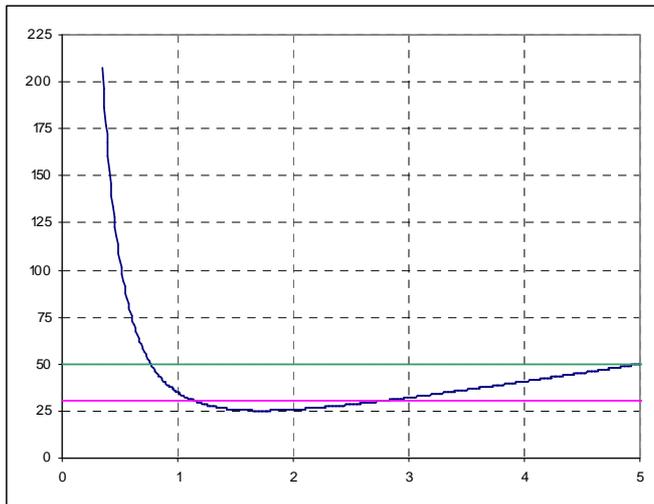
➤ Cuando la partícula alcanza el radio  $r_2$ , regresa moviéndose en el mismo sentido (es decir, no invierte el sentido de movimiento) hasta  $r_1$ . La trayectoria puede ser abierta (es decir, cubrir totalmente la zona entre ambas circunferencias, transcurrido un tiempo suficientemente largo), o cerrada<sup>19</sup> (se pasa por los mismos puntos).

- Notemos que, si  $L \neq 0$ , la partícula no puede alcanzar el centro de momentos (punto O), por efecto de la barrera centrífuga. Si nos paramos en el SNI, vemos que, a medida que la partícula se acerca al origen, la fuerza centrífuga aumenta enormemente, empujando a la partícula lejos del origen (en  $r \rightarrow 0$ ,  $\vec{f}_{cf}^* \rightarrow +\infty \hat{r}$ )
- Finalmente, integrando las ecs.(7.43) y (7.44) se puede obtener la trayectoria  $r(\theta)$ . En nuestro caso, realizamos la integración por el método de *diferencias finitas*, tal como se detalla en el Apéndice A<sup>20</sup>. Veamos qué trayectorias se obtienen para diferentes casos:

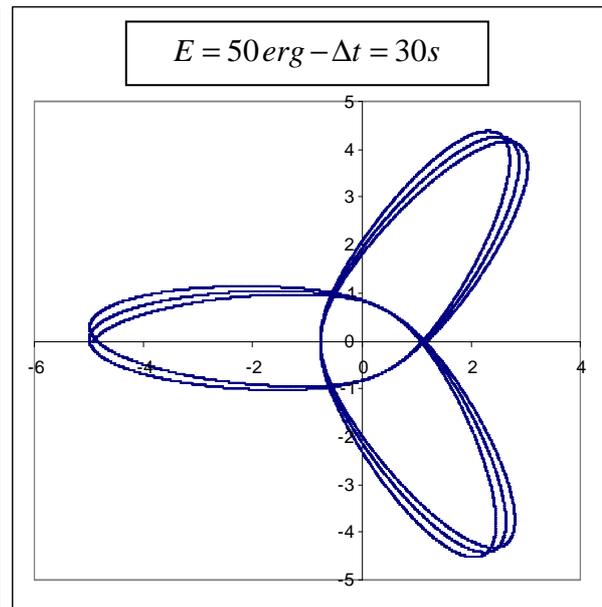
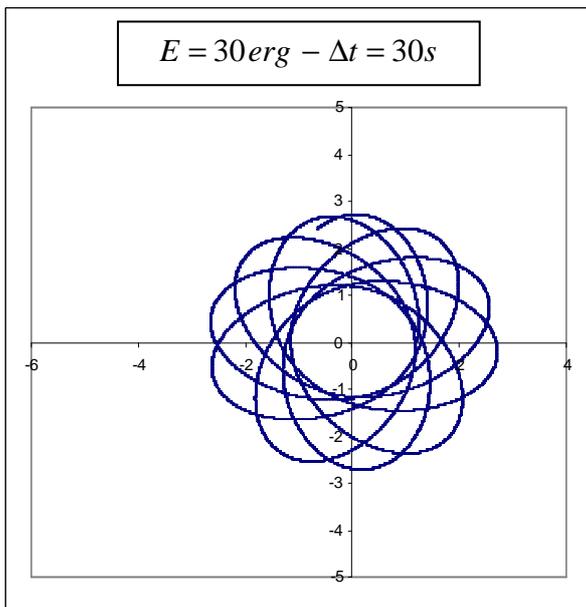
<sup>19</sup> En este caso, es abierta.

<sup>20</sup> En el Apéndice B se incluyen los programas fuente para obtener los potenciales efectivos (potef.for) y las trayectorias (orbit.for) para este problema y otros que se irán comentando.

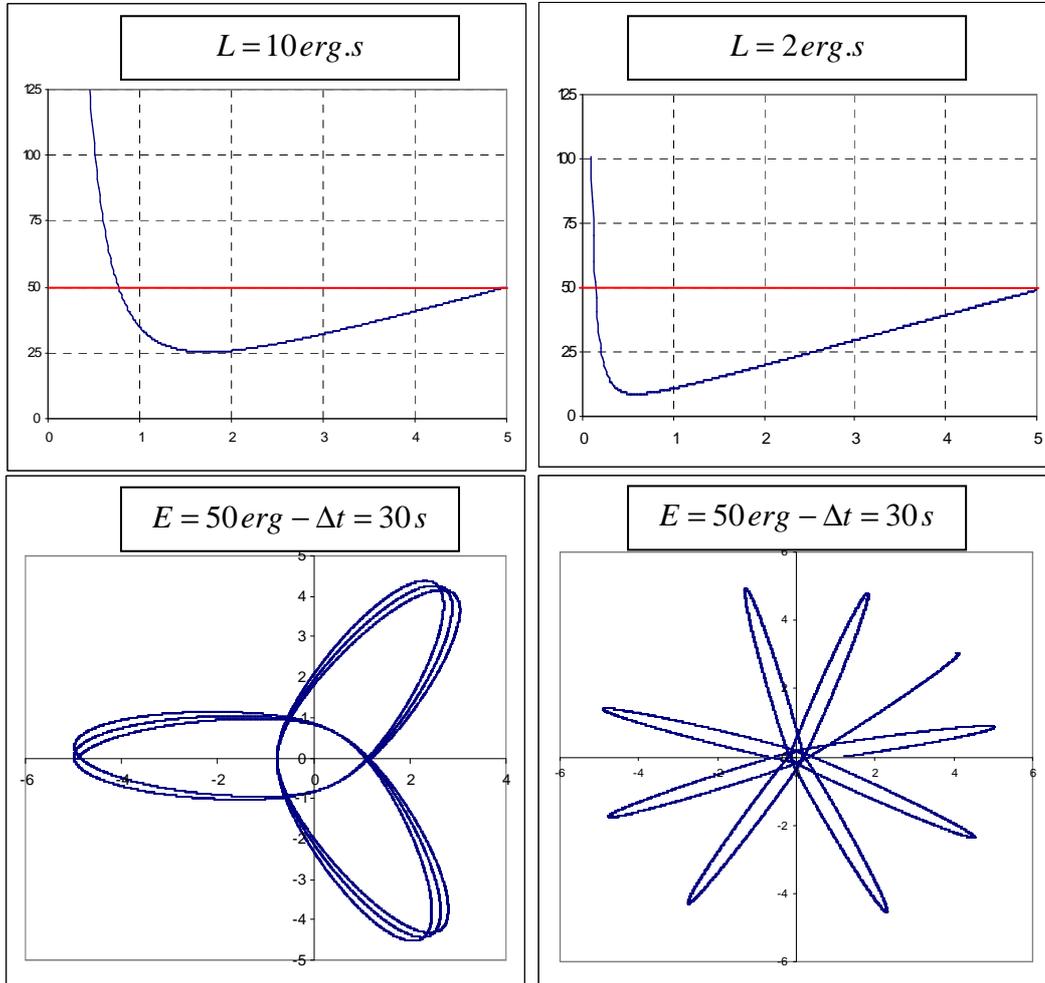
➤ *El mismo valor de impulso angular y distinto valor de energía.* El valor de la constante  $L$  define la barrera centrífuga y, por lo tanto el potencial efectivo. Notemos cómo un valor de energía mayor disminuye el radio menor y aumenta el mayor, agrandando la zona donde se mueve la partícula.



$L = 10 \text{ erg}\cdot\text{s}$   
 $m_1 = 2 \text{ g}$   
 $m_2 = 1 \text{ g}$   
 —  $E_1 = 30 \text{ erg}$   
 —  $E_2 = 50 \text{ erg}$

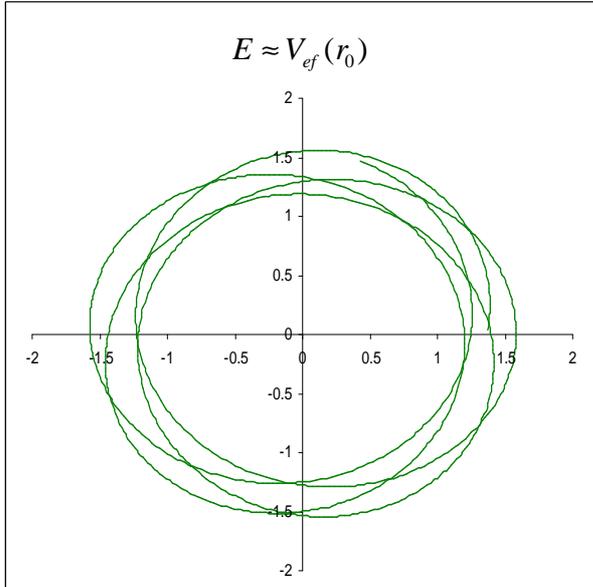


➤ El mismo valor de energía y distinto valor de impulso angular. En este caso, cambia la pendiente de la barrera centrífuga. Un valor de  $L$  menor aumenta la pendiente, lo que, fundamentalmente, disminuye el radio menor, y profundiza el pozo<sup>21</sup>.



Notar cómo las ramas de la trayectoria se hacen más angostas para valores menores de  $L$ , es decir, se van asemejando más a movimientos rectilíneos.

<sup>21</sup>Notar que la escala de ambas trayectorias es ligeramente diferente.



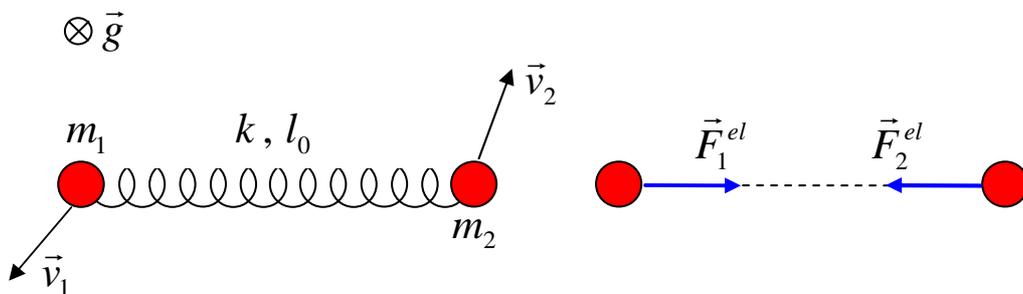
➤ Para energías cercanas al mínimo del potencial efectivo, ambos radios, mínimo y máximo, son muy cercanos y la partícula realiza pequeñas oscilaciones alrededor de la circunferencia de radio  $r_0$ , ec.(7.47). En ese caso, el potencial efectivo puede pensarse como un potencial armónico:

$$V_{ef}(r \approx r_0) \cong V_{ef}(r_0) + \underbrace{\frac{dV_{ef}}{dr} \Big|_{r_0}}_{=0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2V_{ef}}{dr^2} \Big|_{r_0} (r - r_0)^2$$

$$V_{ef}(r \approx r_0) \cong V_{ef}(r_0) + 3 \left[ \frac{(m_2 g)^4}{m_1 L^2} \right]^{1/3} (r - r_0)^2$$

➤ Finalmente, si el valor del impulso angular es  $L = 0$ , el movimiento es lineal ( $\dot{\theta} = 0$ ) y la partícula puede pasar por el centro de momentos. En el potencial, esto se pone en evidencia ya que desaparece la barrera centrífuga y el movimiento, radial, se debe solo al potencial real.

*Ejemplo 3.* Sean dos partículas de masas  $m_1$  y  $m_2$ , unidas por un resorte ideal de constante elástica  $k$  y longitud en reposo  $l_0$ , que pueden moverse libremente sobre una superficie horizontal sin rozamiento.



➤ Magnitudes que se conservan para cada partícula:

- *Impulso lineal*

Sobre cada partícula actúa una fuerza elástica ( $\vec{F}_i^{el}$ ,  $i = 1, 2$ ); entonces:

$$\vec{p}_1 \neq ct\vec{e}$$

$$\vec{p}_2 \neq ct\vec{e}$$

- *Impulso angular*

Las fuerzas elásticas son colineales con la recta que une a ambas partículas, por lo que podría pensarse que, eligiendo un centro de momentos sobre esta recta, el impulso angular de cada partícula va a conservarse. Sin embargo, dado que el sistema está en movimiento, también lo estarán los puntos de esa recta, por lo que no son centros de momento convenientes (su ecuación de evolución será la ec.(7.5)). Existe, sin embargo, una excepción. Si consideramos el *CM del sistema de ambas partículas*, veremos que éste se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme (ya que se trata de un sistema aislado), es decir:

$$\vec{v}_{CM} = ct\vec{e}$$

Esto significa que el *CM del sistema* ( $m_1 + m_2$ ) resulta ser un *sistema de referencia inercial*. Por lo tanto, si:

⇒ Ubicamos el origen del sistema de referencia en el CM<sup>22</sup> (tal que su velocidad sea nula), y

⇒ Ubicamos el centro de momentos en dicho CM, resulta:

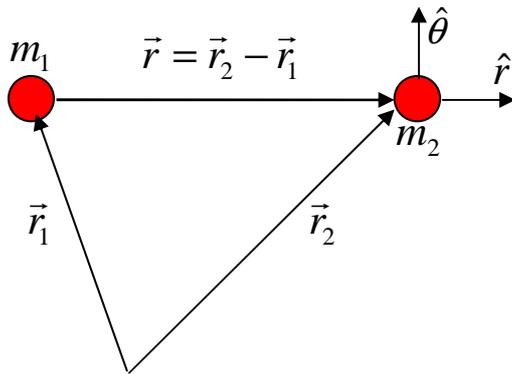
$$\vec{L}_{CM1} = ct\vec{e}$$

$$\vec{L}_{CM2} = ct\vec{e}$$

---

<sup>22</sup> Notar que, entonces, deberemos referir los impulsos lineales de las partículas a este sistema de referencia.

• *Energía mecánica*



Las fuerzas sobre cada partícula *no son conservativas* ya que dependen de la posición de ambas partículas<sup>23</sup>:

$$\vec{F}_1^{el} = k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0) \hat{r}$$

$$\vec{F}_2^{el} = -k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0) \hat{r}$$

donde  $\hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = \frac{\vec{r}}{r}$

Calculemos el trabajo de cada una:

$$dW_1 = \vec{F}_1^{el} \cdot d\vec{r}_1 = k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{r}_1 \neq 0 \Rightarrow H_1 \neq cte$$

$$dW_2 = \vec{F}_2^{el} \cdot d\vec{r}_2 = -k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{r}_2 \neq 0 \Rightarrow H_2 \neq cte$$

La energía de cada partícula no se conserva.

(2) Analicemos ahora el sistema formado por ambas partículas. Notemos que podemos tratarlo como *un par de partículas interactuantes*: el resorte, por ser ideal, puede estar representando la interacción entre ambas partículas.

• *Impulso lineal*

El sistema está aislado:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{ext} = \vec{F}_1^{el} + \vec{F}_2^{el} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = cte$$

Notar que si *la interacción es entre las partículas, las fuerzas son internas*.

• *Impulso angular*

Las fuerzas actuantes en nuestro sistema *están dirigidas a lo largo de la recta que une a ambas masas*, por lo que los torques *respecto de cualquier centro de momentos* se anulan. Podemos elegir como centro de momentos cualquier punto que cumpla con alguna de las condiciones (7.6). Entonces:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O1} + \vec{L}_{O2} = cte \quad \text{con O tal que cumple (7.6)}$$

En particular, podemos elegir el CM del sistema<sup>24</sup>:

<sup>23</sup> ¿Por qué en el caso de una única partícula unida a un resorte, la fuerza sobre ella sí es conservativa? En ese caso, el otro extremo del resorte es *un punto fijo* y, por lo tanto, no varía al moverse la partícula. El trabajo, en ese caso, solo depende de la posición de esa única partícula.

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_{CM1} + \vec{L}_{CM2} = ct\vec{e}$$

• *Energía mecánica*

Vimos que las fuerzas actuantes no son conservativas. Sin embargo, para el sistema de ambas partículas, veamos qué obtenemos al calcular el trabajo total:

$$\begin{aligned} dW &= dW_1 + dW_2 = \vec{F}_1^{el} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2^{el} \cdot d\vec{r}_2 = k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{r}_1 - k(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| - l_0) \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \cdot d\vec{r}_2 \\ &= k(r - l_0) \hat{r} \cdot d\vec{r}_1 - k(r - l_0) \hat{r} \cdot d\vec{r}_2 = -k(r - l_0) \hat{r} \cdot d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -k(r - l_0) \hat{r} \cdot d\vec{r} \\ &= -k(r - l_0) \hat{r} \cdot (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) dt = -k(r - l_0) \dot{r} dt \end{aligned}$$

$$dW = -k(r - l_0) dr \tag{7.48}$$

donde hemos considerado, como siempre:  $d\vec{r} = \vec{v} dt = (\dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}) dt$ .

Nuevamente hemos encontrado que el trabajo diferencial conjunto de ambas fuerzas es un diferencial exacto, es decir,  $W$  va a ser independiente del camino y, por lo tanto, este trabajo es conservativo. Entonces, si bien la energía de cada partícula por separado no se conserva, **sí** se conserva la energía del sistema conjunto ( $m_1 + m_2$ ). Encontremos, a partir de este trabajo, la *energía potencial de interacción* del sistema:

$$V(r) = -\int_{r_0}^r -k(r - l_0) dr + V(r_0)$$

Esta expresión es formalmente idéntica a la que encontramos en el capítulo de Energía<sup>25</sup> para una partícula sometida a una fuerza tipo ley de Hooke. Por lo tanto, fijando el nivel de referencia:

$$r_0 = l_0 \text{ y } V(r_0 = l_0) = 0$$

Resulta:

$$V(r) = \frac{1}{2} k(r - l_0)^2 \tag{7.49}$$

y, en consecuencia:

$$H = cte \tag{7.50}$$



• Analicemos también en este caso qué tipo de trayectoria realizan las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Para ello, procedamos como en el ejemplo anterior y consideremos las magnitudes que se conservan para el sistema total, asignándoles valores arbitrarios. Sea, por ejemplo:

<sup>24</sup> Notar la diferencia con el caso de una sola partícula. En este caso, el CM no tiene por qué ser el origen del sistema de referencia.

<sup>25</sup> La diferencia es que  $r$  es la distancia entre ambas partículas.

$$\begin{aligned}\vec{L}_{CM} &= L \hat{z} \\ H &= E\end{aligned}\tag{7.51}$$

Escribamos las expresiones de la energía y el impulso angular y, a partir de ellas, tratemos de describir el movimiento del sistema sin necesidad de integrar las ecuaciones de movimiento. Ambas partículas tienen dos coordenadas de movimiento ( $r$  y  $\theta$ ). Sin embargo, si tratamos este sistema como un sistema de dos partículas interactuantes, podemos escribir su energía e impulso angular como las magnitudes que corresponden al centro de masa y a la partícula hipotética de masa  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (masa

reducida), ecs.(7.28) y (7.33). Si además tomamos como sistema de referencia el CM, el problema se reduce al problema equivalente de una única partícula (ecs.(7.29) y (7.34)):

$$\vec{L}_{CM} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = L \hat{z}$$

$$H = \frac{1}{2} \mu |\dot{\vec{r}}|^2 + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 = E$$

Usando coordenadas polares (ver figura):

$$\vec{L}_{CM} = \mu r^2 \dot{\theta} \hat{z} = L \hat{z}\tag{7.52}$$

$$H = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 = E\tag{7.53}$$

Procedemos como en el ejemplo anterior, despejando  $\dot{\theta}$  de (7.52) e introduciéndolo en (7.53):

$$\dot{\theta} = \frac{L}{\mu r^2}\tag{7.54}$$

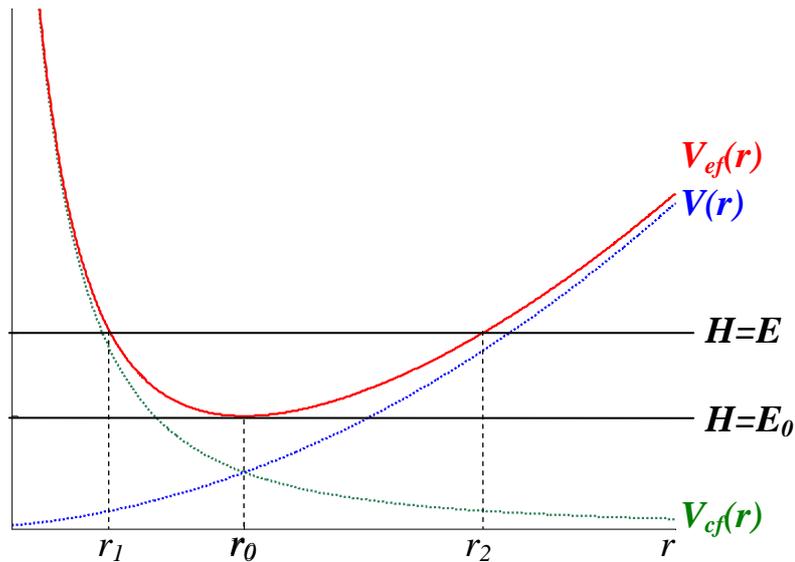
$$H = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2}_{V_{ef}(r)} = E\tag{7.55}$$

Como en el ejemplo anterior, obtuvimos un potencial efectivo, suma del potencial centrífugo y del potencial real:

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 = V_{cf}(r) + V(r)\tag{7.56}$$

Las ecs.(7.54) y (7.55) constituyen las *ecuaciones de movimiento de nuestra partícula hipotética*  $\mu^{26}$ . El movimiento angular posee idénticas características que el del ejemplo anterior.

- Analicemos el movimiento radial, graficando el potencial efectivo. Para mayor simplicidad, supongamos la longitud en reposo del resorte  $l_0 = 0$ :



- El potencial efectivo tiene un mínimo para  $r = r_0$ . Calculemos ese radio:

$$\frac{dV_{ef}}{dr} = -\frac{L^2}{\mu r_0^3} + 2kr_0 = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{L^2}{2k\mu}\right)^{1/4} \quad (7.57)$$

- El movimiento es *ligado*, para cualquier valor de energía  $E$ , con dos radios extremos  $r_1$  y  $r_2$ . Solo para  $E_0 = V_{ef}(r_0)$ , ambos radios coinciden y la trayectoria será una circunferencia de radio  $r_0$ .

- Integremos las ecs.(7.54) y (7.55) para obtener la trayectoria  $r(\theta)$ . Para ello, escribimos, a partir de la ec.(7.54):

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dr} \dot{r} = \frac{L}{\mu r^2} \Rightarrow d\theta = \frac{L dr}{\mu r^2 \dot{r}} \quad (7.58)$$

<sup>26</sup> En este caso, deberemos recuperar las ecuaciones de movimiento para las partículas  $m_1$  y  $m_2$ , a partir de la transformación inversa de coordenadas:

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Despejamos  $\dot{r}$  de la ec.(55) y lo introducimos en (58):

$$\dot{r} = \left[ \frac{2}{\mu} \left( E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$d\theta = \frac{L dr}{\mu r^2 \left[ \frac{2}{\mu} \left( E - \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{1}{2}kr^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (7.59)$$

Reordenamos la ec.(7.59):

$$d\theta = \frac{L dr}{\frac{\sqrt{2\mu} r^2}{r} \left( E r^2 - \frac{L^2}{2\mu} - \frac{1}{2}kr^4 \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{L dr}{\sqrt{2\mu} r \left( -\frac{1}{2}kr^4 + E r^2 - \frac{L^2}{2\mu} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

Para integrar, hacemos la sustitución:

$$x = r^2 \Rightarrow dx = 2r dr$$

$$d\theta = \frac{L dx}{2\sqrt{2\mu} x \left( -\frac{1}{2}kx^2 + E x - \frac{L^2}{2\mu} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

La integral está en tablas y resulta:

$$\theta(x) = \frac{L}{2\sqrt{2\mu}} \frac{\sqrt{2\mu}}{\sqrt{L^2}} \operatorname{arc\,sen} \left( \frac{E x - \frac{L^2}{\mu}}{|x| \sqrt{E^2 - \frac{kL^2}{\mu}}} \right)$$

En función de  $r$ :

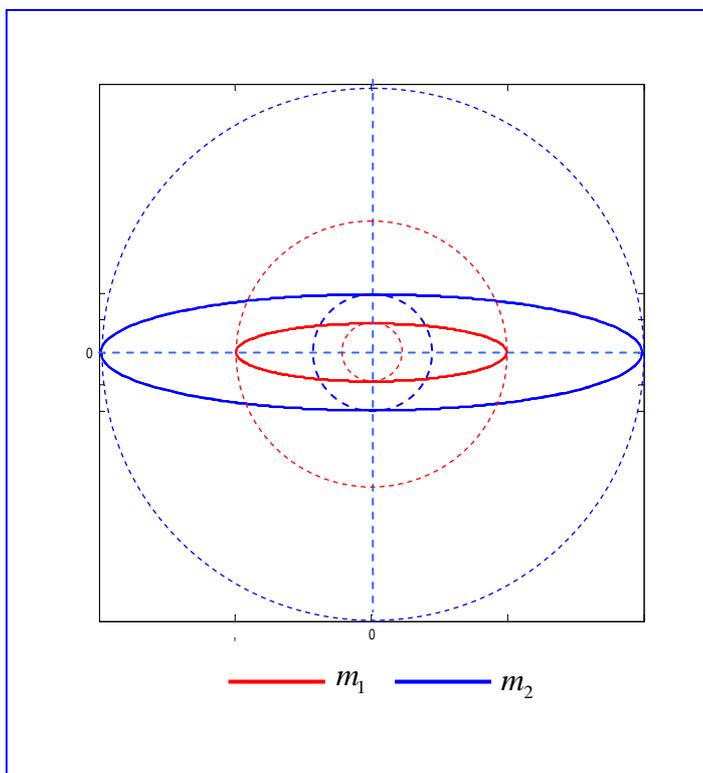
$$\theta(r) = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} \left( \frac{E r^2 - \frac{L^2}{\mu}}{r^2 \left( E^2 - \frac{kL^2}{\mu} \right)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Finalmente, despejamos  $r(\theta)$ :

$$r(\theta) = \left[ \frac{\frac{L^2}{\mu E}}{1 - \left( 1 - \frac{kL^2}{\mu E^2} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen}(2\theta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (7.60)$$

Para recuperar las trayectorias de las partículas  $m_1$  y  $m_2$ , realizamos la transformación inversa de coordenadas, ec.(7.21), considerando que estamos en el sistema de referencia

CM. El siguiente gráfico muestra las trayectorias de ambas partículas, en las que se ha considerado  $m_1 = 2m_2$ .



Notar que las trayectorias (líneas llenas) son cerradas<sup>27</sup>, y están contenidas en el espacio delimitado entre las dos circunferencias de radios máximo y mínimo. La trayectoria de menores dimensiones corresponde a la partícula más masiva. Estas trayectorias corresponden a  $L = 10 \text{ erg s}$  y  $E = 30 \text{ erg}$  (ver el gráfico del potencial efectivo).

- Finalmente, si  $L = 0$ , desaparece la barrera centrífuga y el movimiento de ambas partículas corresponde a una oscilación lineal ( $\dot{\theta} = 0$ ).

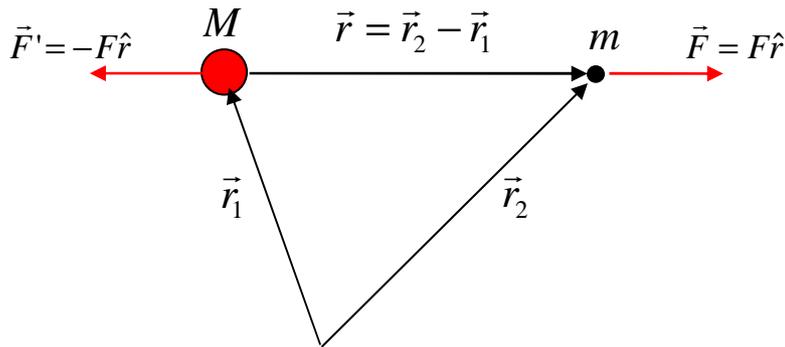
*Ejemplo 4. Dispersión de un protón por un núcleo pesado (dispersión de Rutherford)*

El experimento de dispersión de Rutherford tuvo como consecuencia el descubrimiento del núcleo atómico. La experiencia original se basó en la dispersión de partículas  $\alpha$  ( $2p^+ + 2n^0$ , núcleos de He) y partículas  $\beta$  (electrones  $e^-$ ), al atravesar una delgada lámina de oro (delgada para eliminar la posibilidad de choques múltiples). Los resultados obtenidos echaron por tierra el modelo de átomo de Thompson del *budín de*

<sup>27</sup> En los cursos avanzados de Mecánica Clásica se demuestra que las únicas dos trayectorias cerradas bajo cualquier condición inicial, corresponden a los potenciales  $V(r) \propto \frac{1}{r}$  (como el potencial gravitatorio), y  $V(r) \propto r^2$ . También, claro está, son cerradas las trayectorias circulares correspondientes a  $E = V_{ef}(r_0)$ , donde  $r_0$  es el valor de la coordenada para el cual el potencial efectivo es mínimo, y pequeños apartamientos respecto de esa trayectoria circular (para  $E \cong V_{ef}(r_0)$ ). Notar que esto último corresponde a hacer “pequeñas oscilaciones”, es decir, aproximar el pozo de potencial por un pozo cuadrático.

pasas (N corpúsculos cargados negativamente, imbuídos en una esfera cargada positivamente, de manera uniforme). La desviación sufrida por las partículas  $\alpha$  y  $\beta$  no se podían explicar a partir de este modelo.

Supongamos un protón  $p^+$ , de masa  $m$  y carga  $e$  ( $e > 0$ ), que se acerca a un núcleo de gran masa,  $M$ , y carga  $Ze$ . La interacción entre ambos es electrostática y repulsiva:



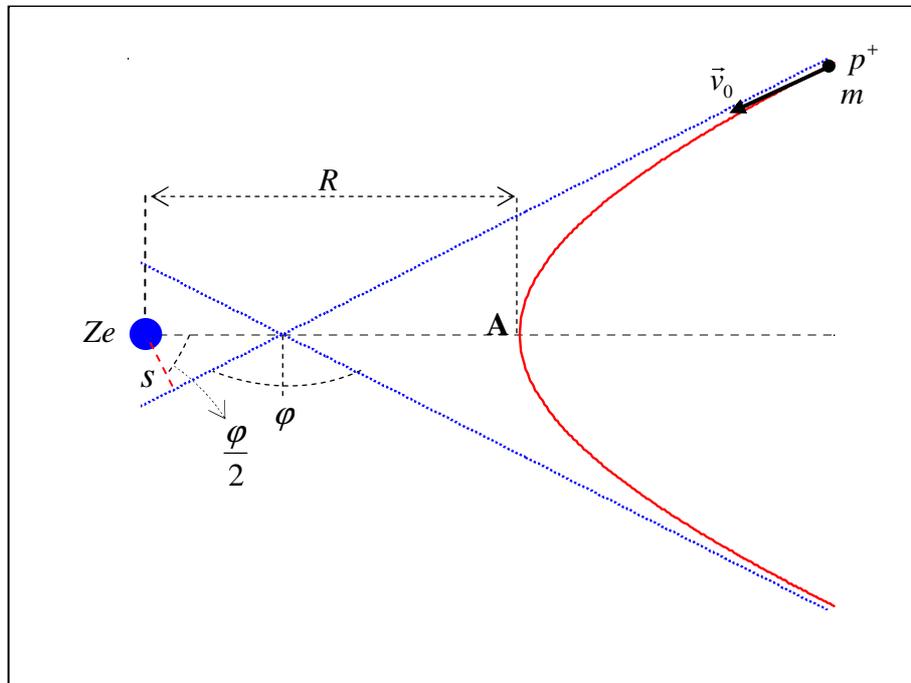
Fuerza sobre el  $p^+$ :

$$\begin{aligned} \vec{F}(r) &= k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r} = \\ &= k \frac{Ze e}{r^2} \hat{r} \\ &= k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Sobre el núcleo:

$$\vec{F}'(r) = -\vec{F}(r) = -k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}$$

donde  $k$  es una constante que depende del sistema de unidades. Por simplicidad, tomemos  $k = 1$ .



Llamemos  $R$  a la distancia de máxima aproximación del  $p^+$  al núcleo  $Ze$ , y  $s$  al *parámetro de impacto*, es decir, a la distancia perpendicular desde el núcleo hasta la

extrapolación en línea recta de la parta inicial de la trayectoria del  $p^+$ . En este caso, vamos a suponer conocida la trayectoria del  $p^+$  y a encontrar esta distancia  $R$  de máximo acercamiento.

Este es otro típico problema de dos partículas interactuantes, por lo que consideraremos el movimiento del CM y el de la partícula ficticia de masa igual a la masa reducida  $\mu$  del sistema. Sin embargo, como  $M \gg m$ , la posición del CM *prácticamente* coincide con la del núcleo, y la masa reducida  $\mu \cong m$ <sup>28</sup>, por lo que resolver para la partícula ficticia es *prácticamente*, encontrar la trayectoria del protón. La trayectoria de la partícula ficticia, como así la del protón, es una hipérbola.

- Analicemos qué magnitudes se conservan en el sistema.

➤  $\vec{p} = ct\vec{e}$  por ser un sistema aislado. El CM se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, por lo que *centraremos el SR en el CM*.

➤  $\vec{L}_O = ct\vec{e}$  por tener las dos fuerzas internas la dirección de la recta que pasa por ambas partículas, y donde O es cualquier punto del espacio que verifica alguna de las condiciones (7.6). Por conveniencia, elijamos el CM como centro de momentos:

$$\vec{L}_{CM} = ct\vec{e}$$

➤ Como en el problema anterior, las fuerzas *no son conservativas*, por depender de la posición de ambas partículas. Sin embargo, el trabajo total sí resulta conservativo y, por lo tanto, habrá una energía potencial de interacción asociada al sistema de ambas partículas. En efecto, si calculamos el trabajo diferencial total:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F}(r).d\vec{r}_2 + \vec{F}'(r).d\vec{r}_1 = k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}.(d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1) = k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}.d(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}.d\vec{r} = \\ &= k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}.d(r\hat{r}) = k \frac{Ze^2}{r^2} \hat{r}.(dr \hat{r} + rd\theta \hat{\theta}) = k \frac{Ze^2}{r^2} dr \end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, el trabajo resulta un diferencial exacto (su integral, a lo largo de un camino cerrado es nula) y, por lo tanto, la energía del sistema se conserva.

El potencial de interacción resulta:

<sup>28</sup> Por ejemplo, en el caso del oro  ${}^{197}_{79}Au$  (el isótopo más estable), como la masa de los protones es muy similar a la de los neutrones, la masa reducida (medida en unidades de masa del  $p^+$ ) resulta  $\mu = \frac{197 \times 1}{198} \cong 0.995 \cong 1$

$$\begin{aligned}
 V(r) &= -\int_{r_0}^r dW + V(r_0) = -\int_{r_0}^r k \frac{Ze^2}{r^2} dr + V(r_0) \\
 &= k \frac{Ze^2}{r} \Big|_{r_0}^r + V(r_0)
 \end{aligned}$$

Eligiendo como nivel de referencia  $r_0 \rightarrow \infty$  y  $V(r_0) = 0$ :

$$\boxed{V(r) = k \frac{Ze^2}{r}} \tag{7.61}$$

- Escribamos las magnitudes conservadas en la distancia de máximo acercamiento:

(1) Inicialmente:

$$\vec{L}_{CM} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}} = \mu(\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel) \times \vec{v}_0 = \mu r_\perp v_0 \hat{n}$$

donde  $\begin{cases} \vec{r}_\parallel \equiv \text{componente de } \vec{r} \parallel \vec{v}_0 \\ \vec{r}_\perp \equiv \text{componente de } \vec{r} \perp \vec{v}_0 \\ \hat{n} \equiv \text{versor normal al plano del movimiento} \end{cases}$

Notemos que  $\vec{r}_\perp = s \hat{r}_\perp$ ; por lo tanto:

$$\vec{L}_{CM} = \mu s v_0 \hat{n} = L \hat{n} \tag{7.62}$$

La energía es totalmente cinética, ya que el  $p^+$  se encuentra muy lejos del núcleo ( $r \rightarrow \infty$ ):

$$H = \frac{1}{2} \mu v_0^2 = E \tag{7.63}$$

(2) En el punto de máximo acercamiento (A):

$$\vec{L}_{CM} = \mu R v_A \hat{n} \tag{7.64}$$

$$H = \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \frac{Ze^2}{R} \tag{7.65}$$

Entonces, igualando (7.62) con (7.64) y (7.63) con (7.65):

$$\mu s v_0 = \mu R v_A \Rightarrow v_A = \frac{s}{R} v_0$$

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 = \frac{1}{2} \mu v_A^2 + \frac{Ze^2}{R}$$

$$\frac{1}{2} \mu v_0^2 = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{s}{R} \right)^2 v_0^2 + \frac{Ze^2}{R}$$

de donde:

$$R = \frac{Z e^2}{\mu v_0^2} + \sqrt{\left(\frac{Z e^2}{\mu v_0^2}\right)^2 + s^2} \quad (R > 0)$$

En función de los valores de la energía y del impulso angular,  $E$  y  $L$ :

$$\begin{aligned} R &= \frac{Z e^2}{2E} + \sqrt{\left(\frac{Z e^2}{2E}\right)^2 + s^2} = \\ &= \frac{L^2}{\mu^2 E} + \sqrt{\left(\frac{L^2}{\mu^2 E}\right)^2 + \frac{Z e^2}{E}} \end{aligned}$$

Por otra parte, el núcleo está en el foco de la hipérbola y existe una relación geométrica entre la distancia al foco ( $R$ ), el ángulo de desviación  $\varphi$ :

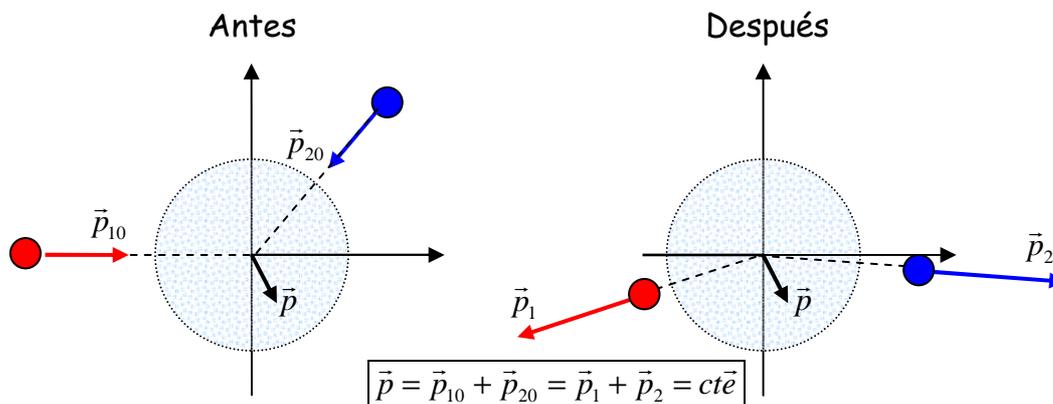
$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{R}{2s} = \frac{\frac{L^2}{\mu^2 E} + \sqrt{\left(\frac{L^2}{\mu^2 E}\right)^2 + \frac{Z e^2}{E}}}{2s}$$

La trayectoria del  $p^+$  está fijada por los valores de  $E$  y  $L$ :

- Cuanto más energético es el  $p^+$ , mayor es su penetración (es decir, menor es  $R$ ) y mayor es la desviación  $\varphi$ .
- Cuanto mayor es el impulso angular (a igual velocidad inicial, es decir, variando solo el parámetro de impacto  $s$ ), menor es la penetración (es decir, mayor es  $R$ ) y mayor es la desviación  $\varphi$ . Notar que  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \propto \frac{L^2}{L} = L$ .

### Choques de partículas

En Física, se denomina *choque* a la interacción entre dos partículas que dura un tiempo muy corto, comparado con el tiempo total de observación del fenómeno.



Analicemos qué magnitudes se conservan, considerando el sistema de ambas partículas:

- La interacción entre ellas es *interna*, por lo que en un choque, siempre se conserva el *impulso lineal total*:

$$\vec{p} = \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = ct\vec{e} \quad (7.66)$$

Como consecuencia, el CM del sistema se moverá con movimiento rectilíneo uniforme.

- Las fuerzas de interacción, además, están dirigidas a lo largo de la recta que une a ambas partículas<sup>29</sup>, por lo que también se conserva el *impulso angular total* (respecto, por ejemplo, del CM):

$$\vec{L}_{CM} = \vec{L}_{1,CM} + \vec{L}_{2,CM} = ct\vec{e}$$

Al conservarse el impulso angular, podemos asegurar que todo el movimiento se realiza en un mismo plano.

- Dependiendo del tipo de choque, la energía mecánica total puede o no conservarse. Se dice que un choque es *elástico* cuando la *energía del sistema se conserva*, es decir, cuando no se producen cambios internos en el sistema. Si, por el contrario, se pierde energía mecánica en el proceso (como, por ejemplo, energía de deformación, o calor), se habla de *choque plástico o inelástico*. Teniendo en cuenta que antes y después del choque, la energía de las partículas es solo cinética, podemos plantear, en el caso general:

$$T_{10} + T_{20} = T_1 + T_2 + Q \quad (7.67)$$

donde  $T_{10}$  ( $T_{20}$ ) es la energía cinética de la partícula 1 (2) antes del choque,  $T_1$  ( $T_2$ ) es la energía cinética de la partícula 1 (2) después del choque, y  $Q$  es la energía que pierde el sistema<sup>30</sup>. Si  $Q = 0$ , tendremos, entonces, un choque elástico.

- Notemos que, teniendo en cuenta las magnitudes que se conservan, se puede averiguar el estado final del sistema, planteando el “antes” y el “después” del choque, sin necesidad de conocer el detalle de la interacción propiamente dicha, que puede ser extremadamente complicada.

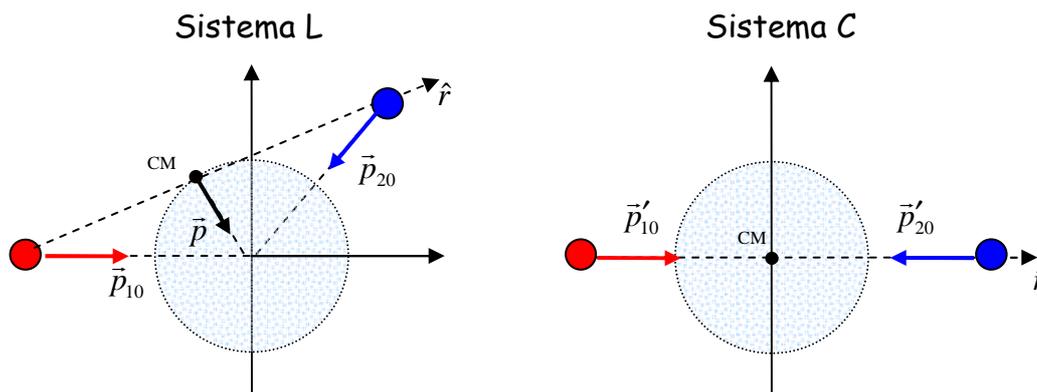
---

<sup>29</sup> Esto se cumple en la inmensa mayoría de las interacciones entre partículas. Podemos considerar, además, que se trata de fuerzas impulsivas, es decir, fuerzas intensas que actúan durante un lapso muy breve.

<sup>30</sup> En rigor, el sistema puede ganar energía interna a expensas de la energía cinética, como vamos a ver en el capítulo de Relatividad Especial.

➤ **Choque elástico**

Analicemos un choque elástico, teniendo en cuenta las magnitudes que se conservan. Como el impulso lineal se conserva, puede resultar muy conveniente plantear el choque en el sistema centro de masa (C) y, *a posteriori*, de ser necesario, volcar los resultados al sistema laboratorio (L). Notemos que el encuentro de ambas partículas se producirá en la posición del CM.



Usemos variables primadas para el sistema C. Entonces:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \left( \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) = \frac{m_2}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v} \quad (7.68)$$

$$\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \left( \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2} \right) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \equiv -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}$$

$$\vec{v}'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 \quad (7.69)$$

$$\vec{v}'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0$$

donde  $\vec{v}$  ( $\vec{v}_0$ ) es la velocidad de la partícula 1 respecto de la 2 después (antes) del choque.

- Por conservación del impulso lineal:

$$\vec{p}'_{10} + \vec{p}'_{20} = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \vec{p}'_2 = -\vec{p}'_1 = -\mu \vec{v} \\ \vec{p}'_{20} = -\vec{p}'_{10} = -\mu \vec{v}_0 \end{cases} \quad (7.70)$$

donde se tuvieron en cuenta las relacionales (7.68) y (7.69) y  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  es la masa

reducida del sistema. Si consideramos, además, que el encuentro de las partículas se produce en la posición del CM (origen del sistema C), los impulsos de ambas partículas

en el sistema C *antes del choque* solo pueden estar dirigidos a lo largo de la recta que las une<sup>31</sup>:

$$\vec{p}'_{10} = \mu v_0 \hat{r}$$

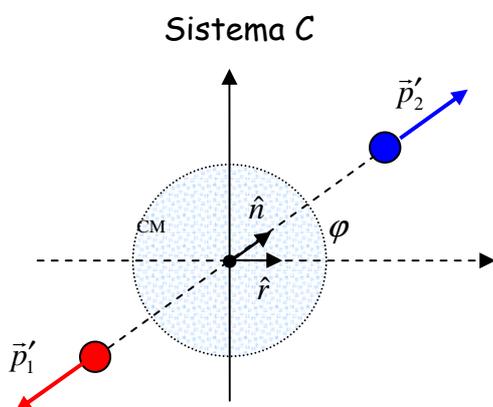
$$\vec{p}'_{20} = -\mu v_0 \hat{r}$$

- Por conservación de la energía (cf. ec.(7.33)):

$$T = \frac{1}{2} \mu v^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v^2 = cte \Rightarrow |\vec{v}_1 - \vec{v}_2| = |\vec{v}_{10} - \vec{v}_{20}| \quad (7.71)$$

Vemos que, en el sistema C, los impulsos lineales de ambas partículas continúan iguales y opuestos antes y después del choque, y sus módulos también permanecen sin variación.

- Después del choque, los impulsos lineales también van a estar dirigidos a lo largo de una recta que pase por el CM, pero el ángulo  $\varphi$  de ésta respecto de la dirección original, en principio, puede ser cualquiera y dependerá de alguna condición adicional. Es decir que, en el sistema C, el resultado del choque es, simplemente, un giro de las velocidades de ambas partículas. Llamemos  $\hat{n}$  al versor en la dirección de los impulsos finales:



$$\vec{p}'_1 = \pm \mu v_0 \hat{n}$$

$$\vec{p}'_2 = \mp \mu v_0 \hat{n}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $v = v_0$ , y que tenemos, en principio, dos posibilidades de estado final para cada ángulo  $\varphi$ .

- Para volver al sistema L, sumamos a las velocidades finales en el sistema C, la velocidad del CM:

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}_{CM} = \pm \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 \hat{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 + \vec{v}_{CM} = \mp \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 \hat{n} + \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

Los impulsos finales resultan:

<sup>31</sup> Esto se cumple si la colisión se produce en un punto, es decir, la interacción *es local*. En ese caso, el punto de encuentro solo puede ser el CM.

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 &= m_1 \vec{v}_1 = \pm \mu v_0 \hat{n} + m_1 \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \pm \mu v_0 \hat{n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{p} \\ \vec{p}_2 &= m_2 \vec{v}_2 = \mp \mu v_0 \hat{n} + m_2 \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = \mp \mu v_0 \hat{n} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{p}\end{aligned}\tag{7.72}$$

- Supongamos, como ejemplo, que una de las partículas está en reposo en el sistema L antes del choque. Sea  $m_2$  esa partícula. En ese caso, la única forma de que impacten es que la partícula 1 se esté moviendo en la dirección  $\hat{r}$ , con velocidad  $\vec{v}_{10} = v_{10} \hat{r}$  ( $v_{10} > 0$ ). Supongamos asimismo que, después del choque, ambas partículas continúan en la misma dirección inicial. En ese caso, antes del choque, en el sistema C:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_{10} &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} \\ \vec{v}'_{20} &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r}\end{aligned}$$

Después del choque:

$$\begin{aligned}\vec{v}'_1 &= \pm \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} \\ \vec{v}'_2 &= \mp \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r}\end{aligned}$$

En el sistema L, teniendo en cuenta que la velocidad del CM es:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r}$$

las velocidades finales resultan, teniendo en cuenta los dos casos posibles:

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} = v_{10} \hat{r} \\ \vec{v}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} = \vec{0} \end{cases}$$

Éste es el caso trivial: las dos partículas conservan su estado de movimiento inicial pues ¡no colisionan!.

$$\rightarrow \begin{cases} \vec{v}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} \\ \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{10} \hat{r} \end{cases}$$

En este caso, vemos que existe una transferencia de impulso y energía cinética de la partícula 1 a la partícula 2. Podemos considerar varios casos posibles, teniendo en cuenta la relación entre las masas de ambas partículas:

- $m_1 > m_2$ : ambas partículas se mueven en la dirección  $+\hat{r}$ , es decir, en el mismo sentido que se movía la partícula 1 inicialmente.
  - $m_1 < m_2$ : la partícula 1 vuelve sobre sus pasos, mientras que la 2 avanza hacia  $+\hat{r}$ .
  - $m_1 = m_2$ : la partícula 1 transfiere todo su impulso a la 2: 1 queda en reposo mientras 2 avanza con  $\vec{v}_2 = \vec{v}_{10} \hat{r}$ .
  - $m_1 \gg m_2$ : ambas partículas se mueven juntas con  $\vec{v} = \vec{v}_{10} \hat{r}$ .<sup>32</sup>
  - $m_1 \ll m_2$ : la partícula 1 “rebota” contra 2, y vuelve sobre sus pasos con  $\vec{v}_1 = -\vec{v}_{10} \hat{r}$ , mientras que la partícula 2 permanece en reposo.
- 

**Tema avanzado:**

**Conservación y Simetría: El teorema de Noether.**

Como mencionamos con anterioridad, la presencia de una constante de movimiento siempre está relacionada con una propiedad de simetría del sistema. O, equivalentemente, también podemos decir que, si el sistema posee alguna simetría, existirá una magnitud que se mantiene constante. Esta conexión fundamental entre propiedades de simetría y constantes de movimiento fue establecida por una matemática alemana, Emmy Noether, entre los años 1915 y 1918, en un célebre teorema, que constituye una herramienta esencial para la física teórica.

Mostraremos aquí una versión simplificada de dicho teorema, para relacionar las magnitudes conservadas que hemos estado estudiando, con las respectivas propiedades de simetría. Para ello, supongamos un sistema de N partículas, sometido a un potencial  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ <sup>33</sup>.

➤ **Simetría traslacional  $\Leftrightarrow$  conservación del impulso lineal.**

Empecemos definiendo a qué llamamos *simetría traslacional*. Decimos que un sistema es invariante ante traslaciones si al efectuar una traslación del mismo, no presenta cambios en sus propiedades. En particular, nos interesan sus propiedades mecánicas. Esta simetría de traslación puede ser *discreta*, si el sistema no cambia al

---

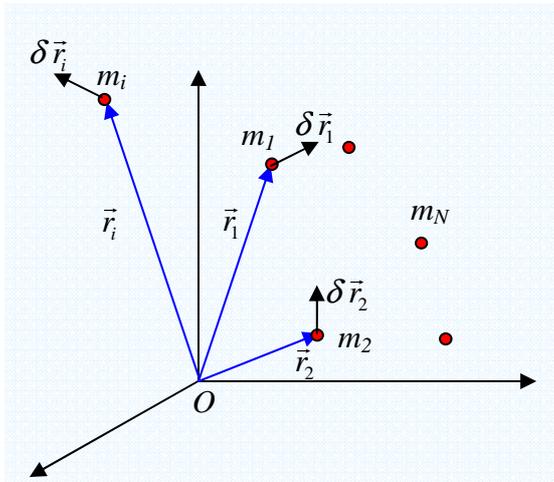
<sup>32</sup> En este caso, parece no conservarse el impulso y la energía cinética. Sin embargo, al hacer el límite:

$$\vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{10} \xrightarrow{m_1 \gg m_2} m_1 \vec{v}_{10} \text{ y } T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{10}^2 \xrightarrow{m_1 \gg m_2} \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2.$$

<sup>33</sup> La dependencia con el tiempo del potencial significa que, en principio, las fuerzas a las que están sometidas las partículas pueden depender del tiempo. Desde otro punto de vista, el sistema puede encontrarse en un campo no constante en el tiempo.

trasladarlo en un desplazamiento finito (por ejemplo, en un vector  $\vec{a}$ )<sup>34</sup>, o *continua*, si el sistema no cambia para cualquier desplazamiento. Observemos que, en este último caso, basta demostrar que el sistema no cambia cuando hacemos un desplazamiento diferencial, para que quede demostrado para cualquier desplazamiento.

Para nuestro sistema de N partículas sometido al potencial  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ , que tenga *simetría traslacional continua* significa que, si las partículas se trasladan en desplazamientos diferenciales en el espacio, el potencial que experimentan es el mismo:



$$V(\vec{r}_1 + \delta \vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N + \delta \vec{r}_N, t) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) \quad (7.73)$$

Si se da esto último, también hablamos de *homogeneidad del espacio*, es decir, para nuestro sistema, *cualquier punto del espacio es equivalente*.

Consideremos, en principio, un sistema de una única partícula. En ese caso, la ec. (7.73) resulta:

$$V(\vec{r} + \delta \vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) = 0$$

La diferencia  $V(\vec{r} + \delta \vec{r}, t) - V(\vec{r}, t)$  puede escribirse como el incremento diferencial de la función:

$$0 = V(\vec{r} + \delta \vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) = \left( \frac{dV}{dx} \hat{x} \cdot \delta \vec{x} + \frac{dV}{dy} \hat{y} \cdot \delta \vec{y} + \frac{dV}{dz} \hat{z} \cdot \delta \vec{z} \right) = \underbrace{\nabla V}_{-\vec{F}} \cdot \delta \vec{r} \quad (7.74)$$

Pero  $\nabla V = -\vec{F}$ , donde  $\vec{F}$  es la resultante de las fuerzas (exteriores) sobre la partícula. Como el desplazamiento  $\delta \vec{r}$  es totalmente arbitrario:

$$\vec{F} = \vec{0}, \text{ lo que, ya sabemos, implica que } \vec{p} = c\vec{e}$$

Por lo tanto:

*La invariancia traslacional de la partícula nos conduce a que su impulso lineal se conserva.*

<sup>34</sup> Este tipo de simetría traslacional discreta, por ejemplo, la presentan los cristales.

Si ahora consideramos el sistema de N partículas, podemos extrapolar el resultado anterior:

$$0 = V(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\nabla_i V}_{-\vec{F}_i} \cdot \delta\vec{r}_i \quad (7.75)$$

donde “ $\nabla_i$ ” es el gradiente sobre las coordenadas de la i-ésima partícula y, por lo tanto  $\nabla_i V = -\vec{F}_i$  es (menos) la resultante de las fuerzas sobre ella.

Otra vez, como los desplazamientos  $\delta\vec{r}_i$  son arbitrarios, la ec.(7.75) es nula si la resultante de las fuerzas sobre las partículas son nulas. Entonces:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{0}, \text{ o sea: } \vec{p} = c\vec{e}$$

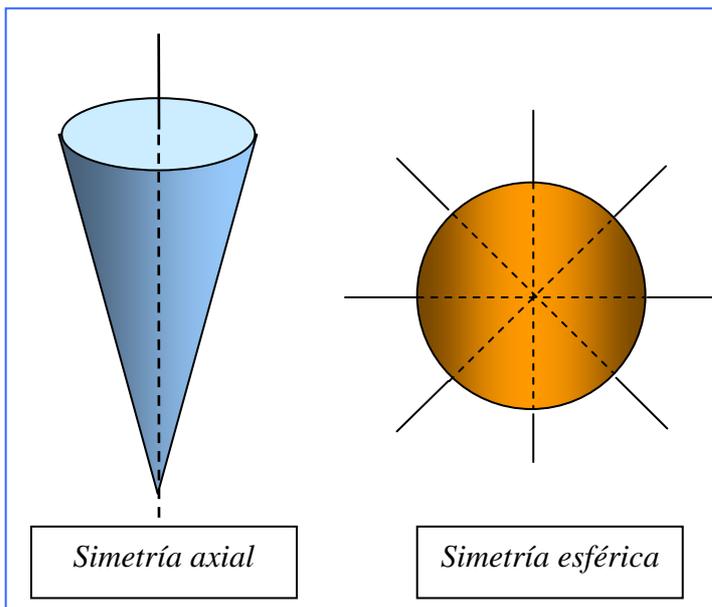
Entonces:

*Si el sistema es invariante traslacional, su impulso lineal se conserva.*

Notemos que, esta simetría puede darse, por ejemplo, en una sola dirección del espacio. En ese caso, es fácil ver que se conserva solo la componente del impulso en esa dirección.

➤ **Simetría rotacional  $\Leftrightarrow$  conservación del impulso angular.**

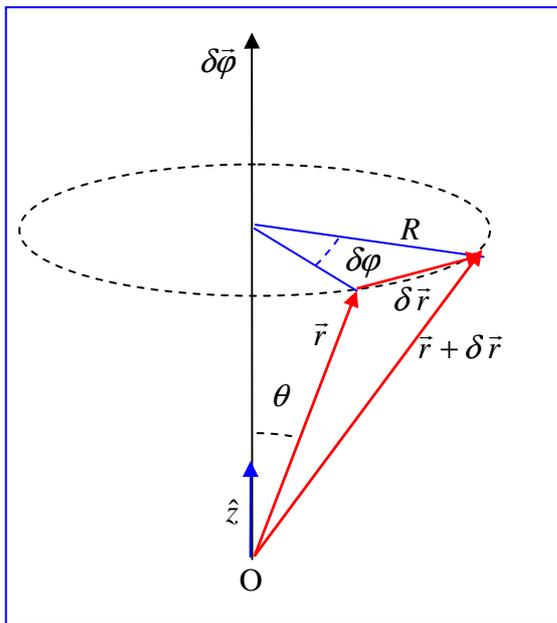
Un sistema tiene simetría rotacional cuando sus propiedades (en principio, mecánicas) no cambian al efectuar una rotación en el espacio del sistema en su conjunto.



Esta simetría puede ser *axial* o *acimutal*, si el sistema es invariante frente a una rotación alrededor de un eje fijo (con una dirección determinada en el espacio), o *esférica*, si no cambia frente a rotaciones alrededor de cualquier dirección del espacio, tal que todas estas direcciones se cruzan en un punto.

En este último caso, hablamos de *isotropía del espacio*, es decir, que, para el sistema, todas las direcciones son equivalentes. Notemos que, como en el caso de simetría traslacional, tanto para la simetría axial como para la esférica, basta con mostrar que el sistema es invariante cuando lo rotamos un ángulo infinitesimal, para que quede demostrado para todo ángulo. Esto es, teniendo en cuenta que una rotación de un ángulo finito puede pensarse como una sucesión de rotaciones de ángulos infinitesimales.

Consideremos, entonces, una rotación infinitesimal  $\delta\varphi$  alrededor de una cierta dirección del espacio. Supongamos, en principio, que nuestro sistema está formado por una única partícula, con una energía potencial  $V(\vec{r}, t)$ .



Al rotar, la posición de la partícula pasa de  $\vec{r}$  a  $(\vec{r} + \delta\vec{r})$ , con:

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{\varphi} \times \vec{r}$$

donde  $\delta\vec{\varphi} = \delta\varphi \hat{z}$  es un vector cuya magnitud es  $\delta\varphi$ , su dirección es la del eje de rotación (dada por  $\hat{z}$ ), y su sentido indica el sentido de giro de la partícula<sup>35</sup>.

Si el sistema tiene simetría de rotación respecto del eje, entonces, su energía potencial cumple:

$$V(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t) \quad (7.76)$$

Como en la ec.(7.74), la ec.(7.76) podemos re-escribirla como el incremento diferencial de la función:

$$0 = V(\vec{r} + \delta\vec{r}, t) - V(\vec{r}, t) = \delta\vec{r} \cdot \nabla V(\vec{r}, t) = (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \underbrace{\nabla V(\vec{r}, t)}_{-\vec{F}} = -(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} \quad (7.77)$$

$\vec{F}$  es la resultante de las fuerzas actuantes sobre la partícula. El último miembro de la ec.(7.77) es un producto mixto, que tiene la propiedad de que cualquier permutación cíclica de los vectores conduce al mismo resultado. Entonces:

$$0 = -(\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}) \cdot \vec{F} = -(\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \delta\vec{\varphi} = -\vec{N}_O \cdot \delta\vec{\varphi} = -\vec{N}_O \cdot \delta\varphi \hat{z} = -N_{Oz} \delta\varphi \quad (7.78)$$

<sup>35</sup> Notar que el vector rotación es, justamente,  $\vec{\Omega} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta\vec{\varphi}}{\delta t}$ ; entonces  $\vec{\Omega} \parallel \delta\vec{\varphi}$ .

donde  $N_{Oz}$  es la componente del torque de las fuerzas en la dirección del eje. Como  $\delta\varphi$  es un ángulo totalmente arbitrario, la forma en que se cumpla la ec.(7.78) para cualquier valor de  $\delta\varphi$  es que:

$$N_{Oz} = 0 \text{ que, como ya sabemos, implica que } \vec{L}_{Oz} = ct\vec{e}$$

Si ahora consideramos el sistema de N partículas, como en el caso de la simetría traslacional, podemos fácilmente extrapolar el resultado anterior:

$$0 = V(\vec{r}_1 + \delta\vec{r}_1, \vec{r}_2 + \delta\vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N + \delta\vec{r}_N, t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\nabla_i V}_{-\vec{F}_i} \cdot \delta\vec{r}_i = -\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i)$$

$$0 = -\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot (\delta\vec{\varphi} \times \vec{r}_i) = -\sum_{i=1}^N (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \cdot \delta\vec{\varphi} = -\delta\varphi \hat{z} \cdot \sum_{i=1}^N \vec{N}_{O_i} = -\delta\varphi \sum_{i=1}^N N_{Oz_i} \quad (7.79)$$

donde  $\delta\varphi$  es el mismo para todas las partículas. La ec.(7.79) se cumple si:

$$\sum_{i=1}^N N_{Oz_i} = 0 \text{ o sea } \vec{L}_{Oz} = ct\vec{e}$$

Notemos lo siguiente:

- Si la dirección del eje respecto del cual el sistema tiene simetría de rotación es *una dirección determinada del espacio*, entonces el sistema tiene simetría axial, y la *magnitud que se conserva es la componente del impulso angular en la dirección del eje*.
- Si el sistema tiene simetría esférica, lo que llamamos, arbitrariamente, dirección z, es *cualquier dirección del espacio*. Entonces, no se conserva solo una componente del impulso angular, sino *todo el vector*.

Entonces, resumiendo:

*Si el sistema tiene simetría axial, se conserva la componente del impulso angular paralela al eje de simetría*

*Si el sistema tiene simetría esférica, se conserva todo el vector impulso angular.*

➤ **Simetría frente a traslaciones temporales**  $\Leftrightarrow$  **conservación de la energía mecánica.**

Con la denominación *simetría frente a traslaciones temporales* nos estamos refiriendo, simplemente a que las propiedades del sistema no cambian con el tiempo. En ese caso, se habla de *homogeneidad temporal*.

Consideremos nuevamente el sistema de N partículas sometidas al potencial  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$ . Si existe simetría temporal, transcurrido un intervalo de tiempo diferencial  $\delta t$ , el potencial del sistema no va a cambiar:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t + \delta t) = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$$

Esto significa que  $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)$  no depende explícitamente del tiempo. Entonces:

$$0 = V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t + \delta t) - V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t) = \frac{\partial V}{\partial t} \delta t \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad ^{36} \quad (7.80)$$

Como las posiciones de las partículas sí pueden depender del tiempo, el diferencial total del potencial es:

$$\frac{dV(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N, t)}{dt} dt = \sum_{i=1}^N \nabla_i V \cdot d\vec{r} + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} dt \quad (7.81)$$

donde, nuevamente, el símbolo  $\nabla_i$  es el gradiente sobre las coordenadas de la  $i$ -ésima partícula y, por lo tanto,  $\nabla_i V = -\vec{F}_i$ , son las fuerzas aplicadas sobre dicha partícula.

Entonces, por el teorema de las fuerzas vivas:

$$dV = -\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = -\sum_{i=1}^N dW_i = -dT \quad (7.82)$$

donde  $dW_i$  es el trabajo de la fuerza  $\vec{F}_i$  sobre la  $i$ -ésima partícula, y  $dT$  es el diferencial de energía cinética total del sistema. Finalmente:

$$dV + dT = dE = 0 \Rightarrow E = cte \quad (7.83)$$

Entonces:

*Si un sistema tiene simetría frente a traslaciones temporales, (y, por lo tanto solo está sometido a un campo no dependiente del tiempo), su energía mecánica total se conserva.*

---

<sup>36</sup> El símbolo  $\frac{\partial}{\partial t}$  indica “derivada *parcial* respecto del tiempo”, y se diferencia de la derivada total en que solo es distinta de cero si la función tiene una dependencia *explícita* con el tiempo.