

## 9.2. DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

En el apartado anterior se vio que el movimiento más general de un cuerpo rígido puede considerarse como la combinación de una traslación más una rotación:

- **Traslación** de un punto cualquiera del rígido (por ejemplo, el CM), ya que todos los puntos del rígido tienen *igual velocidad de traslación*  $\vec{v}$ .
- **Rotación** respecto de un eje que pasa por el punto elegido, caracterizada por un *vector rotación*  $\vec{\Omega}$  del cuerpo. El eje de rotación siempre es paralelo al vector rotación.

En algunos casos, eligiendo convenientemente el punto, el movimiento puede describirse como una rotación pura alrededor de un eje que pasa por ese punto. Ese eje puede variar *instante a instante*, por lo que se llama *eje instantáneo de rotación*. En otros casos, no existe dicho eje.

De lo resumido en el párrafo anterior, se desprende que, para abordar la dinámica del cuerpo rígido, es necesario estudiar:

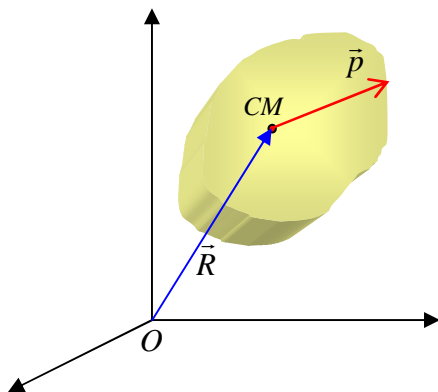
- la dinámica de la traslación, y
- la dinámica de la rotación.

Notemos que la dinámica de un cuerpo rígido no es otra cosa que la dinámica de un sistema de partículas que están fuertemente vinculadas por una relación de vínculo particular, esto es, la *condición de rigidez*. Por lo tanto, no vamos a encontrar resultados nuevos, sino, esencialmente, los mismos que obtuvimos para sistemas de partículas, pero restringidos por la condición de rigidez.

### Dinámica de la Traslación

La dinámica de la traslación es la *dinámica de una partícula*. Es usual (y conveniente), referirla al CM.

- Recordemos que la ecuación de movimiento del CM para un sistema de partículas es:



$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{p}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

$$\therefore \vec{F}^e = \dot{\vec{p}} = M\ddot{\vec{R}} \quad (9.2.1)$$

donde  $M$  es la masa total del cuerpo,  $\vec{p}$  es el impulso lineal total del cuerpo, y  $\vec{F}^e$ , las fuerzas externas al sistema.

Es decir, *el CM se mueve como si todas las fuerzas externas estuviesen aplicadas sobre él.*

- De la misma manera, se puede definir el *impulso angular del CM respecto de un centro de momentos  $O$* <sup>1,2</sup>:

$$\vec{L}_O^{CM} = \vec{R} \times \vec{p}$$

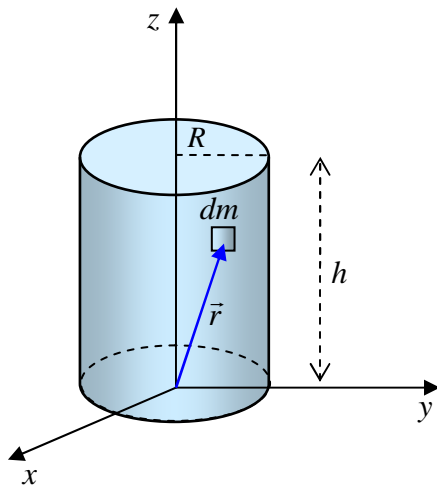
$$\frac{\vec{L}_O^{CM}}{dt} = \vec{R} \times \vec{F}^e = \vec{N}_O^e \quad (9.2.2)$$

donde  $\vec{N}_O^e$  es el torque de las fuerzas externas respecto de  $O$ . Nuevamente, es como si las fuerzas externas estuviesen aplicadas sobre el CM.

- Como ya hemos visto, la posición del CM se calcula de la misma forma que para un sistema discreto de partículas, pero considerando que el cuerpo es continuo<sup>3</sup>:

$$\vec{R} = \frac{\int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{M} \quad \text{donde } M = \int_V \rho(\vec{r}) dV \quad (9.2.3)$$

*Ejemplo:* Calculemos la posición del CM de un cilindro cuya densidad de masa en volumen  $\rho$  varía linealmente con la altura:  $\rho(z) = cz$  ( $c = cte$ ). Ubiquemos los ejes coordenados como en la figura.



La posición de un diferencial de masa,  $dm$ , es:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

La ec.(9.2.3), vectorial, se puede descomponer en tres ecuaciones escalares:

$$x_{CM} = \frac{\int_V x \rho(\vec{r}) dV}{M}$$

$$y_{CM} = \frac{\int_V y \rho(\vec{r}) dV}{M}$$

$$z_{CM} = \frac{\int_V z \rho(\vec{r}) dV}{M}$$

<sup>1</sup> Notar que se trata del impulso angular del CM, no del impulso angular del cuerpo.

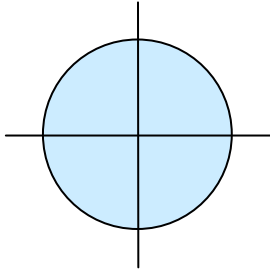
<sup>2</sup> Por simplicidad, hemos elegido como centro de momentos el punto  $O$  de la figura que, en este caso coincide con el origen del sistema de referencia. Sin embargo, recordemos que ambos puntos pueden no coincidir. Así, en la definición del impulso angular, el impulso lineal se mide respecto del sistema de referencia, y la posición, respecto del centro de momentos.

<sup>3</sup> Cf. ec.(6.1.23) del capítulo de Primeras Integrales de Movimiento. 1. Impulso Lineal o Cantidad de Movimiento.

- Antes de realizar cálculos laboriosos, notemos que, como  $\rho = \rho(z)$ :

$$x_{CM} = y_{CM} = 0$$

Es decir, el CM tiene que estar sobre el eje  $z$ . Esto puede verse fácilmente, usando un argumento de simetría<sup>4</sup>:



Si tomamos un corte del cilindro a una cierta altura  $z$ , la distribución de masa para el disco resultante es homogénea. Esto significa que el CM del disco debe encontrarse en su centro, es decir, sobre el eje  $z$ . Considerando al cilindro como una superposición de discos, el CM del conjunto también debe encontrarse sobre dicho eje.

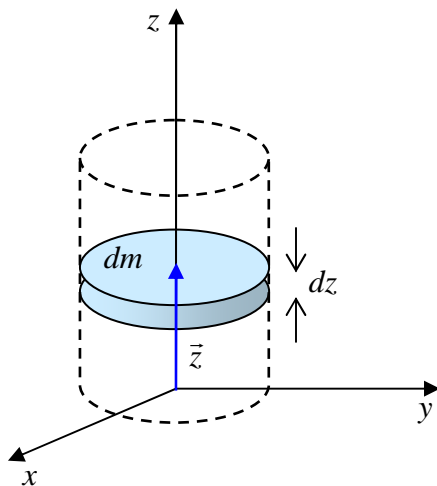
- Calculemos, entonces,  $z_{CM}$ , considerando la densidad de masa del cilindro:

$$z_{CM} = \frac{\int_V z \rho(z) dV}{M} \quad (9.2.4)$$

Debemos elegir convenientemente el diferencial de volumen. Si observamos atentamente la ec.(9.2.4), vemos que el  $dV$  que tomemos debe ser tal que:

- todos sus puntos se encuentren a la misma altura  $z$ , y
- todos sus puntos tengan la misma densidad de masa.

La elección, entonces, es clara: el diferencial de volumen más conveniente es un disco como el que analizamos, al que le agregamos un espesor  $dz$ <sup>5</sup>:



$$dV = \pi R^2 dz$$

$$\begin{aligned} z_{CM} &= \frac{1}{M} \int_0^h z \rho(z) \pi R^2 dz \\ &= \frac{\pi R^2}{M} \int_0^h z (cz) dz \end{aligned}$$

$$z_{CM} = \frac{\pi R^2}{M} \frac{1}{3} cz^3 \Big|_0^h = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2 c}{M} h^3$$

Necesitamos aún calcular la masa total  $M$ :

$$M = \int_0^h \rho(z) dV = \pi R^2 \int_0^h cz dz = \frac{1}{2} \pi R^2 ch^2$$

<sup>4</sup> Siempre es conveniente analizar la simetría del sistema antes de realizar cálculos.

<sup>5</sup> ¿No cambia la densidad de masa entre  $z$  y  $(z+dz)$ ? Efectivamente, la densidad de masa cambia como  $\rho(z+dz) \approx \rho(z) + \frac{d\rho}{dz} dz$ . Por lo tanto, a orden cero (como aparece en el integrando), la densidad de masa no cambia.

Luego:

$$z_{CM} = \frac{2}{3}h$$

Este resultado es idéntico al que se habría obtenido para un cono homogéneo de altura  $h$ , cuya generatriz cumpliera la ley  $y = cz$  (¡pensar por qué!). En el caso de un cilindro homogéneo, es fácil darse cuenta, usando razonamientos de simetría, que el CM está ubicado en  $z_{CM} = \frac{1}{2}h$ .

### ***Dinámica del Movimiento de Rotación***

- ***Impulso angular de un cuerpo rígido***

Tal como se vio en el caso de una única partícula o de un sistema de partículas, el impulso angular es la variable dinámica fundamental para el tratamiento de las rotaciones. Nuevamente, enfatizamos que el cuerpo rígido es un sistema de partículas y por lo tanto, son válidos los resultados obtenidos en dicho caso. En primer lugar, entonces, podemos decir que el impulso angular de un cuerpo rígido respecto de un punto O puede descomponerse como<sup>6</sup>:

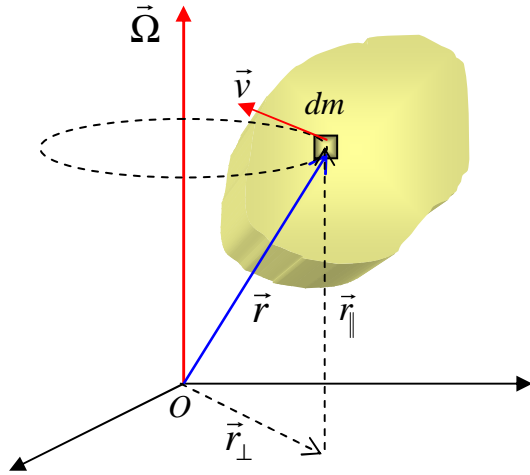
$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{p} \quad (9.2.5)$$

donde  $\vec{L}_{CM}$  es el impulso angular respecto del CM,  $\vec{p}$  es el impulso lineal total del sistema y, por lo tanto, el impulso lineal del CM y  $\vec{R}$ , la posición del CM respecto de O. El impulso angular así escrito se compone de dos términos:

- $\vec{L}_{CM}$  es el *impulso angular intrínseco* o *de spin*.
- $\vec{R} \times \vec{p} \equiv L_O^{(CM)}$  es el impulso angular *del CM respecto del origen O*.

- Vamos a calcular el impulso angular de un cuerpo rígido, y estudiar sus características. Supongamos un cuerpo que se encuentra rotando alrededor de un eje, con un vector rotación  $\vec{\Omega}$ . En la figura, el vector rotación se representa sobre dicho eje.

<sup>6</sup> Cf. ec.(6.2.22) del capítulo Primeras Integrales de Movimiento. 2. Impulso Angular.



Para un elemento de masa  $dm$ , el impulso angular respecto de un punto  $O$  sobre el eje de rotación, está dado por:

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{v} dm \quad (9.2.6)$$

Como  $dm$  rota alrededor del eje  $\vec{\Omega}$ , su velocidad es una velocidad de rotación:

$$\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}) = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{\perp} \quad (9.2.7)$$

donde hemos descompuesto el vector posición de  $dm$  en sus componentes

paralela ( $\vec{r}_{\parallel}$ ) y perpendicular ( $\vec{r}_{\perp}$ ) al eje de rotación. Introduciendo (9.2.7) en (9.2.6):

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_{\perp}) dm \quad (9.2.8)$$

Usamos la siguiente identidad vectorial:

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Entonces:

$$d\vec{L}_O = dm \left[ \vec{\Omega} \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{r}_{\perp})}_{r_{\perp}^2} - \vec{r}_{\perp} \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{\Omega})}_{r_{\parallel} \Omega} \right] = dm [r_{\perp}^2 \vec{\Omega} - r_{\parallel} \Omega \vec{r}_{\perp}] \quad (9.2.9)$$

Integrando la ec.(9.2.9) sobre toda la masa  $M$  del cuerpo:

$$\vec{L}_O = \vec{\Omega} \underbrace{\int_M r_{\perp}^2 dm}_{I_{\Omega}} - \Omega \underbrace{\int_M r_{\parallel} \vec{r}_{\perp} dm}_{\vec{I}_{\perp \Omega}} = I_{\Omega} \vec{\Omega} - \vec{I}_{\perp \Omega} \Omega = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp} \quad (9.2.10)$$

donde  $I_{\Omega}$  (magnitud escalar) se denomina *momento de inercia del cuerpo respecto del eje  $\Omega$* , e  $\vec{I}_{\perp \Omega}$  (magnitud vectorial), *producto de inercia respecto del eje  $\Omega$* . Antes de referirnos a estas cantidades, observemos lo siguiente:

- El impulso angular de un cuerpo rígido respecto de un punto  $O$  sobre el eje de rotación,  $\vec{L}_O$ , es suma de dos términos:

- Un término paralelo a  $\vec{\Omega} \Rightarrow \vec{L}_{\parallel} = I_{\Omega} \vec{\Omega}$

- Un término perpendicular a  $\vec{\Omega} \Rightarrow \vec{L}_{\perp} = -\Omega \int_M r_{\parallel} \vec{r}_{\perp} dm = -\Omega \vec{I}_{\perp \Omega}$

Es decir, en el caso de un cuerpo extenso, en general, *el impulso angular no es paralelo al vector rotación  $\vec{\Omega}$* . El término  $\vec{L}_{\perp}$  es el responsable de que la rotación del sólido, en

la mayoría de los casos, sea muy complicada. En efecto, derivemos la ec.(9.2.10), para obtener la ecuación de movimiento de  $\vec{L}_O$  en el caso más general<sup>7</sup>:

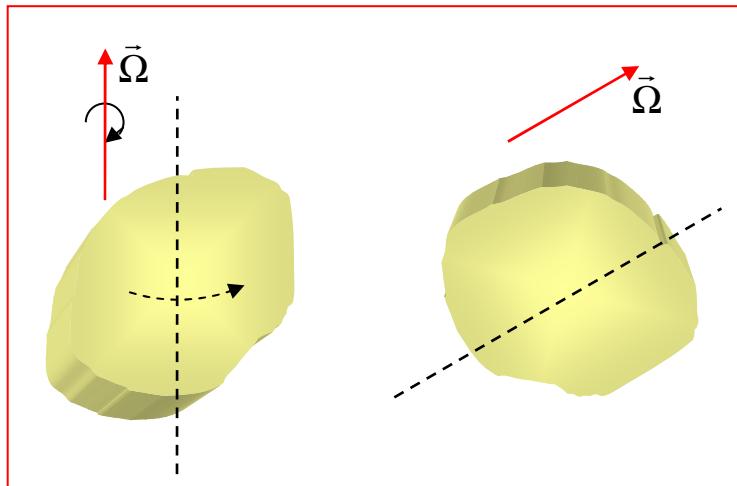
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(I_\Omega \vec{\Omega})}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p}^8 \quad (9.2.11)$$

donde  $\vec{v}_O$  es la velocidad del centro de momentos  $O$  respecto de nuestro sistema de referencia,  $\vec{N}_O^e$  es el torque de las fuerzas externas respecto de  $O$  y  $\vec{p}$  es el impulso lineal total del cuerpo. Supongamos, para simplificar nuestro análisis, que el cuerpo se encuentra libre de torques externos, y el centro de momentos es tal que  $\vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{0}$ <sup>9</sup>.

Entonces:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(I_\Omega \vec{\Omega})}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{0}$$

Notemos que, aún en el caso en que no actúen torques externos, la conservación del impulso angular no significa necesariamente que se conserve el vector rotación  $\vec{\Omega}$ , ni en dirección, ni en módulo. Esto implica, asimismo, que el eje de rotación también cambie con el tiempo. Precisamente, el término  $\dot{\vec{L}}_\perp$  puede interpretarse como un momento que tiende a hacer girar el eje de rotación:



- Veamos algunos casos en los que  $\vec{L}_\perp = \vec{0}$ . Consideremos, en todos los casos, cuerpos homogéneos y fijamos centro de momentos en un punto sobre el eje de rotación.

Llamamos:

<sup>7</sup> En rigor, no es el caso más general, ya que estamos suponiendo (como es el caso más común) que la fuerzas internas son colineales con la posición relativa entre partículas interactuantes.

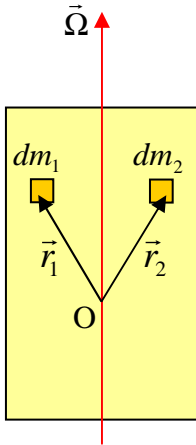
<sup>8</sup> Cf. ec.(6.2.27) del capítulo Primeras Integrales de Movimiento. 2. Impulso Angular.

<sup>9</sup> Recordemos las condiciones para que esto se cumpla: 1)  $\vec{v}_O = \vec{0}$ , 2)  $\vec{v}_O \parallel \vec{p}$ , o 3)  $O \equiv CM$

$r_{\parallel}$  : módulo de la componente paralela al eje de rotación del vector posición

$\vec{r}_{\perp}$  : componente perpendicular al eje de rotación del vector posición.

➤ Cuerpo homogéneo con un eje de simetría y tal que *el eje de rotación coincide con dicho eje de simetría*.



Tomemos dos diferenciales de masa ( $dm_1$  y  $dm_2$ ) simétricos respecto del eje de simetría y calculemos  $d\vec{L}_{\perp}$  de cada uno de éstos respecto de un punto O sobre el eje:

$$d\vec{L}_{\perp 1}^{(O)} = -\Omega r_{\parallel 1} \vec{r}_{\perp 1} dm_1$$

$$d\vec{L}_{\perp 2}^{(O)} = -\Omega r_{\parallel 2} \vec{r}_{\perp 2} dm_2$$

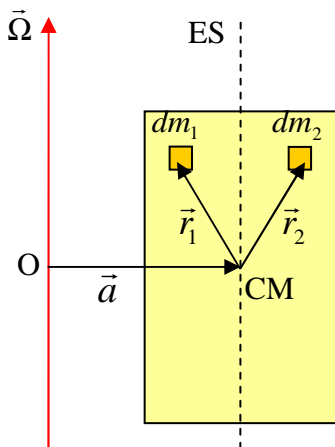
Pero:

$$r_{\parallel 1} = r_{\parallel 2} \quad ; \quad \vec{r}_{\perp 1} = -\vec{r}_{\perp 2} \quad ; \quad dm_1 = dm_2$$

$$\text{Luego: } \boxed{d\vec{L}_{\perp 1}^{(O)} + d\vec{L}_{\perp 2}^{(O)} = \vec{0}}$$

Debidos a la simetría, siempre se pueden sumar los elementos  $d\vec{L}_{\perp}$  de a pares, por lo que  $\boxed{\vec{L}_{\perp}^{(O)} = \vec{0}}$

➤ Cuerpo homogéneo con un eje de simetría y tal que *el eje de rotación es paralelo al eje de simetría*.



En este caso, tomamos el centro de momentos O sobre el eje de rotación, a *una distancia perpendicular a* del CM:

$$d\vec{L}_{\perp 1}^{(O)} = -\Omega r_{\parallel 1} (\vec{a} - \vec{r}_{\perp 1}) dm_1$$

$$d\vec{L}_{\perp 2}^{(O)} = -\Omega r_{\parallel 2} (\vec{a} + \vec{r}_{\perp 2}) dm_2$$

donde, como en el caso anterior:

$$r_{\parallel 1} = r_{\parallel 2} \equiv r_{\parallel} \quad ; \quad \vec{r}_{\perp 1} = -\vec{r}_{\perp 2} \equiv \vec{r}_{\perp} \quad ; \quad dm_1 = dm_2 \equiv dm$$

$$d\vec{L}_{\perp}^{(O)} = d\vec{L}_{\perp 1}^{(O)} + d\vec{L}_{\perp 2}^{(O)}$$

Integrando:

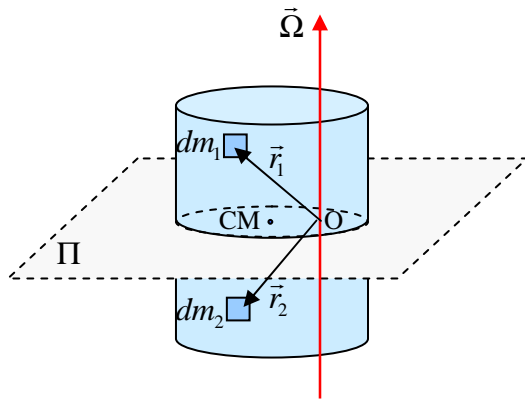
$$\vec{L}_{\perp}^{(O)} = -\Omega \int_M r_{\parallel} (\vec{a} - \vec{r}_{\perp} + \vec{a} + \vec{r}_{\perp}) dm = -2\Omega \vec{a} \int_M r_{\parallel} dm$$

La integral resulta ser la masa total  $M r_{\parallel}^{CM}$ , donde  $r_{\parallel}^{CM}$  es la coordenada paralela al eje de rotación del CM, respecto del CM, que es, obviamente, nula.

$$\boxed{\vec{L}_{\perp}^{(O)} = -2\Omega \bar{a} M r_{\parallel}^{CM} = \vec{0}}$$

➤ Cuerpo homogéneo con un plano de simetría, tal que el eje de rotación es perpendicular al plano de simetría.

Tomamos como centro de momentos O el punto de intersección entre el plano de simetría  $\Pi$  y el eje de rotación. Nuevamente, consideramos dos diferenciales de masa simétricos respecto del plano  $\Pi$ . Se ve que:



$$r_{\parallel 1} = -r_{\parallel 2} \equiv r_{\parallel}$$

$$\vec{r}_{\perp 1} = \vec{r}_{\perp 2} \equiv \vec{r}_{\perp}$$

$$dm_1 = dm_2 \equiv dm$$

Entonces:

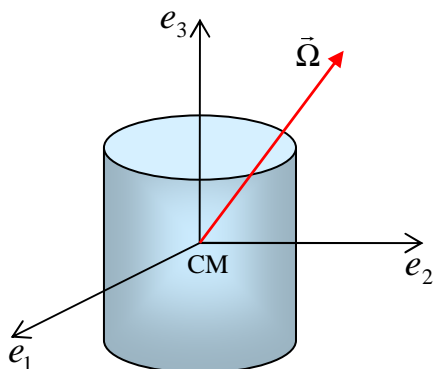
$$d\vec{L}_{\perp}^O = d\vec{L}_{\perp 1}^O + d\vec{L}_{\perp 2}^O = -\Omega r_{\parallel} \vec{r}_{\perp 1} dm_1 - \Omega r_{\parallel} \vec{r}_{\perp 2} dm_2$$

$$d\vec{L}_{\perp}^O = -\Omega r_{\parallel} \vec{r}_{\perp} dm + \Omega r_{\parallel} \vec{r}_{\perp} dm$$

$$\boxed{d\vec{L}_{\perp}^O = \vec{0}}$$

➤ Los casos que analizamos son, en realidad, casos particulares y no agotan de ningún modo las situaciones en las cuales  $\vec{L}_{\perp} = \vec{0}$ . En los cursos avanzados de Mecánica se demuestra que, *cualquiera sea la forma o la distribución de masa de un cuerpo, siempre existen (al menos) tres ejes mutuamente ortogonales y centrados en el CM del cuerpo, tales que  $\vec{L}_{\perp} = \vec{0}$  si el cuerpo rota respecto de alguno de esos ejes o respecto de un eje paralelo a éstos*, es decir  $\vec{L}_O = I_{\Omega} \vec{\Omega}$  y se conserva el eje de rotación. Estos ejes se llaman *ejes principales de inercia* y son *solidarios* al cuerpo. Si el cuerpo tiene alguna simetría, el o los ejes coincidirán con los ejes de simetría, o serán perpendiculares a un plano de simetría, tal como vimos en los casos particulares que analizamos.

Si un cuerpo rota respecto de un eje que *no es un eje principal*:



Siempre se puede descomponer  $\vec{\Omega}$  en el sistema de ejes principales  $(e_1, e_2, e_3)$ :

$$\vec{\Omega} = \Omega_1 \hat{e}_1 + \Omega_2 \hat{e}_2 + \Omega_3 \hat{e}_3$$

y entonces:

$$\boxed{\vec{L}_{CM} = I_1 \Omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \Omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \Omega_3 \hat{e}_3} \quad (9.2.12)$$



donde  $I_1, I_2, I_3$  son los momentos de inercia respecto de los ejes  $e_1, e_2, e_3$ .

- Notemos que la simplicidad de la ec.(9.2.12) es solo aparente, ya que si el vector  $\vec{\Omega}$  cambia de dirección, los ejes  $(e_1, e_2, e_3)$ , al ser ejes fijos al cuerpo, también cambian de dirección.

- En conclusión, si el cuerpo rígido está rotando alrededor de uno de sus ejes principales (o un eje paralelo a alguno de éstos), el impulso angular respecto de un punto O sobre el eje de rotación, ec.(9.2.10), toma su forma más sencilla:

$$\vec{L}_O = \vec{\Omega} \int_M r_{\perp}^2 dm = I_{\Omega} \vec{\Omega} \quad (9.2.13)$$

y la ecuación de movimiento, ec.(9.2.11):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{\Omega} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{\Omega} \vec{\gamma} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p} \quad (9.2.14)$$

Si nos encontramos en la situación en la que  $\vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{0}$ <sup>10</sup>, entonces, la ec.(9.2.14) es simplemente:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{\Omega} \vec{\gamma} = \vec{N}_O^e \quad (9.2.15)$$

donde  $\vec{\gamma}$  es el vector aceleración angular<sup>11</sup>. Notemos que, en las ecs.(9.2.14) y (9.2.15), respecto de la más general, ec.(9.2.11), el momento de inercia  $I_{\Omega}$  sale fuera de la derivada ya que, como el eje de rotación no cambia de dirección, tampoco cambia el momento de inercia.

- **Momentos de inercia**

La ec.(11), y en su forma más sencilla, la ec.(9.2.15), son las ecuaciones de movimiento del impulso angular y, por lo tanto, las ecuaciones fundamentales para estudiar la dinámica de la rotación. En particular, puede decirse que la ec.(9.2.15) es a la dinámica de la rotación, lo que la ec.(9.2.1) (el segundo principio de Newton) es a la dinámica de la traslación. Comparando ambas ecuaciones, vemos que el momento de inercia juega, en la rotación, un papel similar al de la masa en la traslación. Es decir, así como la masa es una medida de la inercia del sistema para oponerse a cambios en su estado de movimiento en la traslación, *el momento de inercia es una medida de la inercia del sistema para oponerse a cambios en su estado de rotación.*

<sup>10</sup> Ver nota 9.

<sup>11</sup> En la ec.(9.2.14) hemos vuelto a considerar que el torque de las fuerzas internas se anula.

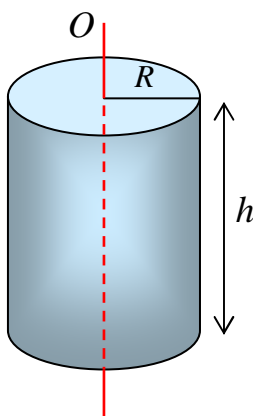
- Es interesante observar que, para producir un cambio en el estado de rotación de un cuerpo, interesa, más aún que la masa, la forma como ésta se encuentra distribuida alrededor del eje de rotación. En efecto, en la expresión del momento de inercia, la masa aparece a la primera potencia, mientras que la distancia perpendicular al eje, a la potencia dos:

$$I_{\Omega} = \int_M r_{\perp}^2 dm \quad (9.2.16)$$

- Es importante recalcar que *el momento de inercia se define respecto de un eje*. Así, no es lo mismo hacer rotar un cuerpo respecto de un eje que respecto de otro, ya que, si bien la masa es la misma, cambia su distribución.

Veamos algunos ejemplos de cálculo de momentos de inercia.

1) *Momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto de un eje longitudinal que pasa por su centro:*

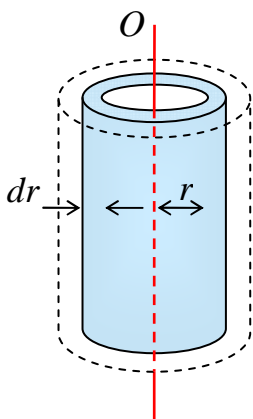


$$I_o = \int_M r_{\perp}^2 dm$$

Si la densidad del cilindro es  $\rho = cte$ :

$$dm = \rho dV$$

$$I_o = \int_M r_{\perp}^2 \rho dV$$



Elegimos un  $dV$  conveniente. Como  $r_{\perp}$  es la distancia perpendicular al eje, elegimos  $dV$  tal que sea *una porción del cilindro cuyos puntos se encuentren todos a igual distancia vertical del eje*, esto es, una cáscara cilíndrica de radio  $r$  y espesor  $dr$ <sup>12</sup>.

$$dV = 2\pi r h dr$$

Para recorrer todo el cilindro “sumamos” las contribuciones de estas cáscaras entre  $0 \leq r \leq a$ :

$$I_o = \rho \int_0^R r^2 (2\pi r h) dr = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{2} \rho h R^4$$

<sup>12</sup> Ver nota 5.

Considerando que la masa total  $M$  es:

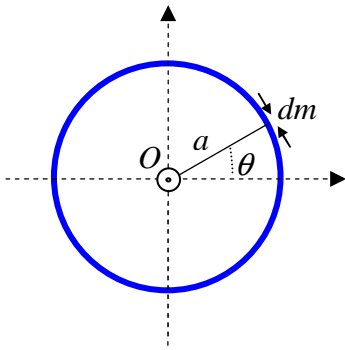
$$M = \rho(\pi R^2 h)$$

Resulta:

$$I_o = \frac{MR^2}{2} \tag{9.2.17}$$

2) Momento de inercia de un anillo homogéneo respecto de:

a) Un eje ortogonal al plano del anillo, que pasa por su centro.



Podemos despreciar la sección del anillo y considerar que es unidimensional. En ese caso:

$$dm = \lambda dl$$

donde  $\lambda = cte$  es la densidad lineal de masa.

Definiendo el ángulo  $\theta$  como en la figura:

$$dm = \lambda a d\theta$$

$$r_{\perp} = a$$

Entonces:

$$I_o = \int_0^M a^2 dm = \int_0^{2\pi} a^2 \lambda a d\theta = a^3 \lambda \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \lambda a^3$$

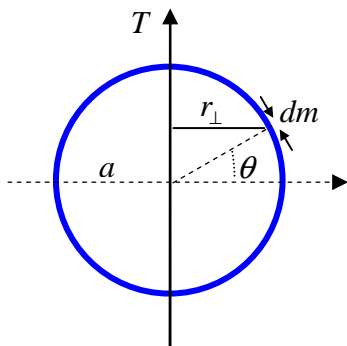
La masa total del anillo,  $M$ , es:

$$M = 2\pi a \lambda$$

Con lo que:

$$I_o = M a^2 \tag{9.2.18}$$

b) Un eje transversal que pasa por su centro.



Respecto del caso a), cambia el  $r_{\perp}$ :

$$r_{\perp} = a \cos \theta$$

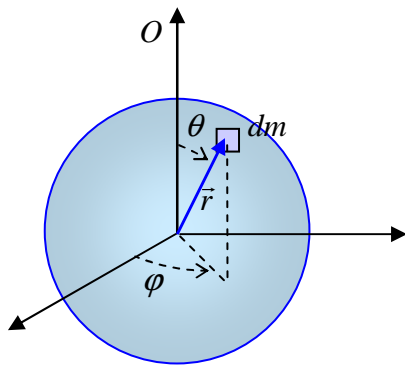
$$I_T = \int_0^{2\pi} a^2 \cos^2 \theta \lambda a d\theta = \lambda a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = \lambda a^3 \left( \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right)_0^{2\pi} = \lambda \pi a^3$$

Nuevamente,  $M = 2\pi a \lambda$ , con lo que:

$$I_T = \frac{1}{2} M a^2 \quad (9.2.19)$$

En este ejemplo se observa lo que comentamos anteriormente. Se trata del mismo anillo y, sin embargo,  $I_T = \frac{1}{2} I_O$ . La razón se debe a que, si bien se trata de la misma masa, en el caso del eje transversal, la masa se encuentra distribuida más cerca del eje que en el caso del eje ortogonal.

3) *Momento de inercia de una esfera homogénea respecto de cualquier eje que pase por su centro*<sup>13</sup>.



En coordenadas esféricas:

$$dV = r^2 \text{sen } \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$r_{\perp} = r \text{sen } \theta$$

$$I_O = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a (r^2 \text{sen}^2 \theta) r^2 \text{sen } \theta \, dr$$

$$I_O = \rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \text{sen}^3 \theta \, d\theta \int_0^a r^4 \, dr = \frac{8}{15} \rho \pi a^5$$

La masa total  $M$  es:

$$M = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho$$

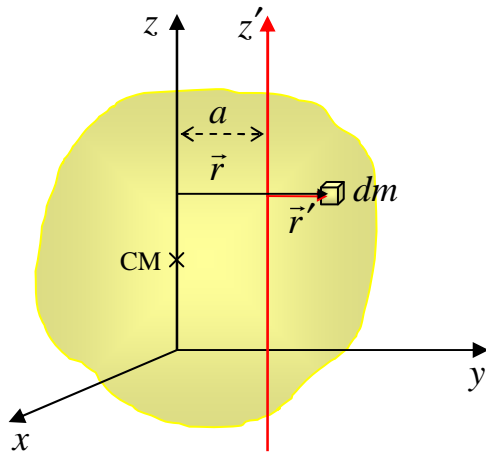
Por lo tanto, en función de la masa:

$$I_O = \frac{2}{5} M a^2 \quad (9.2.20)$$

• Todos los ejemplos anteriores tenían una particularidad que hacía fácil el cálculo: el eje de referencia pasa por el CM del cuerpo. ¿Qué pasa si se quiere calcular el momento de inercia respecto de otro eje? Siempre, al menos formalmente, se puede calcular en forma similar a los ejemplos precedentes, pero la integración puede ser muy difícil. vamos a ver cómo obviar ese cálculo en el caso particular del momento de inercia respecto de un eje, cuando se conoce el momento de inercia respecto de un eje paralelo al primero que pasa por el CM. Esto constituye el *Teorema de Steiner*, que demostraremos a continuación.

<sup>13</sup> El cálculo de este momento de inercia excede el nivel de matemática del curso. Sin embargo, se incluye como ejemplo más avanzado.

• Teorema de Steiner



Sean dos ejes  $z$  y  $z'$ , paralelos entre sí, tal que  $z$  pasa por el CM del cuerpo. Sin perder generalidad, podemos ubicar nuestros ejes coordenados tal que el eje  $z'$  corte al eje  $y$ . Sea  $a$  la distancia perpendicular entre ambos ejes. Las distancias perpendiculares al cuadrado de un  $dm$  a ambos ejes serán, entonces:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$r'^2 = x^2 + (y - a)^2$$

Los momentos de inercia respecto de ambos ejes se calculan, entonces:

$$I_z = \int_M r^2 dm = \int_M (x^2 + y^2) dm \quad (9.2.21)$$

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \int_M r'^2 dm = \int_M (x^2 + y^2 - 2ay + a^2) dm = \\ &= \underbrace{\int_M (x^2 + y^2) dm}_{I_z} + a^2 \underbrace{\int_M dm}_M - 2a \underbrace{\int_M y dm}_{My_{CM}} \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

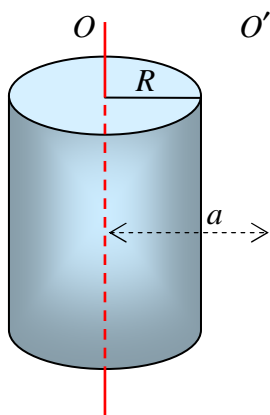
La última integral de (22) es nula:  $y_{CM} = 0$ , ya que el CM se encuentra sobre el eje  $z$ .

Entonces:

$$I_{z'} = I_z + M a^2 \quad (9.2.23)$$

- De la ec.(9.2.23) se desprende el siguiente corolario del teorema de Steiner:

*El menor momento de inercia respecto de un eje en una determinada dirección corresponde a aquél que pasa por el CM del cuerpo.*



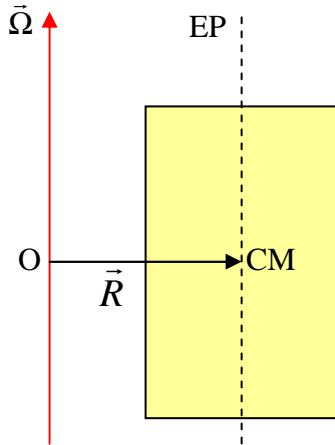
*Ejemplo:* calculemos el momento de inercia de un cilindro homogéneo respecto de un eje paralelo a su eje de simetría.

Teniendo en cuenta el resultado que obtuvimos para el momento de inercia respecto del eje  $O$ , ec.(9.2.17):

$$I_{O'} = I_O + M a^2 = \frac{MR^2}{2} + M a^2$$

$$I_{O'} = \frac{M}{2} (R^2 + 2a^2)$$

- El teorema de Steiner también nos permite deducir fácilmente una propiedad del CM. Anteriormente vimos que, para un cuerpo homogéneo con un eje de simetría y tal que el eje de rotación es paralelo a un eje principal, tomando el centro de momentos O sobre el eje de rotación, a una distancia perpendicular R del CM:



$$\vec{L}_{\perp}^{(O)} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = I_O \vec{\Omega}$$

Ahora bien, podemos también escribir, de acuerdo a la ec.(5):

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{p} \\ \Rightarrow \vec{L}_{CM} &= \vec{L}_O - \vec{R} \times \vec{p} = I_O \vec{\Omega} - \vec{R} \times \vec{p} \end{aligned} \quad (9.2.24)$$

El impulso lineal  $\vec{p}$  es:

$$\vec{p} = M \vec{v}_{CM} = M \vec{\Omega} \times \vec{R}$$

ya que el CM rota alrededor del eje  $\vec{\Omega}$ . Entonces:

$$\vec{R} \times \vec{p} = \vec{R} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = \vec{\Omega} (\underbrace{\vec{R} \cdot \vec{R}}_{R^2}) - \vec{R} (\underbrace{\vec{R} \cdot \vec{\Omega}}_0) = R^2 \vec{\Omega}$$

donde hemos usado la identidad vectorial  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$ , y tenido en cuenta que  $\vec{R} \perp \vec{\Omega}$ . Entonces:

$$\vec{L}_{CM} = I_O \vec{\Omega} - MR^2 \vec{\Omega} = (I_O - MR^2) \vec{\Omega}$$

Por el teorema de Steiner:

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\Omega} \quad (9.2.25)$$

- Igualmente, si derivamos la ec.(9.2.25):

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{CM} \vec{\gamma} = \vec{N}_{CM}^e \quad (9.2.26)$$

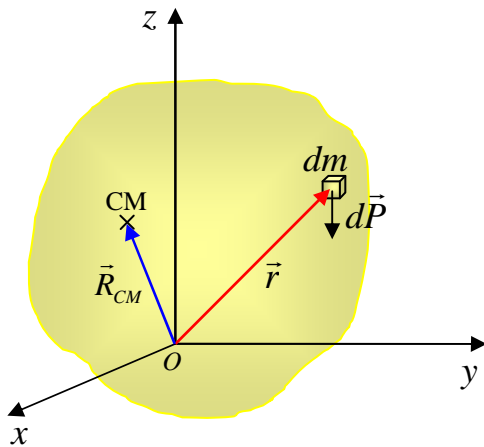
- ¿Qué significa este resultado? Si el eje de rotación es *paralelo a un eje principal*, al tomar centro de momentos en el CM, las ecuaciones de la dinámica de la rotación toman la forma sencilla de las ecs.(9.2.25) y (9.2.26), donde  $I_{CM}$  es el momento de inercia *respecto del eje paralelo al eje de rotación, que pasa por el CM*<sup>15</sup>. Esta interesante propiedad del CM hace que este punto sea otro centro de momentos muy adecuado, por la sencillez de las ecuaciones dinámicas.

<sup>14</sup> Recordemos que siempre  $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{N}_{CM}$ .

<sup>15</sup> O sea, respecto del eje principal paralelo al eje de rotación.

• **Torque de la fuerza Peso en un cuerpo continuo**

Hemos visto que, para estudiar la dinámica de la traslación de un cuerpo extenso, no importa en qué punto del cuerpo esté aplicada cada fuerza externa, ya que es *como si* todas las fuerzas estuviesen aplicadas sobre el CM. En el caso de la dinámica de la rotación, sí importa el punto específico de aplicación de cada fuerza, ya que la aceleración angular es el resultado de los torques de las fuerzas y, por lo tanto, *depende de dónde está aplicada cada fuerza*. Esto nos lleva a preguntarnos dónde se debe considerar que está aplicada la fuerza peso de un cuerpo continuo, ya que cada mínima porción de éste tiene su propio peso. La respuesta que acude rápidamente a nuestra mente es que se debe considerar que está aplicada sobre el CM del sistema. Sin embargo, esta respuesta “rápida” no debe aceptarse sin un argumento físico que la respalde. Vamos, entonces, a demostrarlo.



Calculemos el torque respecto de  $O$ , del peso  $d\vec{P}$  de cada diferencial de masa  $dm$ :

$$d\vec{N}_O = \vec{r} \times d\vec{P} = \vec{r} \times (dm \vec{g}) = dm \vec{r} \times \vec{g}$$

“Sumando” los torques de todos los  $d\vec{P}$ , obtenemos el torque total:

$$\vec{N}_O = \int_M dm \vec{r} \times \vec{g} = \underbrace{\left( \int_M dm \vec{r} \right)}_{M\vec{R}_{CM}} \times \vec{g}$$

La integral entre paréntesis es la posición del CM del cuerpo respecto de  $O$ , multiplicada por la masa total,  $M$ .

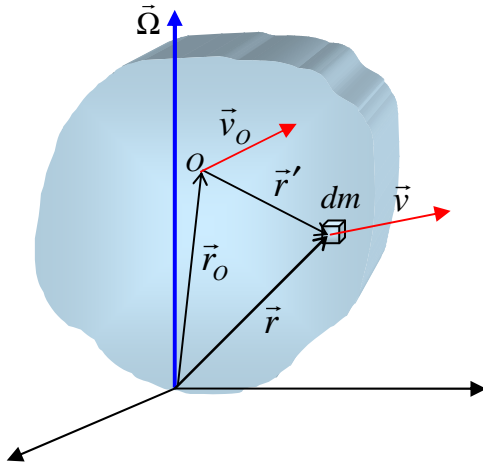
Entonces:

$$\vec{N}_O = \vec{R}_{CM} \times (M\vec{g}) \tag{9.2.27}$$

Es decir, efectivamente, *a los efectos de calcular el torque, es como si la fuerza peso estuviera aplicada sobre el CM del cuerpo*.

• **Energía cinética de un cuerpo rígido**

Supongamos un cuerpo rígido que está realizando un movimiento rototraslatorio. Su energía cinética será la “suma” de las energías cinéticas  $dT$  de cada diferencial de masa  $dm$  :



$$dT = \frac{1}{2} v^2 dm$$

$$\Rightarrow T = \int_M \frac{1}{2} v^2 dm$$

Las velocidades de todos los puntos del rígido están vinculadas. Elijamos un punto para referir la velocidad de traslación; sea  $O$  ese punto. Entonces:

$$\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times (\vec{r} - \vec{r}_O) = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}'$$

donde  $\vec{\Omega}$  es el vector rotación del cuerpo, y  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_O$ , la posición de  $dm$  respecto de  $O$ .

Calculemos  $v^2$  :

$$v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = (\vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}') \cdot (\vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \vec{r}') = v_O^2 + |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 + 2\vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$$

Entonces:

$$T = \int_M \frac{1}{2} v_O^2 dm + \int_M \frac{1}{2} |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 dm + \int_M \vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}') dm$$

$$T = \frac{1}{2} v_O^2 \underbrace{\int_M dm}_M + \int_M \frac{1}{2} |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 dm + \vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \underbrace{\int_M \vec{r}' dm}_{M\vec{R}'_{CM}})$$

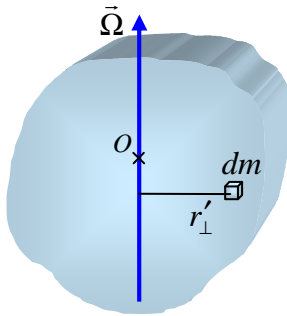
$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M v_O^2}_{T_{tras}} + \underbrace{\int_M \frac{1}{2} |\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 dm}_{T_{rot}} + \underbrace{M \vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R}'_{CM})}_{T_{rot-tras}} \quad (9.2.28)$$

$$T = T_{tras} + T_{rot} + T_{rot-tras}$$

donde  $\vec{R}'_{CM}$  es la posición del CM respecto del punto arbitrario  $O$ . Así, la energía cinética resulta ser la suma de tres términos: energía de traslación, energía de rotación y rototraslatoria. Este último término, que acopla ambos movimientos, aparece debido a que se toma como velocidad de traslación la de un punto cualquiera del rígido.



Re-escribamos la energía de rotación:



$$|\vec{\Omega} \times \vec{r}'|^2 = |\vec{\Omega} \times (\vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel})|^2 = |\vec{\Omega} \times \vec{r}'_{\perp}|^2 = \Omega^2 r'_{\perp}{}^2$$

donde  $r'_{\perp}$  es la distancia de  $dm$  a  $O$ , perpendicular al vector  $\vec{\Omega}$ .

Entonces:

$$T_{rot} = \frac{1}{2} \Omega^2 \int_M r'_{\perp}{}^2 dm = \frac{1}{2} \Omega^2 I_O \quad (9.2.29)$$

donde  $I_O$  es el momento de inercia respecto del eje paralelo a  $\vec{\Omega}$  que pasa por  $O$ .

Entonces, la energía cinética del cuerpo resulta:

$$T = T_{tras} + T_{rot} + T_{rot-tras} = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_O \Omega^2 + M \vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R}'_{CM}) \quad (9.2.30)$$

• La energía cinética del cuerpo rígido tiene una expresión más simple en dos casos particulares:

➤ Si elegimos como punto  $O$  para referir la velocidad de traslación al CM. En ese caso, el término rototraslatorio se anula:

$$T_{rot-tras} = M \vec{v}_{CM} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R}'_{CM}) = M \vec{v}_{CM} \cdot [\vec{\Omega} \times (\vec{R}_{CM} - \vec{R}_{CM})] = 0$$

ya que,  $\vec{R}'_{CM}$  está medido desde el punto que tomamos como referencia (o sea, en este caso, el propio CM)

Luego, en este caso:

$$T = T_{tras} + T_{rot} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 \quad (9.2.31)$$

donde  $I_{CM}$  es el momento de inercia respecto del eje paralelo a  $\vec{\Omega}$  que pasa por el CM.

La elección del CM como punto para referir la traslación desacopla ambos movimientos<sup>16</sup>.

➤ Si existe un eje instantáneo de rotación (EIR), y  $O$  es un punto sobre el eje. En ese caso,  $\vec{v}_O = \vec{0}$  y toda la energía cinética del cuerpo se expresa como energía de rotación:

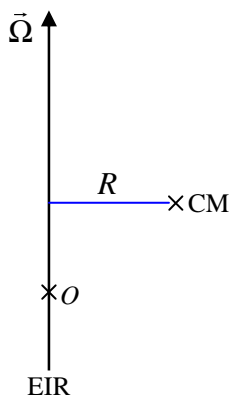
<sup>16</sup> Esto se relaciona con que, justamente, el CM es el punto del cuerpo al que se aplica la dinámica de la traslación.

$$T = T_{tras} + T_{rot} + T_{rot-tras} = \frac{1}{2} M v_O^2 + \frac{1}{2} I_O \Omega^2 + M \vec{v}_O \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{R}'_{CM})$$

$$T = T_{rot} = \frac{1}{2} I_O \Omega^2 \quad (9.2.32)$$

En este caso, al existir un eje de rotación, el movimiento puede describirse como una rotación pura.

- Notemos que las ecs.(9.2.30), (9.2.31) y (9.2.32) son expresiones diferentes para la misma energía cinética, ya que solo estamos tomando distintos puntos como referencia, y, por lo tanto, pueden interconvertirse una en la otra. Por ejemplo, las ecs. (9.2.31) y (9.2.32):



En módulo, la velocidad del CM es:

$$v_{CM} = \Omega R$$

Entonces, en (9.2.31):

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 = \frac{1}{2} M R^2 \Omega^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 \\ &= \frac{1}{2} \Omega^2 \underbrace{(M R^2 + I_{CM})}_{I_O} = \frac{1}{2} I_O \Omega^2 \end{aligned}$$

donde, por el teorema de Steiner,  $I_O = M R^2 + I_{CM}$ , es el momento de inercia respecto del eje que pasa por  $O$ , es decir, el EIR.

- Algunas observaciones importantes:

➤ Por el teorema de las fuerzas vivas:

$$\Delta T = W^e$$

El trabajo de las fuerzas se divide ahora proveyendo energía cinética de traslación y energía cinética de rotación.

➤ La energía total  $H = T + V$  será constante si el trabajo de las fuerzas externas no conservativas es nulo:

$$H = cte \Leftrightarrow W_{NC}^e = 0 \quad (9.2.33)$$

Notemos que, para un cuerpo rígido, el trabajo de las fuerzas internas (en particular, las no conservativas), se anula siempre, ya que se cumple la condición:

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cte \quad \forall (i, j) \Rightarrow W^{int} = 0$$

Por este motivo, no se consideran las fuerzas internas no conservativas en la ec.(9.2.33).

*Ejemplo:*

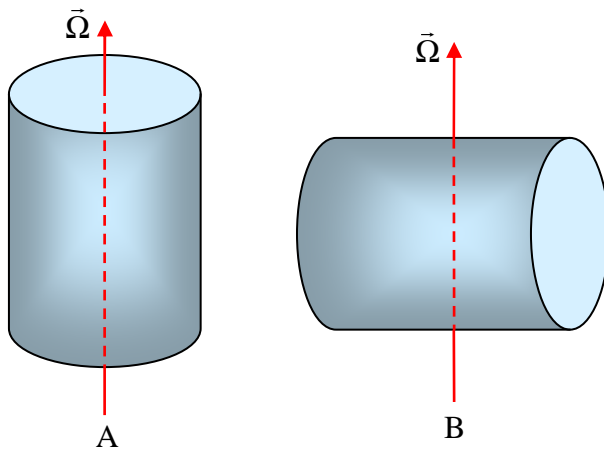
Supongamos que se quiere hacer rotar un cilindro con una cierta velocidad angular  $\Omega$ .

¿Alrededor de cuál de los dos ejes de la figura “costará” más dotar al cilindro de esa velocidad angular  $\Omega$ ?

Notemos que “costar” significa, en nuestro contexto físico, “hacer más trabajo”.

Por el teorema de las fuerzas vivas:

$$\Delta T = W^e$$



Como en ambos casos el cilindro parte del reposo, el trabajo será:

$$W^e = T_{final} = \frac{1}{2} I_{\Omega} \Omega^2$$

donde  $I_{\Omega} = I_A$  ó  $I_{\Omega} = I_B$

Por lo tanto, se hará más trabajo en aquel caso en el que el momento de inercia sea mayor. La masa del cilindro se encuentra más

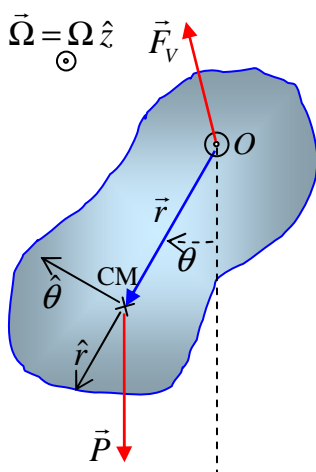
distribuida respecto del eje B, por lo que:

$I_B > I_A \Rightarrow$  cuesta más trabajo hacer rotar al cilindro alrededor del eje B que alrededor del eje A. Como mencionamos anteriormente, a los efectos de la rotación interesa la forma como la masa se encuentra distribuida alrededor del eje de rotación, más aún que la propia masa.

*Un par de ejemplos clásicos:*

### 1) El péndulo físico

Se llama *péndulo físico* a un cuerpo extenso con un eje fijo, de tal manera que puede realizar un movimiento pendular alrededor de dicho eje.



Estudiamos la dinámica del movimiento de este cuerpo de masa  $M$ , teniendo en cuenta la dinámica de la traslación (a partir de las ecuaciones de fuerzas, ec.(1)), y la dinámica de la rotación (a partir de las ecuaciones de

momentos, ecs.(9.2.11) o (9.2.14)). En el dibujo, el eje de rotación pasa por el punto  $O$ .

Las fuerzas presentes en el sistema son: el peso  $\vec{P}$ , aplicado sobre el CM, y la fuerza de vínculo que fija el eje de rotación,  $\vec{F}_V$ , aplicada sobre este eje.

Consideremos un punto  $O$  que se encuentre sobre el eje de rotación, a la misma altura que el CM. Por la condición de rigidez, existe una distancia fija entre ambos puntos. Sea  $R$  esa distancia.

Entonces, tenemos una condición de vínculo:

$$|\vec{r}| \equiv r = R \tag{9.2.34}$$

- Dinámica de la traslación:

De acuerdo a la ec.(9.2.1):

$$M \vec{a}_{CM} = \vec{P} + \vec{F}_V$$

En componentes, considerando coordenadas polares:

$$\hat{r}) M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = Mg \cos \theta + F_{Vr} \tag{9.2.35}$$

$$\hat{\theta}) M(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -Mg \operatorname{sen} \theta + F_{V\theta} \tag{9.2.36}$$

Considerando la relación de vínculo (9.2.34):

$$\hat{r}) -MR\dot{\theta}^2 = Mg \cos \theta + F_{Vr} \tag{9.2.37}$$

$$\hat{\theta}) MR\ddot{\theta} = MR\dot{\Omega} = -Mg \operatorname{sen} \theta + F_{V\theta} \tag{9.2.38}$$

donde hemos considerado que  $\ddot{\theta} \hat{z} = \dot{\Omega}$  es el vector aceleración angular del sistema. Las ecs.(9.2.37) y (9.2.38) no nos resultan aún muy útiles, ya que contienen las componentes de la fuerza de vínculo, que son incógnitas.

- Dinámica de la rotación:

Partimos de la ec.(9.2.11):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(I_\Omega \vec{\Omega})}{dt} + \frac{d\vec{L}_\perp}{dt} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p}$$

Como el eje está fijo, no importa si corresponde (o es paralelo) a un eje principal del cuerpo, ya que no existe posibilidad de que éste cambie y, por lo tanto, el término  $\dot{\vec{L}}_\perp$  de la ec.(9.2.11) se anula:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_\Omega \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p}$$

Elijamos un centro de momentos adecuado, tal que el término  $\vec{v}_o \times \vec{p} = \vec{0}$ . Tenemos dos opciones:

1. El CM.
2. Un punto tal que  $\vec{v}_o = \vec{0}$ , esto es, un punto sobre el eje de rotación *fijo*. Sea  $O$  ese punto.

Analicemos las opciones. Si elegimos el CM, la fuerza que hace torque es  $\vec{F}_V$ . Si elegimos el punto  $O$ , es  $\vec{P}$  la fuerza que hace torque. Cualquiera de las dos opciones es posible; sin embargo, en este caso parece más conveniente el punto  $O$ , ya que  $\vec{F}_V$  es una incógnita del problema:

$$I_o \dot{\vec{\Omega}} = I_o \ddot{\theta} \hat{z} = \vec{N}_o^e = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$I_o \ddot{\theta} \hat{z} = R \hat{r} \times (Mg \cos \theta \hat{r} - Mg \text{sen} \theta \hat{\theta})$$

$$I_o \ddot{\theta} \hat{z} = -RMg \text{sen} \theta \hat{z} \Rightarrow \boxed{I_o \ddot{\theta} + RMg \text{sen} \theta = 0} \quad (9.2.39)$$

donde  $I_o$  es el momento de inercia respecto del eje que pasa por  $O$ . La ec.(9.2.39) constituye la *ecuación de movimiento del cuerpo* y el ángulo  $\theta$  la coordenada de movimiento. No es la ecuación de un movimiento armónico. Integremos la ecuación para encontrar cómo varía la velocidad angular  $\Omega = \dot{\theta}$ :

$$\ddot{\theta} = -\frac{RMg \text{sen} \theta}{I_o} \quad (9.2.40)$$

Usando la regla de la cadena:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} \dot{\theta} = -\frac{RMg \text{sen} \theta}{I_o} \Rightarrow \int_{\Omega_0}^{\Omega(\theta)} \dot{\theta} d\dot{\theta} = \int_0^\theta -\frac{RMg \text{sen} \theta}{I_o} d\theta$$

donde hemos considerado que  $\Omega(\theta = 0) = \Omega_0$ . Integrando:

$$\frac{1}{2}(\Omega^2 - \Omega_0^2) = \frac{RMg}{I_o}(\cos \theta - 1) \Rightarrow \boxed{\Omega(\theta) = \left[ \Omega_0^2 - 2 \frac{RMg}{I_o} (1 - \cos \theta) \right]^{1/2}} \quad (9.2.41)$$

• Calculemos la fuerza de vínculo  $\vec{F}_V$ . Para ello, ahora sí, usaremos las ecuaciones de fuerzas (9.2.37) y (9.2.38):

$$\hat{r}) - MR\dot{\theta}^2 - Mg \cos \theta = F_{Vr}$$

$$\hat{\theta}) MR\ddot{\theta} + Mg \text{sen} \theta = F_{V\theta}$$

Para la componente radial, tenemos en cuenta la ec.(9.2.41):

$$F_{Vr} = -MR\Omega_0^2 + 2\frac{RMg}{I_o}(1 - \cos\theta) - Mg \cos\theta$$

$$F_{Vr} = MR\left(\frac{2RMg}{I_o} - \Omega_0^2\right) - Mg\left(\frac{2MR^2}{I_o} + 1\right)\cos\theta \quad (9.2.42)$$

Para la componente en la dirección  $\hat{\theta}$ , consideramos la ec.(9.2.40):

$$F_{V\theta} = MR\left(-\frac{RMg\text{sen}\theta}{I_o}\right) + Mg \text{sen}\theta = Mg\text{sen}\theta\left(-\frac{MR^2}{I_o} + 1\right)$$

$$F_{V\theta} = Mg\frac{I_{CM}}{I_o}\text{sen}\theta \quad (9.2.43)$$

Notemos que la componente  $\theta$  de la fuerza de vínculo también podemos calcularla a partir de la ecuación de torques, pero tomando el CM como centro de momentos:

$$I_{CM}\ddot{\theta}\hat{z} = -R\hat{r} \times (F_{Vr}\hat{r} + F_{V\theta}\hat{\theta}) = -RF_{V\theta}\hat{z}$$

$$F_{V\theta} = -\frac{I_{CM}}{R}\ddot{\theta} = -\frac{I_{CM}}{R}\left(-\frac{RMg\text{sen}\theta}{I_o}\right) = Mg\text{sen}\theta\frac{I_{CM}}{I_o}$$

resultado que coincide con (9.2.43)<sup>17</sup>

- Podemos considerar también el caso de *pequeñas oscilaciones*<sup>18</sup>, es decir que el ángulo  $\theta \approx 0$ . En ese caso, reordenado la ecuación:

$$\ddot{\theta} + \frac{RMg}{I_o}\theta = 0 \quad (9.2.44)$$

De la ec.(9.2.44), podemos ver que el período de este movimiento es:

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{I_o}{RMg}} = 2\pi\sqrt{\frac{(I_{CM} + MR^2)}{RMg}}$$

Se observa que, cuanto mayor es la distancia entre el punto de sujeción  $O$  y el CM, más lento es el movimiento (mayor es el período). Lo mismo sucede cuanto mayor es el momento de inercia respecto del CM, es decir, cuanto más distribuida esté la masa del sistema alrededor del eje que pasa por el CM.

La solución de la ec.(9.2.44) es:

$$\theta(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{RMg}{I_o}}t + \varphi\right) \quad (9.2.45)$$

<sup>17</sup> Claro que, también usamos la ec.(9.2.40).

<sup>18</sup> Podemos realizar pequeñas oscilaciones alrededor de  $\theta = 0$ , ya que éste es un punto de equilibrio estable.

donde la amplitud  $A$  y la fase inicial  $\varphi$  se determinan con las condiciones iniciales del problema. Consideremos, por ejemplo:

$$\theta(t=0) = 0$$

$$\dot{\theta}(t=0) = \Omega_0$$

Resulta:

$$\theta(t) = \Omega_0 \sqrt{\frac{I_o}{RMg}} \operatorname{sen} \left( \sqrt{\frac{RMg}{I_o}} t \right) \quad (9.2.46)$$

$$\Omega(t) \equiv \dot{\theta}(t) = \Omega_0 \cos \left( \sqrt{\frac{RMg}{I_o}} t \right) \quad (9.2.47)$$

Podemos también, como en el caso anterior, encontrar  $\dot{\theta}(\theta)$  :

$$\Omega = \Omega_0 \left[ 1 - \operatorname{sen}^2 \left( \sqrt{\frac{RMg}{I_o}} t \right) \right]^{\frac{1}{2}} = \Omega_0 \left[ 1 - \frac{1}{\Omega_0^2} \frac{RMg}{I_o} \theta^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega(\theta) = \left( \Omega_0^2 - \frac{RMg}{I_o} \theta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9.2.48)$$

• Para calcular  $\vec{F}_v$  en el caso de pequeñas oscilaciones, las ecuaciones (9.2.37) y (9.2.38) resultan:

$$\hat{r}) - MR\dot{\theta}^2 - Mg = F_{vr} \quad (9.2.49)$$

$$\hat{\theta}) MR\ddot{\theta} + Mg\theta = F_{v\theta} \quad (9.2.50)$$

Considerando las ecs.(9.2.44) y (9.2.48), resulta:

$$F_{vr} = -MR \left( \Omega_0^2 - \frac{RMg}{I_o} \theta^2 \right) - Mg$$

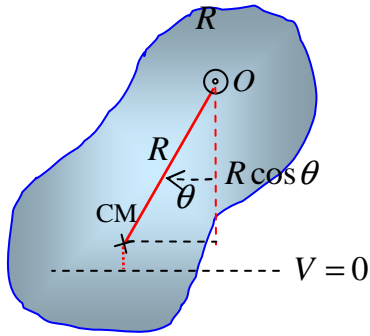
$$F_{v\theta} = Mg\theta \frac{I_{CM}}{I_o} \quad (9.2.51)$$

• Analicemos la conservación de la energía. De las dos fuerzas presentes, el peso es conservativa, mientras que la fuerza de vínculo no lo es. Sin embargo, esta última, aplicada sobre los puntos del eje de rotación, no hace trabajo:

$$dW = \vec{F}_v \cdot d\vec{r}_o = \vec{F}_v \cdot \underbrace{\vec{v}_o}_{\vec{0}} dt = 0$$

ya que  $\vec{v}_O = \vec{0}$  para los puntos sobre el eje. Por lo tanto, la energía se conserva.

$$H = \frac{1}{2} I_O \Omega^2 + MgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} I_O \Omega_0^2 \quad (9.2.52)$$



donde consideramos el nivel de referencia del potencial gravitatorio en la posición del CM para  $\theta = 0$ .

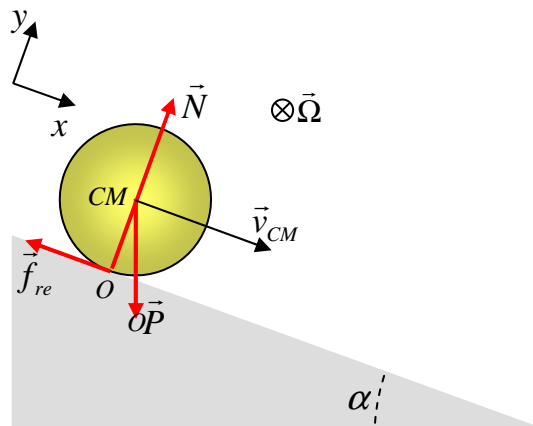
Podemos despejar la velocidad angular en función del ángulo  $\theta$ :

$$\Omega(\theta) = \left[ \Omega_0^2 - \frac{2MgR}{I_O} (1 - \cos \theta) \right]^{1/2}$$

resultado que coincide con el obtenido en la ec.(9.2.41) por integración de las ecuaciones dinámicas.

## 2) Dinámica de la rodadura

Supongamos un cuerpo que rueda sin deslizar por un plano inclinado. Sea, por ejemplo, un cilindro de radio de base  $R$  y masa  $m$ .



Hemos visto que, para un cuerpo que rueda sin deslizar, la relación entre la velocidad del CM,  $\vec{v}_{CM}$ , y el vector rotación  $\vec{\Omega}$  es:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{CM} &= \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_O) \\ \vec{v}_{CM} &= \Omega \hat{z} \times R \hat{y} = -\Omega R \hat{x} \end{aligned} \quad (9.2.53)$$

donde se ve que  $\Omega < 0$ , ya que el CM avanza hacia las  $x > 0$ .  $O$  es el punto de contacto entre el cuerpo y la

superficie, y es tal que  $\vec{v}_O = \vec{0}$ . Por el punto  $O$  pasa el EIR del cuerpo.

• Las ecuaciones de fuerzas serán:

$$x) P \sin \alpha - f_{re} = m \ddot{x}_{CM} \quad (9.2.54)$$

$$y) N - P \cos \alpha = 0 \quad (9.2.55)$$

Notemos que, si el cuerpo no desliza, la fuerza de rozamiento,  $\vec{f}_{re}$ , es estática, pues el punto del cuerpo sobre el que está aplicada está instantáneamente en reposo respecto de



la superficie. Luego, su valor no se puede conocer a priori y constituye una incógnita más del problema.

- Planteemos la ecuación de torques. Nos preguntamos cuáles son los centros de momentos convenientes, tal que la ecuación de movimiento del impulso angular sea la ec.(9.2.15):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_\Omega \vec{\gamma} = \vec{N}_O^e \quad (9.2.15)$$

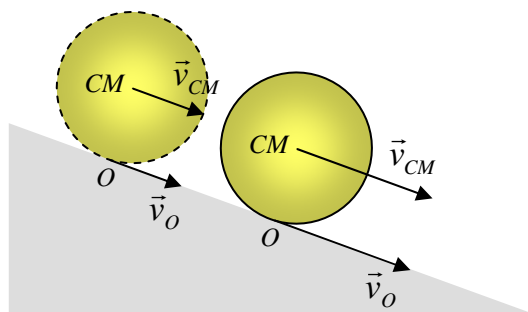
y no la ec.(9.2.14):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_\Omega \vec{\gamma} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p} \quad (9.2.14)$$

es decir, que se anule el término  $\vec{v}_O \times \vec{p}$ .

- El CM (obviamente...)
- El punto  $O$ . En este caso, cabe una aclaración importante. Este punto resulta un centro de momentos conveniente, pues *su velocidad es paralela a la velocidad del CM* y no por ser un punto del EIR. En efecto, recordemos, la conclusión a la que llegamos en el capítulo Teoremas de Conservación:

$\vec{v}_O$  es la velocidad con que se desplaza **el punto del espacio** elegido como origen de momentos, y su velocidad **no es nula**, en general, y no la de los puntos materiales por los cuales, instante a instante, pasa el EIR. Por lo tanto, es un error considerar, en general, que un punto, por el solo hecho de pertenecer al EIR, es un centro de momentos conveniente, que cumple con la ecuación de movimiento (9.2.15).



En este caso, el centro de momentos  $O$  (punto del espacio, **no** del cuerpo) se desplaza sobre la superficie, y su velocidad es paralela a la velocidad del CM. Por lo tanto  $\vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{0}$ , y la ecuación de evolución del impulso angular es la ec.(9.2.15).

Los *puntos materiales del cuerpo* que quedan en contacto con la superficie sí tienen, instante a instante, velocidad nula.

- Con el mismo criterio del ejemplo anterior, elegimos el punto  $O$  como centro de momentos:

$$\vec{N}_O^e = R\hat{y} \times Mg(\text{sen}\alpha \hat{x} - \text{cos}\alpha \hat{y}) = -MgR\text{sen}\alpha \hat{z} = I_O \vec{\gamma}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\gamma} = -\frac{MgR\text{sen}\alpha}{I_O} \hat{z}} \quad (9.2.56)$$

donde  $\vec{\gamma} = \dot{\vec{\Omega}}$  es el vector aceleración angular. La ec.(53) nos da la relación entre la aceleración del CM,  $\vec{a}_{CM} = \ddot{x}_{CM} \hat{x}$  y  $\vec{\gamma}$ . Derivando:

$$\vec{a}_{CM} = -\gamma R \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_{CM} = \frac{MgR^2 \text{sen}\alpha}{I_O} \hat{x}} \quad (9.2.57)$$

A partir de la ec.(9.2.54) despejamos el valor de la fuerza de rozamiento estática  $\vec{f}_{re}$ :

$$f_{re} = Mg \text{sen}\alpha - M\ddot{x}_{CM} = Mg \text{sen}\alpha \left(1 - \frac{MR^2}{I_O}\right)$$

$$\boxed{f_{re} = Mg \text{sen}\alpha \frac{I_{CM}}{I_O}}^{19} \quad (9.2.58)$$

De la ec.(55) conocemos el valor de la normal:

$$\boxed{N = Mg \text{cos}\alpha} \quad (9.2.59)$$

Notemos que, para que el cuerpo no deslice:

$$0 \leq f_{re} \leq \mu_e N = \mu_e Mg \text{cos}\alpha$$

$$0 \leq Mg \text{sen}\alpha \frac{I_{CM}}{I_O} \leq \mu_e Mg \text{cos}\alpha \Rightarrow \boxed{\text{tg}\alpha \leq \mu_e \frac{I_{CM}}{I_O}} \quad (9.2.60)$$

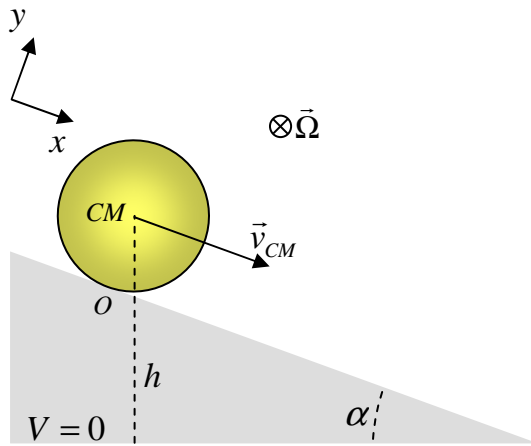
donde  $\mu_e$  es el coeficiente de rozamiento estático (cf. con la condición para un cuerpo que solo se traslada:  $\text{tg}\alpha \leq \mu_e$ ).

<sup>19</sup> Notemos que nuestra presunción del sentido de la fuerza de rozamiento fue correcto. Como esta fuerza es una incógnita más del problema, su sentido a veces no es claro y el resultado puede contradecir el planteo inicial.

- Analicemos el movimiento energéticamente. En primer lugar, notemos que la energía se conserva ya que las fuerzas no conservativas,  $\vec{N}$  y  $\vec{f}_{re}$  no hacen trabajo:

$$dW^{NC} = \vec{N} \cdot d\vec{r}_O + \vec{f}_{re} \cdot d\vec{r}_O = (\vec{N} + \vec{f}_{re}) \cdot \vec{v}_O dt = 0$$

ya que la velocidad del *punto material* donde están aplicadas las fuerzas es nula.



- Si consideramos el movimiento como una traslación con  $\vec{v}_{CM}$  y una rotación alrededor del eje que pasa por el CM:

$$H = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 + Mgh \quad (9.2.61)$$

donde  $h$  es la altura del CM al nivel de referencia.

- Si lo consideramos como una rotación pura alrededor del eje que pasa por  $O$ :

$$H = \frac{1}{2} I_O \Omega^2 + Mgh = E \quad (9.2.62)$$

Las ecs.(9.2.61) y (9.2.62) son equivalentes. Notemos que se puede pasar de una a otra:

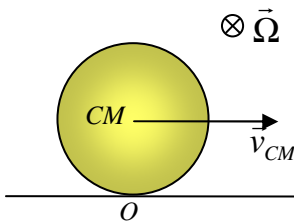
$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (I_{CM} + MR^2) \Omega^2 + Mgh = \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 + \frac{1}{2} M \underbrace{(R\Omega)^2}_{v_{CM}^2} + Mgh = \\ &= \frac{1}{2} I_{CM} \Omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + Mgh \end{aligned}$$

De las ec.(9.2.61) o (9.2.62) se ve que  $\Omega$  va variando al ir variando la altura  $h$ :

$$\Omega(h) = \sqrt{\frac{2(E - Mgh)}{I_O}}$$

- Imaginemos el mismo cuerpo rodando sobre un plano horizontal, sin intervención de ninguna fuerza externa, a excepción de la fuerza de rozamiento. Averiguemos la magnitud de dicha fuerza. Si escribimos la expresión de la energía, notamos algo

interesante:



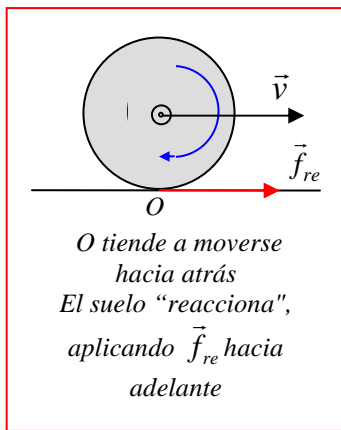
$$H = \frac{1}{2} I_O \Omega^2$$

Solo tenemos energía cinética de rotación; como la energía se conserva, entonces:

$$H = cte \Rightarrow \Omega = cte$$

Como  $\Omega = cte$ , entonces la aceleración angular  $\gamma = 0$ , y por lo tanto, no hay ninguna fuerza haciendo torque, es decir  $f_{re} = 0$ . En general, cualquier cuerpo rígido que rota alrededor de un eje paralelo a un eje principal sin intervención de torques externos, se mueve con  $\vec{\Omega} = cte$ . Esto puede considerarse como la ley de inercia para el movimiento de rotación.

- ¿Cómo hace un vehículo para avanzar? La pregunta parece tener una respuesta obvia: lo mueve el motor. Sin embargo, no es estrictamente así: ¡la rueda avanza debido a la fuerza de rozamiento estática! Lo que mueve el motor es el eje de la rueda, que a su vez, hace girar a ésta en sentido horario para avanzar, y en sentido antihorario, para retroceder ... exactamente igual que en el ejemplo que acabamos de ver. Sin embargo, hay una diferencia fundamental.

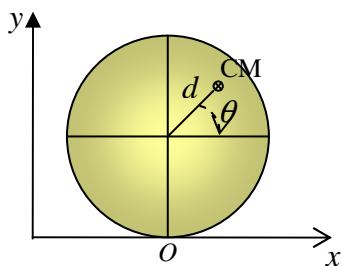


Al ser el eje el que hace girar la rueda, el punto material de ésta en contacto con la superficie tiende a moverse hacia atrás. Esto hace que la superficie reaccione, aplicando sobre este punto, una fuerza de rozamiento estática hacia delante que es, en definitiva, la que hace avanzar la rueda. Como esta fuerza tiene como límite  $f_{re} \leq \mu_e N$ , las ruedas deslizan sobre superficies con  $\mu_e$  chico (como podría ser, un camino mojado o con una capa de hielo). Este ejemplo muestra cómo la fuerza de rozamiento puede adaptarse a las circunstancias del movimiento.

Un ejemplo no tan clásico:

### 3) Rodadura de un cuerpo inhomogéneo

Consideremos, por ejemplo, un cilindro inhomogéneo de radio  $R$  que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.



El CM yace a una distancia  $d$  respecto del eje central del cilindro. Como en el ejemplo anterior, el EIR pasa a través del punto de contacto  $O$  del cilindro con el plano. El CM rota alrededor del eje central, describiendo una cicloide. Por lo tanto, el punto  $O$  y el CM describen trayectorias diferentes.

- La ecuación de movimiento del sistema puede ser fácilmente obtenida a partir de la conservación de la energía, teniendo en cuenta que el movimiento del cilindro puede ser considerado, instante a instante, como una rotación pura alrededor del EIR que pasa por el punto de contacto  $O$ :

$$E = \frac{1}{2} I_o(\theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 + mgd \operatorname{sen} \theta \quad (9.2.63)$$

donde  $I_o(\theta)$  es el momento de inercia del cilindro respecto del eje que pasa por  $O$ . Éste es función del ángulo  $\theta$  debido a que toma diferentes valores dependiendo de la función del CM. Como  $\vec{L}_o = I_o(\theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{z}$ , la energía conservada puede escribirse:

$$E = \frac{L_o^2}{2I_o(\theta)} + mgd \operatorname{sen} \theta \quad (9.2.64)$$

La ecuación de movimiento puede obtenerse en términos de  $L_o = I_o(\theta) \left( \frac{d\theta}{dt} \right)$  derivando

la ec.(9.2.64) respecto del tiempo:

$$0 = \frac{L_o}{I_o(\theta)} \frac{dL_o}{dt} - \frac{L_o^2}{2I_o^2(\theta)} \frac{dI_o(\theta)}{dt} + mgd \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \quad (9.2.65)$$

Reordenando los términos:

$$\frac{dL_o}{dt} = -mgd \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{dI_o(\theta)}{dt} \frac{d\theta}{dt} \quad (9.2.66)$$

Comparemos la ec.(66) con el torque de las fuerza aplicadas:

$$\vec{N}_o^e = [d \cos \theta \hat{x} (R + d \operatorname{sen} \theta) \hat{y}] \times (-mg \hat{y}) = -mgd \cos \theta \hat{z} \quad (9.2.67)$$

De la ecs.(9.2.66) y (9.2.67) se ve claramente que  $\frac{dL_o}{dt}$  no depende solamente del torque de las fuerzas aplicadas, sino que hay un término adicional. Este término es, justamente, el que aparece en la ec.(9.2.14):

$$\begin{aligned} -\vec{v}_o(t) \times \vec{p} &= \\ &= - \left( -R \frac{d\theta}{dt} \hat{x} \right) \times \left( -md \operatorname{sen} \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{x} + md \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \hat{y} \right) = mRd \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \hat{z} \end{aligned} \quad (9.2.68)$$

En efecto, como:

$$I_o = I_{CM} + m(R^2 + d^2 + 2Rd \operatorname{sen} \theta) \quad (9.2.69)$$

Teniendo en cuenta que  $\frac{dI_{CM}}{dt} = 0$ , la ec.(9.2.66) puede re-expresarse:

$$\frac{1}{2} \frac{dI_O(\theta)}{dt} \frac{d\theta}{dt} = mRd \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad (9.2.70)$$

que es exactamente el mismo resultado que en la ec.(9.2.68). Es decir que, respecto del centro de momentos  $O$  sobre el EIR, la ecuación de movimiento del impulso angular es la ec.(9.2.14):

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p} = \left[ -mgd \cos \theta + mRd \cos \theta \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \hat{z}} \quad (9.2.71)$$

Este ejemplo muestra el tipo de confusión que puede surgir si el término  $\vec{v}_O$  es incorrectamente interpretado como la velocidad del punto material del cuerpo rígido en esa posición, cuando se toma un punto del EIR como origen de momentos. Esta mala interpretación solo conduce al resultado correcto si el centro de momentos sobre el EIR y el CM siguen trayectorias paralelas, en cuyo caso el término  $\vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{0}$ , y la ec.(9.2.14) pasa a ser la ec.(9.2.15).

- Finalmente, nos conviene despejar  $\dot{\theta}$  de la ec.(9.2.63):

$$\dot{\theta} = \left[ \frac{2(E - mgd \operatorname{sen} \theta)}{I_{CM} + m(R^2 + d^2 + 2Rd \operatorname{sen} \theta)} \right]^{1/2}$$

### **Estática. Condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido**

Como hemos visto, para tratar la dinámica de un cuerpo rígido es necesario considerar tanto la dinámica de la traslación, como la de la rotación. En consecuencia, para que un cuerpo rígido esté en equilibrio debe cumplir dos condiciones, una que garantice el equilibrio en la traslación, y una segunda, en la rotación.

- *Equilibrio en la traslación:*

Teniendo en cuenta la ec.(9.2.1), la condición de equilibrio es la misma que para una partícula:

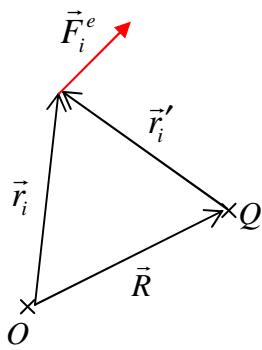
$$\boxed{\dot{\vec{p}} = M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^e = \vec{0}} \quad (9.2.72)$$

- *Equilibrio en la rotación:*

La ecuación dinámica fundamental es la ec.(9.2.15). Por lo tanto, la condición de equilibrio es:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_\Omega \vec{\gamma} = \sum_i \vec{N}_{O_i}^e = \vec{0}} \quad (9.2.73)$$

donde  $O$  es un centro de momentos que cumple alguna de las condiciones tal que  $\vec{v}_O \times \vec{p} = \vec{0}$ <sup>20</sup>. En este punto, planteamos una duda. La condición (9.2.73), ¿debe probarse para todo centro de momentos  $O$ ? Veamos que basta con probarlo para un punto, para que se verifique para todo otro punto. Supongamos que se cumple para el punto  $O$  y calculemos para otro punto  $Q$ :



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_Q}{dt} &= \sum_i \vec{N}_{Qi}^e = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e = \sum_i \vec{r}_i' \times \vec{F}_i^e = \\ &= \sum_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \times \vec{F}_i^e = \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e}_{\vec{N}_O = \vec{0}} - \vec{R} \times \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^e}_{\vec{0}} = \vec{0} \end{aligned}$$

El primer término es el torque respecto de  $O$ , que es nulo; el segundo término es cero si se cumple la primera condición de equilibrio, ec.(9.2.72). Por lo tanto, si se cumple la primera condición, basta probar la segunda para un único punto, para

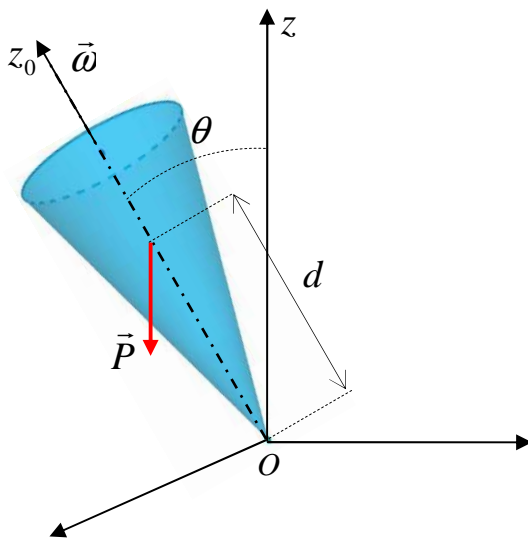
que se cumpla para todos los centros de momentos.

### Movimiento giroscópico

Consideremos el movimiento bajo la acción de la gravedad de un trompo simétrico, que gira alrededor de un eje principal con velocidad angular  $\omega$ , de tal manera que dicho eje forma cierto ángulo con la normal. El trompo, en esas condiciones, tiene tres movimientos:

- Un giro alrededor de su eje propio.
- Una movimiento de *precesión* alrededor de un eje vertical.
- Un movimiento de *nutación* del eje propio (el conocido “cabeceo” del trompo).

<sup>20</sup> Ver nota 9.



Experimentalmente sabemos que si  $\vec{\omega} = \vec{0}$ , el trompo caerá. En cambio, si se pone en rotación rápida en torno a su eje, el trompo no solo no cae, sino que el eje realizará un movimiento de precesión

lento alrededor del eje vertical  $z$ . Si bien el movimiento es complicado, vamos a tratar de explicar este efecto en forma aproximada y encontrar la velocidad angular de precesión  $\vec{\Omega}$ .

Tal como ya vimos, el impulso angular de un sistema de partículas (y, en particular, de un cuerpo rígido) respecto del punto  $O$  puede escribirse (suponemos que el punto  $O$  no desliza):

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{p}$$

donde  $\vec{L}_{CM}$  es el momento angular intrínseco o de spin, es decir, respecto del CM, y  $\vec{R} \times \vec{p}$  es el impulso angular orbital, o sea, del CM respecto de  $O$ .

- El impulso angular intrínseco es:

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\omega}$$

donde  $I_{CM}$  es el momento de inercia respecto del eje propio  $z_0$ . Aquí vamos a realizar una aproximación. Supongamos que  $\omega$  es muy grande (el trompo gira muy rápidamente alrededor de su eje propio); entonces, podemos despreciar el momento orbital frente al de spin:

$$\vec{L}_O \cong \vec{L}_{CM} = I_{CM} \omega \hat{z}_0 \quad (9.2.74)$$

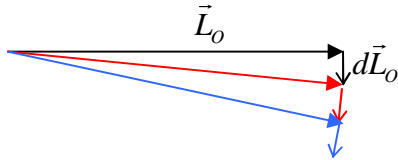
y, por lo tanto,  $\vec{L}_O$  tiene la dirección del eje propio del trompo,  $z_0$ .

- La fuerza peso,  $\vec{P}$ , hace torque respecto de  $O$ , por lo que  $\vec{L}_O$  va a variar. Calculemos dicho torque:

$$\vec{N}_O^e = \vec{r} \times \vec{P} = d \hat{z}_0 \times (-mg) \hat{z} = d mg \text{sen} \theta (\hat{z}_0 \times \hat{z}) = d mg \text{sen} \theta \hat{n} \quad (9.2.75)$$



donde  $\hat{n}$  es un versor perpendicular al plano  $(\hat{z}_0, O, \hat{z})$ , y saliente. Es decir, el torque  $\vec{N}_O^e$  es, en todo instante, perpendicular a  $\vec{L}_O$  y, por lo tanto, si el vector  $\vec{L}_O$  tiende a crecer en la dirección perpendicular, inmediatamente, el torque vuelve a ponerse en la dirección perpendicular. No habiendo torque paralelo a  $\vec{L}_O$ , éste no va a cambiar de módulo sino de dirección:



El cambio en  $\vec{L}_O$  en un tiempo  $dt$  estará dado por:

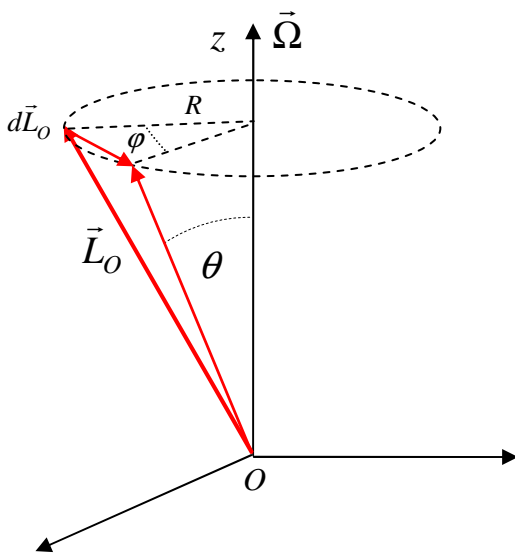
$$d\vec{L}_O = \vec{N}_O^e dt = d mg \text{ sen } \theta dt \hat{n} \Rightarrow d\vec{L}_O \perp \vec{L}_O \quad \forall t \quad (9.2.76)$$

y, por lo tanto:

$$|\vec{L}_O + d\vec{L}_O| = |\vec{L}_O| \quad \text{a orden } 0$$

Este tipo de torque, que no cambia el módulo del impulso angular sino su dirección, se denomina *torque centrípeto*, en relación a la fuerza centrípeta que produce el mismo efecto sobre la velocidad.

- Por efecto de este torque centrípeto,  $\vec{L}_O$  va a preceder alrededor del eje  $z$ . Como  $\vec{L}_O$  es paralelo al eje del trompo, éste también va a preceder alrededor del eje vertical  $z$ . Este efecto se denomina *movimiento giroscópico*.



La punta de  $\vec{L}_O$  describe así una circunferencia horizontal alrededor del eje  $z$ , de radio:

$$R = L_O \text{ sen } \theta$$

$d\vec{L}_O$  representa el diferencial de desplazamiento de  $\vec{L}_O$  sobre la circunferencia, luego:

$$|d\vec{L}_O| = R d\varphi = R\Omega dt = L_O \text{ sen } \theta \Omega dt \quad (9.2.77)$$

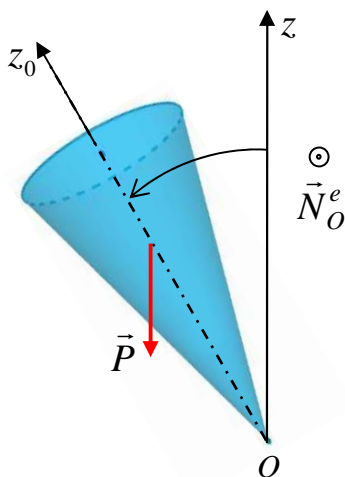
Comparando (9.2.76) con (9.2.77), obtenemos la velocidad angular de precesión  $\Omega$ :

$$\underbrace{L_O}_{I_O \omega} \text{ sen } \theta \Omega dt = d mg \text{ sen } \theta dt$$

$$I_O \omega \Omega = d m g \Rightarrow \Omega = \frac{d m g}{I_O \omega} \quad (9.2.78)$$

La expresión de la velocidad angular de precesión  $\Omega$  que obtuvimos, ec.(9.2.78) muestra un hecho que conocemos de la experiencia: cuanto más rápidamente gire el trompo alrededor de su propio eje, más lentamente girará alrededor del eje vertical (y más estable será el movimiento).

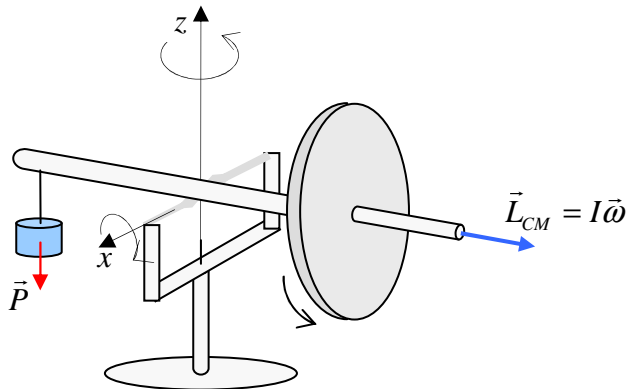
- Notemos, sin embargo que hemos “perdido” uno de los tres movimientos del trompo, es decir, la nutación. En general, el ángulo  $\theta$  no permanece constante y eso origina el particular “cabeceo” del trompo. En nuestro análisis no encontramos dicho movimiento debido a la aproximación que hicimos, ec.(9.2.74), ya que el impulso angular presenta, en general, una desviación respecto del eje del trompo, debido al término orbital. Recordemos que para justificar dicha aproximación supusimos que el trompo giraba muy rápidamente alrededor de su eje propio ( $\omega$  muy grande).



Por lo tanto, para entender el movimiento que nos falta, consideremos el otro caso extremo, es decir,  $\omega = 0$ . En ese caso, el torque de la fuerza peso  $\vec{P}$  produce una rotación alrededor de un eje perpendicular a  $z$  y el cuerpo cae.

Cuando el cuerpo se encuentra en rotación alrededor de su eje propio  $z_0$ , se produce una situación intermedia en la que, además del movimiento de precesión, el eje  $z_0$  se mueve entre dos ángulos extremos. Este “cabeceo” del eje es lo que se conoce como *nutación*.

El giróscopo.



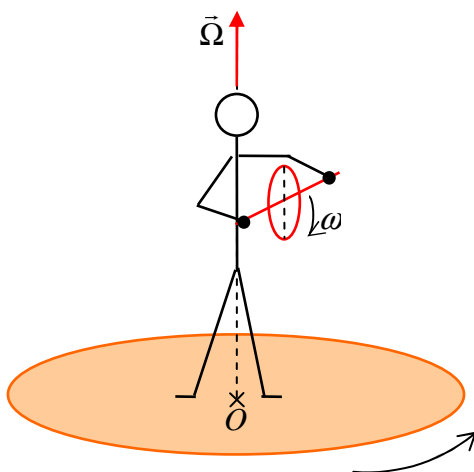
El giróscopo es un instrumento en el cual se monta una rueda giratoria de tal manera que su eje puede cambiar de dirección libremente.

El sistema está libre de torques externos, ya que el torque que

realiza el peso de la rueda está balanceado por una pesa en el otro extremo del eje. Este tipo de sostén se denomina *suspensión cardánica*. Este eje puede moverse libremente, respecto de dos de sus ejes principales,  $x$  y  $z$ , mientras la rueda rota velozmente alrededor del otro eje principal,  $y$ . Por lo tanto, el impulso angular del giróscopo es paralelo al eje  $y$ . Si se desplaza el giróscopo, se observa que su eje de rotación siempre se mantiene fijo en la misma dirección, como consecuencia de la conservación del impulso angular. La propiedad de los giróscopos de mantener fijo en el espacio su eje de rotación se utiliza para estabilizar los barcos y en los pilotos automáticos de los aviones.

- Consideremos algunos otros ejemplos de *movimiento giroscópico*.

➤ Supongamos un hombre que se encuentra parado sobre una plataforma giratoria. El hombre sostiene una rueda por el eje de ésta. Por simplicidad, despreciemos todo efecto de fricción en los ejes de la plataforma y de la rueda.



La plataforma no gira. El hombre imprime a la rueda un movimiento de rotación alrededor de su propio eje, y observa que, cuando el eje permanece horizontal, la plataforma se mantiene en reposo. Pero, apenas tuerce el eje de la rueda, la plataforma comienza a girar.

- Analicemos el fenómeno. Como no hay fricción con el eje, la plataforma, el hombre y la rueda constituyen un *sistema libre de fuerzas externas* (salvo, claro está, la fuerza de vínculo que impide que el eje de la plataforma se tuerza). Por lo tanto, tomando como centro de momentos un punto sobre el eje de la plataforma (el punto  $O$  en el dibujo), el impulso angular del sistema se mantiene constante:

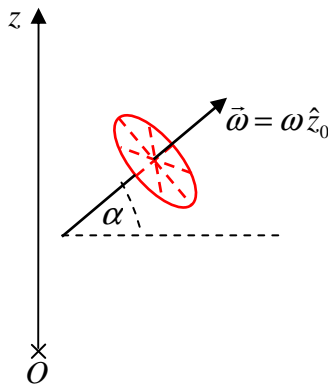
$$\vec{L}_O = ct\vec{e}$$

Como el sistema inicialmente está en reposo:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_O^R + \vec{L}_O^P = \vec{0} \quad (9.2.79)$$

donde  $\vec{L}_O^R$  es el impulso angular de la rueda y  $\vec{L}_O^P$ , el de la plataforma.

- Si la rueda comienza a girar con  $\vec{\omega} = \omega \hat{z}_0$ , donde  $\hat{z}_0$  es el versor en la dirección de su eje:



La rueda adquiere un impulso angular propio. Respecto de  $O$  podemos escribir, como en el caso anterior:

$$\vec{L}_O^R = \vec{L}_{CM}^R + \vec{R} \times \vec{p}$$

donde  $\vec{R} \times \vec{p}$  es el impulso angular orbital de la rueda respecto de  $O$ , y:

$$\vec{L}_{CM}^R = I_{CM}^R \vec{\omega}$$

con  $I_{CM}^R$ , el momento de inercia de la rueda respecto de su eje propio.

- Nuevamente, como en el caso anterior, si la rueda gira muy rápidamente, podemos despreciar el impulso angular orbital frente al intrínseco. Entonces:

$$\vec{L}_O^R \cong I_{CM}^R \vec{\omega} = I_{CM}^R \omega \hat{z}_0 \quad (9.2.80)$$

Es decir, el impulso angular total de la rueda respecto de  $O$  tiene (prácticamente) la dirección del eje propio de ésta.

- ¿Qué pasa entonces con la plataforma? Como el impulso angular total del sistema es constante y nulo, ec.(79), al girar la rueda, la plataforma adquirirá un impulso angular:

$$\vec{L}_O = \vec{0} = \vec{L}_O^R + \vec{L}_O^P = I_{CM}^R \vec{\omega} + \vec{L}_O^P \Rightarrow \boxed{\vec{L}_O^P = -I_{CM}^R \vec{\omega} = \vec{L}_{OZ}^P + \vec{L}_{O\perp}^P} \quad (9.2.81)$$

donde  $\vec{L}_{OZ}^P$  tiene la dirección del eje de la plataforma y  $\vec{L}_{O\perp}^P$ , la dirección perpendicular a éste.

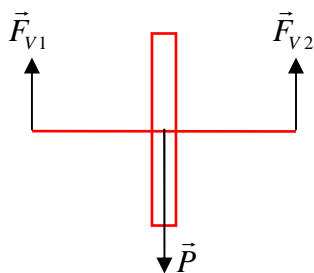
- Sin embargo, como el eje de la plataforma no puede moverse, la fuerza de vínculo que lo mantiene fijo hará torque de tal manera de impedir que éste gire y, por lo tanto, dicho torque anulará  $\vec{L}_{O\perp}^P$ , sobreviviendo solo la componente en la dirección del eje de la plataforma. Luego:

$$\vec{L}_O^P = \vec{L}_{OZ}^P = I_Z^P \vec{\Omega} = -I_{CM}^R \omega \text{sen} \alpha \hat{z} \Rightarrow \boxed{\vec{\Omega} = -\frac{I_{CM}^R}{I_Z^P} \omega \text{sen} \alpha \hat{z}} \quad (9.2.82)$$

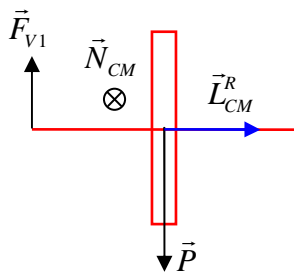
La plataforma adquiere un vector rotación  $\vec{\Omega}$  y gira en sentido contrario a la rueda. Notemos que la velocidad de rotación será máxima si el eje de la rueda se pone vertical ( $\alpha = 90^\circ$ ), y es nula cuando se pone horizontal ( $\alpha = 0^\circ$ ).

- ¿Qué hace girar a la plataforma? Sabemos que gira por la conservación del impulso angular total pero, si hilamos más fino, podemos preguntarnos qué fuerzas son las que hacen que la plataforma comience a girar. El único “contacto” entre los componentes de nuestro sistema es el de los pies del hombre sobre la plataforma. Por lo tanto, es la fuerza de rozamiento estática la que inicia el movimiento de la plataforma.

- El hombre observa otro detalle.



Cuando la plataforma no gira, necesita sostener el eje de la rueda con ambas manos. Las fuerzas de vínculo que aplican las manos en cada extremo del eje compensan el peso de la rueda. Si solo aplicara una de estas fuerzas, ésta haría torque respecto del CM de la rueda, que lo haría girar. Ambas fuerzas hacen torques opuestos que se compensan.



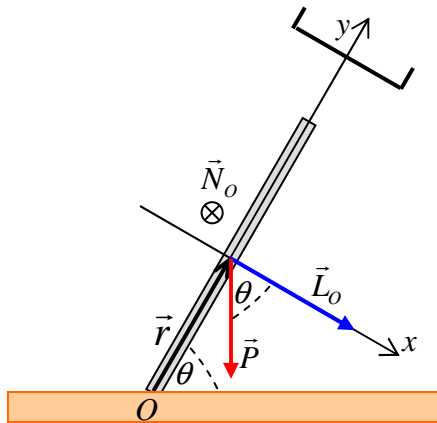
Sin embargo, cuando la plataforma gira, le basta con sostener el eje con una única mano. El torque que hace la fuerza de vínculo  $F_{V1}$  respecto del CM de la rueda,  $\vec{N}_{CM}$ , es perpendicular en todo instante a  $\vec{L}_{CM}^R$ . El cambio en este vector en un  $dt$  es:

$$d\vec{L}_{CM}^R = \vec{N}_{CM} dt \perp \vec{L}_{CM}^R$$

y, por lo tanto, como en el caso del trompo,  $\vec{N}_{CM}$  actúa como torque centrípeto y hace girar a  $\vec{L}_{CM}^R$  (y, en consecuencia, al eje de la rueda) si la plataforma está girando (es decir, acompaña el movimiento de la plataforma). Éste es otro ejemplo de movimiento

giroscópico. Notemos que no es indistinto con qué mano se sujete el eje de la rueda, pues  $\vec{L}_{CM}^R$  debe girar en el mismo sentido que la plataforma.

➤ El efecto giroscópico también le permite “doblar” a una bicicleta, solo torciéndola respecto de la vertical, sin necesidad de girar las ruedas con el manubrio.



Efectivamente, al torcer la bicicleta respecto de la vertical, el torque de la fuerza peso  $\vec{P}$  respecto del punto de contacto  $O$  de la rueda con el suelo,  $\vec{N}_o$ , actúa como torque centrípeto:

$$\begin{aligned} \vec{N}_o &= r \hat{y} \times (mg \cos \theta \hat{x} - mg \sin \theta \hat{y}) \\ &= -r mg \cos \theta \hat{z} \end{aligned} \quad (9.2.83)$$

El impulso angular de la rueda respecto de  $O$ :

$$\vec{L}_o = I_{CM} \vec{\omega} + \vec{r} \times \vec{p}$$

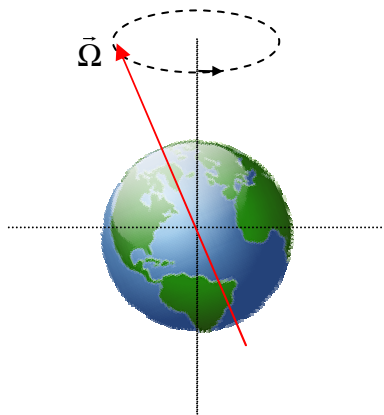
donde  $\vec{\omega}$  es el vector rotación de la rueda.

Nuevamente, si  $\omega$  es muy grande, podemos despreciar el impulso angular orbital frente al intrínseco y, entonces:

$$\vec{L}_o \cong I_{CM} \omega \hat{x} \perp \vec{N}_o \quad \forall t \quad (9.2.84)$$

con lo que, el efecto del torque es hacer girar al vector  $\vec{L}_o$  y, por lo tanto, al eje de la rueda.

➤ Finalmente, nuestro planeta se comporta como un giróscopo.

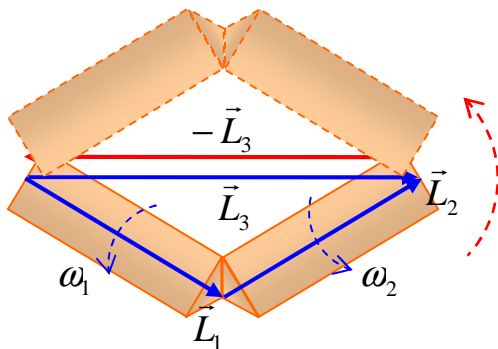


La Tierra puede considerarse una peonza simétrica y su eje de rotación está inclinado  $23^\circ 26'$  con respecto a la normal al plano de la órbita<sup>21</sup>. Este eje de rotación precesa alrededor de dicha normal, debido a que el torque de la atracción gravitatoria del Sol se comporta como un torque centrípeto. Este fenómeno, denominado *precesión de los equinoccios*, es otro ejemplo de movimiento giroscópico. El período del movimiento es de 25776 años.

<sup>21</sup> El plano de la órbita se llama *eclíptica*.

¿Puede rotar un sistema si  $\vec{L} = \vec{0}$  y no hay torques aplicados? Al estudiar el impulso angular en el caso de una partícula, habíamos visto que  $\vec{L} = \vec{0}$  es condición de un movimiento rectilíneo, en el que la partícula pasa por el centro de momentos. En ausencia de torques aplicados, el impulso angular de un sistema se conserva. Sin embargo, en sistemas más complejos, se pueden generar torques internos que provean al sistema de un cierto impulso angular. La conservación del impulso angular total requiere, entonces, que aparezca un impulso angular que compense al anterior. Veamos un ejemplo.

➤ *El problema del gato cayendo*<sup>22</sup>. Es un hecho conocido que un gato siempre (¿siempre?) cae sobre sus cuatro patas. Vamos a ver que, si bien mucho se debe a la flexibilidad de su esqueleto, fundamentalmente es un problema de conservación del impulso angular. Supongamos, en el peor de los casos, un gato que cae con sus patas, inicialmente, hacia arriba. ¿Cómo hace para darse vuelta en el aire, en ausencia de torques externos? Por ser un sistema aislado, su impulso angular es  $\vec{L} = \vec{0}$ .



El gato tuerce su lomo y realiza un movimiento de rotación de su columna similar al de dos rotores, como se muestra en la figura. Las dos porciones de columna (rotores) adquieren un impulso angular  $\vec{L}_1$  y  $\vec{L}_2$ , respectivamente, de tal manera que, por estos movimientos, el gato adquiere un impulso angular  $\vec{L}_3$ :

$$\vec{L}_3 = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

Como el impulso angular total inicial del gato es nulo, debe existir una rotación de todo el grupo alrededor del eje  $\vec{L}_3$ , de tal manera que compense este impulso angular. Esto es, el cuerpo del gato adquiere un impulso angular  $(-\vec{L}_3)$ , que compensa el anterior y

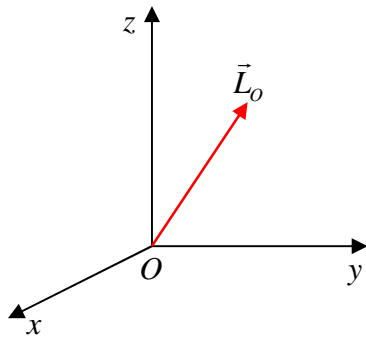
<sup>22</sup> T. R. Kane, M. P. Scher, "A dynamical explanation of the falling cat phenomenon". Int. J. Solid Structures **5**, 663-670 (1969).

endereza el cuerpo del gato. Éste cesa en su movimiento cuando queda con las patas para abajo.

**Tema avanzado 1:**

*Tensor de inercia: Momento de inercia respecto de un punto.*

El impulso angular sabemos que se mide respecto de un centro de momentos. Si en dicho centro de momentos centramos un sistema de ejes ortogonales, podemos determinar el momento de inercia respecto de cada uno de esos ejes, así como los productos de inercia (ver ec.(9.2.10).



Re-escribamos la ec.(9.2.9) de la siguiente forma:

$$d\vec{L}_O = dm[r_{\perp}^2 \vec{\Omega} - r_{\parallel} (\vec{r} \cdot \vec{\Omega})]$$

En componentes, respecto de los ejes centrados en  $O$ :

$$dL_{Ox} = dm[r_{\perp}^2 \Omega_x - x(x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z)]$$

$$dL_{Ox} = dm[\Omega_x(r_{\perp}^2 - x^2) - (xy\Omega_y + xz\Omega_z)]$$

$$dL_{Ox} = dm[\Omega_x(y^2 + z^2) - (xy\Omega_y + xz\Omega_z)] \quad (9.2.85)$$

con similares ecuaciones para las otras componentes. Integrando:

$$L_{Ox} = \Omega_x \int_M (y^2 + z^2) dm + \Omega_y \int_M (-xy) dm + \Omega_z \int_M (-xz) dm \equiv I_{xx} \Omega_x + I_{xy} \Omega_y + I_{xz} \Omega_z \quad (9.2.86)$$

$$L_{Oy} = \Omega_y \int_M (x^2 + z^2) dm + \Omega_x \int_M (-yx) dm + \Omega_z \int_M (-yz) dm \equiv I_{yy} \Omega_y + I_{xy} \Omega_x + I_{yz} \Omega_z \quad (9.2.87)$$

$$L_{Oz} = \Omega_z \int_M (x^2 + y^2) dm + \Omega_x \int_M (-zx) dm + \Omega_y \int_M (-zy) dm \equiv I_{zz} \Omega_z + I_{xz} \Omega_x + I_{yz} \Omega_y \quad (9.2.88)$$

Las momentos de inercia  $I_{jj}$  ( $j = x, y, z$ ) y los productos de inercia  $I_{jk}$  ( $j = x, y, z, j \neq k$ ) están medidos respecto de cada uno de los ejes centrados en el punto  $O$ , elegido como centro de momentos. Notemos que las ecs.(9.2.86) a (9.2.88) se pueden escribir de una forma más compacta:



$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \quad (9.2.89)$$

donde el tensor se denomina *tensor de inercia*. Este tensor no está referido a un eje, sino a un punto, que es el centro de momentos elegido. Notemos asimismo que se trata de un tensor simétrico, es decir sus elementos extradiagonales son iguales:

$$I_{jk} = I_{kj}$$

Como para todo tensor simétrico, se puede encontrar un sistema de ejes  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  respecto de los cuales el tensor es diagonal. La ec.(9.2.89), escrita en ese sistema de ejes toma una forma más sencilla:

$$\vec{L}_O = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = I_1 \Omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \Omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \Omega_3 \hat{e}_3 \quad (9.2.90)$$

(cf. ec(9.2.12)). El sistema de ejes respecto del cual el tensor de inercia es diagonal es el *sistema de ejes principales del cuerpo*. Recordemos que, si un cuerpo tiene algún elemento de simetría, los ejes principales coinciden con la dirección de esos elementos. Notemos que, si el cuerpo está moviéndose, *estos ejes no son fijos*. De ese problema nos vamos a ocupar en el siguiente *Tema avanzado*.

### **Tema avanzado 2:**

*Ecuaciones de Euler. Ejes fijos al cuerpo.*

En un sistema inercial (SI), y tomando un centro de momentos adecuado<sup>23</sup>, la ecuación de movimiento del impulso angular es la ec.(9.2.14):

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^e$$

Pero, ¿qué pasa si se toman ejes fijos al cuerpo, es decir, por ejemplo, los ejes principales? Si el cuerpo está rotando con  $\vec{\Omega}$ , es un sistema no inercial (SNI), por lo que, para derivar el impulso angular, debemos hacer:

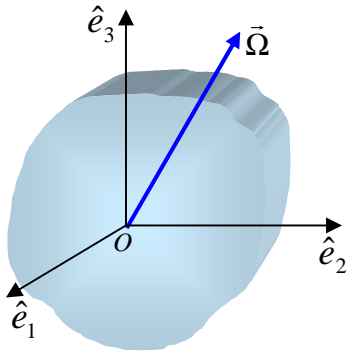
$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{SI} = \left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{SNI} + \vec{\Omega} \times \vec{L}_O = \vec{N}_O^e \quad (9.2.91)$$

donde hemos usado el *operador* que encontramos en el capítulo de Dinámica en sistemas no inerciales, ec.(5.13):

<sup>23</sup> Ver nota 9.

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{SI} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{SNI} + \vec{\Omega} \times$$

Supongamos que el SNI es el de los ejes principales del cuerpo, que gira con el vector rotación de éste,  $\vec{\Omega}$ :



En el SNI:

$$\vec{L}_O \Big|_{SNI} = I_1 \Omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \Omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \Omega_3 \hat{e}_3$$

La derivada de  $\vec{L}_O \Big|_{SNI}$  es:

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_{SNI} = I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} \hat{e}_1 + I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} \hat{e}_2 + I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} \hat{e}_3$$

pues, en el SNI, los ejes  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$  son fijos y, por ende, también son constantes  $I_1, I_2$  e  $I_3$ .

Falta calcular  $\vec{\Omega} \times \vec{L}_O$ , para escribir la

ecuación de movimiento en el SI:

$$\vec{\Omega} \times \vec{L}_O = \det \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 \\ I_1 \Omega_1 & I_2 \Omega_2 & I_3 \Omega_3 \end{bmatrix}$$

Con lo que, la ec.(91) resulta, en componentes:

$$\begin{aligned} N_{O1}^e &= I_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2) \\ N_{O2}^e &= I_2 \dot{\Omega}_2 + \Omega_1 \Omega_3 (I_1 - I_3) \\ N_{O3}^e &= I_3 \dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2 (I_2 - I_1) \end{aligned} \tag{9.2.92}$$

Las ecs.(9.2.92) se conocen como *ecuaciones de Euler* y permiten resolver problemas de la dinámica de la rotación de un rígido en función de los ejes principales.

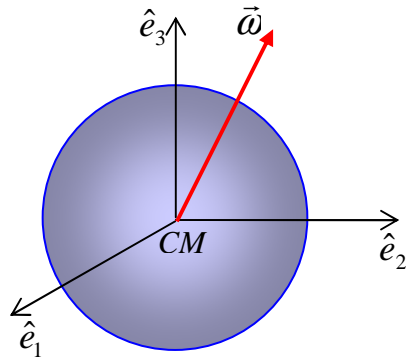
*Ejemplos:*

1. *Esfera homogénea que rota con  $\vec{\omega}$ , en ausencia de torques externos.*

Escribamos las ecuaciones de Euler, en las direcciones de los ejes principales. Como la esfera tiene (por ser homogénea) *simetría esférica*<sup>24</sup> (valga la necesaria redundancia), todas las direcciones son ejes de simetría.

<sup>24</sup> Notemos que la condición de ser homogénea es fundamental. A los efectos de encontrar los ejes principales de inercia, la distribución de masa es importante, es decir, la simetría no se refiere solo a la forma del cuerpo, sino también a su distribución de masa.

Por lo tanto, cualquier sistema de tres ejes ortogonales es un sistema de ejes principales.



Como todas las direcciones son equivalentes, los momentos de inercia respecto de los tres ejes son iguales:

$$I_1 = I_2 = I_3 \equiv I = \frac{2}{5}MR^2$$

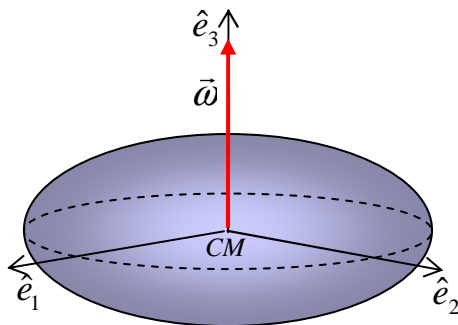
Se dice que la esfera tiene *degeneración de orden 3* y se la llama *peonza esférica*<sup>25</sup>.

Las ecuaciones de Euler resultan:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = I\dot{\omega}_1 \\ 0 = I\dot{\omega}_2 \\ 0 = I\dot{\omega}_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3 = ct\vec{e}$$

Es decir que, cualquiera sea la forma como se haga rotar a la esfera, en ausencia de torques externos, el vector rotación (y, por lo tanto, el eje de rotación) se conserva.

2. *Elipsoide homogéneo que rota con  $\vec{\omega}$  en la dirección de un eje principal, en ausencia de torques externos.*



El elipsoide homogéneo (la pelota de rugby) tiene un plano de simetría y un eje de simetría perpendicular a éste. Por lo tanto, uno de los ejes principales coincide con la dirección del eje de simetría, mientras que, en el plano, cualquier par de direcciones ortogonales entre sí son ejes principales. Así, los momentos de

inercia del elipsoide homogéneo cumplen:

$$\begin{array}{l} I_1 = I_2 \equiv I \\ I_3 \neq I \end{array}$$

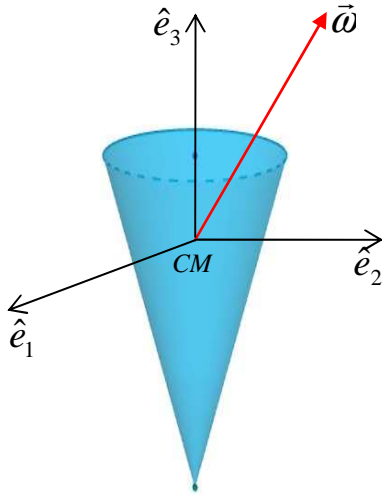
El elipsoide, entonces, tiene *degeneración 2*. Se lo denomina *peonza simétrica*. Las ecuaciones de Euler resultan:

$$0 = I_3 \dot{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} = \omega \hat{e}_3 = ct\vec{e}$$

<sup>25</sup> En rigor, se podría haber elegido la dirección de uno de los ejes principales coincidiendo con la dirección del vector rotación. Se eligió hacerlo así para que el tratamiento resultara más general.

Como el vector rotación tiene la dirección de un eje principal, se conserva.

3. Peonza simétrica que rota con  $\vec{\omega}$  en una dirección no coincidente con la dirección de un eje principal, en ausencia de torques externos.



Consideremos un cono homogéneo. Éste es otro caso de peonza simétrica, ya que también cumple:

$$I_1 = I_2 \equiv I$$

$$I_3 \neq I$$

Las ecuaciones de Euler, en este caso, resultan:

$$I\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I) = 0$$

$$I\dot{\omega}_2 + \omega_1\omega_3(I - I_3) = 0 \quad (9.2.93)$$

$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

La tercera de las ecs.(9.2.93) resulta:

$$\boxed{\omega_3 = cte.} \quad (9.2.94)$$

Para resolver las otras dos ecuaciones las reordenamos:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 + \omega_2 \frac{\omega_3(I_3 - I)}{I} &= 0 \\ \dot{\omega}_2 - \omega_1 \frac{\omega_3(I_3 - I)}{I} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 + \Omega \omega_2 = 0 \\ \dot{\omega}_2 - \Omega \omega_1 = 0 \end{cases} \quad (9.2.95)$$

donde  $\Omega = \frac{\omega_3(I_3 - I)}{I}$ . Supongamos que  $I_3 > I$ , de tal manera que  $\Omega > 0$ .

• Las ecs.(9.2.95) están acopladas. Para resolver el sistema, derivamos la segunda ecuación y despejamos  $\dot{\omega}_1$ :

$$\ddot{\omega}_2 = \Omega \dot{\omega}_1 \quad (9.2.96)$$

En la primera ecuación:

$$\ddot{\omega}_2 + \Omega^2 \omega_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_2 = A \cos(\Omega t)} \quad (9.2.97)$$

De la segunda ecuación de (9.2.95) despejamos  $\omega_1$ :

$$\boxed{\omega_1 = A \sin(\Omega t)} \quad (9.2.98)$$

con  $A$  determinado por las condiciones iniciales<sup>26</sup>. Por otra parte, vemos que la componente de la velocidad angular perpendicular al eje  $\hat{e}_3$ ,  $\vec{\omega}_{12}$ , también es constante en módulo:

$$\vec{\omega}_{12} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2$$

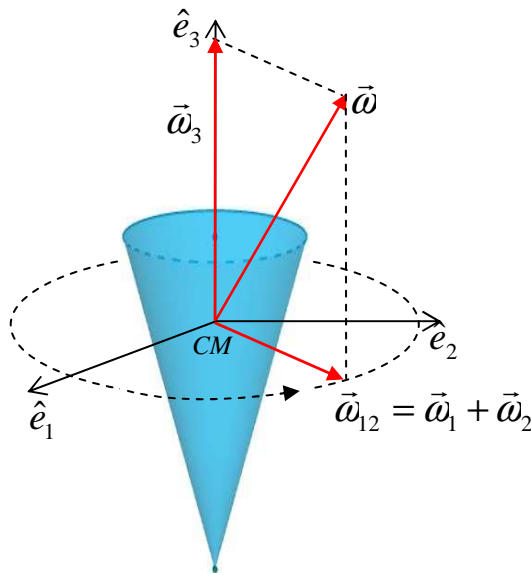
$$|\vec{\omega}_{12}| = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} = A = cte$$

Las constantes  $A$  y  $\omega_3$  también pueden determinarse considerando que, estando el cuerpo libre de fuerzas y torques, se conservan el impulso angular y la energía (en particular, considerando el módulo del impulso angular):

$$|\vec{L}_{CM}|^2 = I^2 A^2 + I_3^2 \omega_3^2 \equiv L^2$$

$$E = \frac{1}{2} I A^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

- Los resultados de las ecs.(9.2.94), (9.2.97) y (9.2.98) nos muestran que la componente de  $\vec{\omega}$  paralela al eje principal  $\hat{e}_3$  permanece constante, mientras que la componente perpendicular a dicho eje,  $(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)$  (también constante en módulo), precede con velocidad angular  $\Omega = \frac{\omega_3(I_3 - I)}{I}$  alrededor del eje  $\hat{e}_3$ :  $\vec{\Omega} = \frac{\omega_3(I_3 - I)}{I} \hat{e}_3$ .



Entonces, si nos paramos en el cuerpo, vemos girar al vector  $\vec{\omega}$  (y, por lo tanto, al eje de rotación), uniformemente con velocidad angular  $\Omega$  alrededor del eje del cono, conservando constante su módulo.

Teniendo en cuenta que el impulso angular respecto del CM es:

$$\vec{L}_{CM} = I\omega_1 \hat{e}_1 + I\omega_2 \hat{e}_2 + I_3\omega_3 \hat{e}_3 = IA[\cos(\Omega t) \hat{e}_1 + \text{sen}(\Omega t) \hat{e}_2] + I_3\omega_3 \hat{e}_3$$

<sup>26</sup> Por simplicidad, elegimos las condiciones de tal forma que la fase inicial sea nula.

este vector realiza el mismo movimiento de precesión alrededor de  $\hat{e}_3$  y con la misma frecuencia angular  $\Omega$  respecto de los ejes fijos al cuerpo.

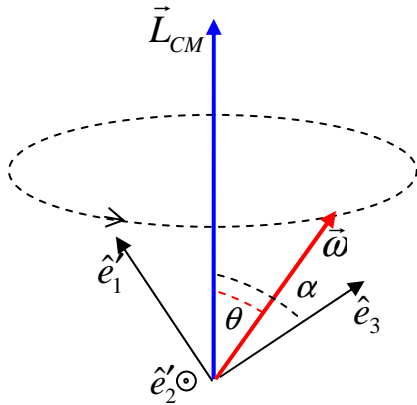
- Razonemos cómo se ve el movimiento de este cuerpo desde un SI. Para ello, notemos que, como no hay torques aplicados:

$$\vec{N}_{CM}^e = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{CM} = ct\vec{e} \text{ en el espacio.}$$

Por otra parte:

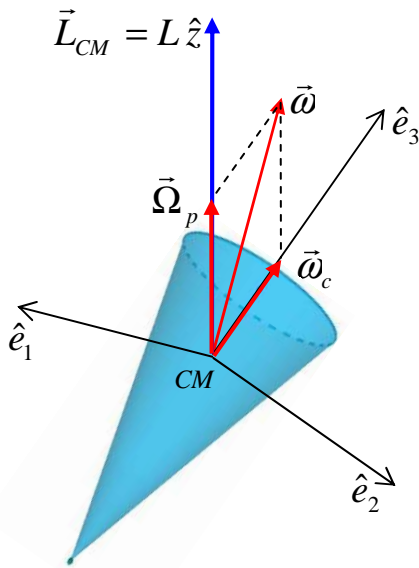
$$\vec{\omega} \cdot \vec{L}_{CM} = I(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega_3^2 = cte \quad (9.2.99)$$

La ec.(9.2.99) nos dice que la proyección del vector  $\vec{\omega}$  sobre la dirección (fija en el SI) de  $\vec{L}_{CM}$  es constante y, por lo tanto también es constante el ángulo  $\theta$  que forman ambos vectores.



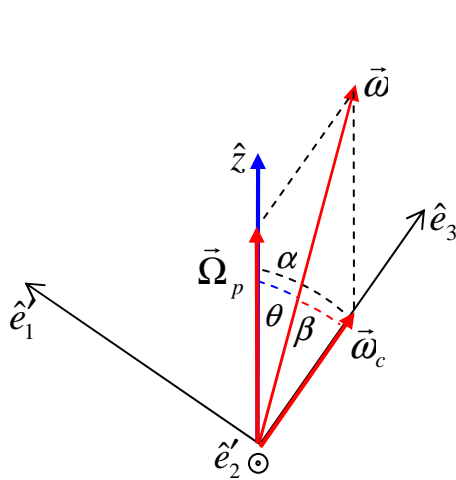
Por otra parte, como los ejes  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  pueden elegirse arbitrariamente, tomemos *por un momento* el eje  $\hat{e}_2$  ( $\hat{e}'_2$ ) perpendicular al plano formado por  $\vec{L}_{CM}$  y  $\hat{e}_3$ . En ese caso,  $L_2 = 0 = I\omega'_2$ , lo que conduce a que  $\omega'_2 = 0$ <sup>27</sup>. Por lo tanto, se ve que  $\vec{L}_{CM}$ ,  $\hat{e}_3$  y  $\vec{\omega}$  están contenidos en el mismo plano. Esto último nos muestra que el vector  $\vec{\omega}$  precece también alrededor de  $\vec{L}_{CM}$  visto desde el SI, con la misma velocidad angular que  $\hat{e}_3$ .

<sup>27</sup> En ese sistema de ejes rotados respecto del anterior, el vector  $\vec{\omega}$  es, obviamente, el mismo vector, pero tiene distintas componentes respecto de los nuevos ejes:  $\vec{\omega} = \omega'_1\hat{e}'_1 + \omega_3\hat{e}_3$  (el eje  $\hat{e}_3$  no cambia y, por lo tanto, tampoco la componente  $\omega_3$ ).



- Entonces, tenemos dos movimientos:
  - el eje de la peonza precesiona con velocidad angular uniforme  $\Omega_p$  alrededor de  $\vec{L}_{CM}$ , describiendo un cono circular. Este movimiento se denomina *precesión regular* de la peonza;
  - simultáneamente, la peonza gira uniformemente con velocidad angular  $\omega_c$  alrededor de su propio eje  $\hat{e}_3$ .
  - Los dos vectores rotación son tal que:
 
$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_c + \vec{\Omega}_p = \omega_c \hat{e}_3 + \Omega_p \hat{z} \quad (9.2.100)$$

- Calculemos  $\Omega_p$  y  $\omega_c$ . Por simplicidad, consideremos, otra vez, el eje  $\hat{e}_2$  ( $\hat{e}'_2$ ) perpendicular al plano formado por  $\hat{z}$  y  $\hat{e}_3$ . el sistema. Definimos:



- $\alpha \equiv$  ángulo entre  $\hat{z}$  y  $\hat{e}_3$
- $\theta \equiv$  ángulo entre  $\hat{z}$  y  $\vec{\omega}$
- $\beta = \alpha - \theta$

Entonces:

$$\vec{L}_{CM} = L_{CM} \cos \alpha \hat{e}_3 + L_{CM} \sin \alpha \hat{e}_1 \quad (9.2.101)$$

$$= I_3 \omega_c \hat{e}_3 + I \omega'_1 \hat{e}_1$$

$$L_{CM} = I_3 \omega_c \cos \beta \hat{e}_3 + I \omega \sin \beta \hat{e}_1 \quad (9.2.102)$$

Comparando ec.(9.2.101) con (9.2.102):

$$\left. \begin{aligned} L_{CM} \sin \alpha &= I \omega \sin \beta \\ L_{CM} \cos \alpha &= I_3 \omega_c \cos \beta \end{aligned} \right\} \text{tg } \alpha = \frac{I}{I_3} \text{tg } \beta \quad (9.2.103)$$

Por el teorema del seno:

$$\frac{\omega_c}{\sin \theta} = \frac{\Omega_p}{\sin \beta} = \frac{\omega}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{\omega}{\sin \alpha} \quad (9.2.104)$$

La velocidad de precesión es, a partir de la ec.(9.2.104):

$$\Omega_p = \omega \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\omega'_1}{\sin \alpha}$$

y, como  $\omega'_1 = \omega \sin \beta = \frac{L_{CM}}{I} \sin \alpha$ :

$$\Omega_p = \frac{L_{CM}}{I} \quad (9.2.105)$$

Como, de (9.2.103),  $L_{CM} = \frac{I_3 \omega_3}{\cos \alpha}$ :

la ec.(9.2.105) puede expresarse, alternativamente:

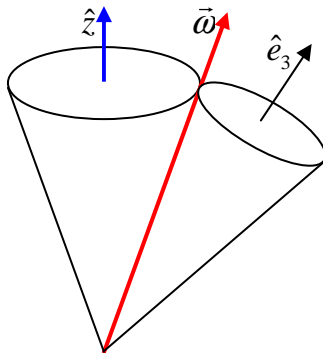
$$\Omega_p = \frac{I_3 \omega_3}{I \cos \alpha}$$

- Para calcular  $\omega_c$  consideremos la proyección del vector  $\vec{\omega}$  sobre el eje  $\hat{e}_3$ :

$$\vec{\omega} \cdot \hat{e}_3 = \omega_c + \Omega_p \hat{e}_3 \cdot \hat{z} \Rightarrow \omega_c = \vec{\omega} \cdot \hat{e}_3 - \Omega_p \hat{e}_3 \cdot \hat{z}$$

$$\omega_c = \omega \cos \beta - \Omega_p \cos \alpha = \frac{L_{CM}}{I_3} \cos \alpha - \frac{L_{CM}}{I} \cos \alpha = L_{CM} \cos \alpha \left( \frac{I - I_3}{I_3 I} \right) = I_3 \omega_3 \left( \frac{I - I_3}{I_3 I} \right)$$

$$\omega_c = \omega_3 \left( \frac{I - I_3}{I} \right) \quad (9.2.106)$$



- Teniendo en cuenta que el EIR tiene la dirección del vector  $\vec{\omega}$ , podemos describir el movimiento considerando que  $\vec{\omega}$  realiza un movimiento de precesión con  $\Omega_p$  alrededor del vector  $\vec{L}_{CM}$ , formando un cono fijo en el espacio. Además, el cono que forma  $\vec{\omega}$  alrededor del eje  $\hat{e}_3$  rueda sin deslizar sobre el cono del espacio.

### Resumen: Impulso angular de un cuerpo rígido.

Resumamos los resultados que hemos obtenido sobre el impulso angular de un cuerpo rígido.

- Un cuerpo rígido es un sistema de partículas y, por lo tanto, es válido:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{p} \quad (9.2.5)$$

- Si calculamos explícitamente el impulso angular para un cuerpo continuo respecto de un centro de momentos  $O$  sobre el eje de rotación:

$$\vec{L}_O = \vec{\Omega} \int_M r_{\perp}^2 dm - \Omega \int_M r_{\parallel} \vec{r}_{\perp} dm = I_{\Omega} \vec{\Omega} - \vec{I}_{\perp \Omega} \Omega = \vec{L}_{\parallel} + \vec{L}_{\perp} \quad (9.2.10)$$

- La componente perpendicular al eje de rotación,  $\vec{L}_{\perp}$ , se anula si:



$$\vec{L}_\perp = \vec{0} \text{ sii } \begin{cases} \vec{\Omega} \equiv \text{eje principal} \\ \vec{\Omega} \parallel \text{eje principal} \end{cases}$$

Si el cuerpo tiene alguna simetría, el o los ejes principales coincidirán con los ejes de simetría, o serán perpendiculares a un plano de simetría.

- Si el cuerpo rota alrededor de un eje principal o alrededor de un eje paralelo a un eje principal (y el centro de momentos se encuentra sobre dicho eje):

$$\vec{L}_O = \vec{\Omega} \int_M r_\perp^2 dm = I_\Omega \vec{\Omega} \quad (9.2.13)$$

De lo contrario, siempre se puede descomponer  $\vec{\Omega}$  en el sistema de ejes principales  $(e_1, e_2, e_3)$  y entonces:

$$\vec{L}_{CM} = I_1 \Omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \Omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \Omega_3 \hat{e}_3 \quad (9.2.12)$$

Notar que los ejes  $(e_1, e_2, e_3)$  son ejes *fijos al cuerpo* y, por lo tanto pueden cambiar de dirección.

- El CM siempre es una buena elección como centro de momentos, ya que, aun cuando *no se encuentre sobre el eje de rotación*, siempre es válido:

$$\vec{L}_{CM} = I_{CM} \vec{\Omega} \quad (9.2.25)$$

- *Ecuación de movimiento del impulso angular.* La ecuación de movimiento más general es:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^e - \vec{v}_O \times \vec{p} \quad (9.2.11)$$

- La ec.(11) se simplifica eligiendo convenientemente el centro de momentos:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{N}_O^e \text{ sii } \begin{cases} \vec{v}_O = \vec{0} \text{ respecto del sistema de referencia} \\ O \equiv CM \\ \vec{v}_O \parallel \vec{v}_{CM} \end{cases} \quad (\text{ec.}(6.2.28), \text{nota } 9)$$

Notemos que el centro de momentos es un punto del espacio y no un punto sobre el cuerpo, por lo que, si elegimos un punto sobre el EIR,  $\vec{v}_O$  es la velocidad con que se desplaza **el punto del espacio** elegido como origen de momentos, y su velocidad **no es nula**, en general, y no la de los puntos materiales por los cuales, instante a instante, pasa el EIR.

- Nuevamente:

- Si el cuerpo rota alrededor de un eje principal o alrededor de un eje paralelo a un eje principal, y el centro de momentos se encuentra sobre dicho eje, o es el CM, y

➤ el centro de momentos cumple alguna de las condiciones del ítem anterior:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_{CM} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{\Omega} \vec{\gamma} = \vec{N}_O^e \quad (9.2.15)$$

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = I_{CM} \frac{d\vec{\Omega}}{dt} = I_{CM} \vec{\gamma} = \vec{N}_{CM}^e \quad (9.2.26)$$

• Finalmente, si se escriben las ecuaciones de movimiento del impulso angular en el sistema de ejes principales del cuerpo:

$$\begin{aligned} N_{O1}^e &= I_1 \dot{\Omega}_1 + \Omega_2 \Omega_3 (I_3 - I_2) \\ N_{O2}^e &= I_2 \dot{\Omega}_2 + \Omega_1 \Omega_3 (I_1 - I_3) \\ N_{O3}^e &= I_3 \dot{\Omega}_3 + \Omega_1 \Omega_2 (I_2 - I_1) \end{aligned} \quad (9.2.92)$$


---