Apunte de ecuaciones diferenciales - Física 1 - Abril 2019

Este apunte busca, con una prosa informal, amigarte un poco con las ecuaciones diferenciales. Si al terminar de leerlo volvés al oscilador armónico y la resolución no te parece magia oscura, y si podés volver a la guía de osciladores y centrarte en la física, sin perderte en un mar de confusiones matemáticas, entonces este apunte cumplió su objetivo.

(1)Las ecuaciones diferenciales son ecuaciones

Para arrancar: eso mismo, las ecuaciones diferenciales son ecuaciones. En este apartado vamos a recorrer tres problemitas muy sencillos, que todas y todos sabemos resolver.

Volvamos a las bases y recordemos las primeras ecuaciones que nos encontramos. Probablemente fue en el colegio, y en el marco de algún problema medio trabalenguas como el que sigue:

Problema 1: *Julieta recibe dos caramelos y los guarda en su bolsillo. Muy contenta, cuenta los caramelos que tiene ahora y dice "¡Tengo 10 caramelos!". La pregunta entonces es: ¿Cuántos caramelos tenía Julieta?*

Repasemos un par de formas en que podríamos resolverlo, no te enojes, ya sé que sabes cómo hacerlo. Las dos arrancan escribiendo nuestro problema de la siguiente manera:

$$x + 2 = 10 \tag{P1.1}$$

Antes de resolverlo, te dejo dos preguntas: ¿Existe una solución para este problema? ¿Cuántas soluciones hay? Para este caso, sabemos que hay solución y hay una única, pero por qué?

Resolución 1: Una manera de resolverlo es restando 2 a ambos lados de la igualdad, y llegar a que $x = 8$. Super sencillo.

Resolución 2: Otra manera de resolverlo es apelar a nuestra intuición, ganada en una larga trayectoria en compra de caramelos, y decir: *"Propongo que la solución es x=8"*. Ahora bien, si proponemos tenemos que mostrar que nuestra propuesta es correcta. La manera de ver si nuestra propuesta es solución es metiendola en la ecuación y preguntandonos si vale la igualdad:

$$8 + 2 = 10??? \tag{P1.2}$$

Vemos que cumple la ecuación, entonces nuestra propuesta efectivamente es solución y nos podemos ir tranquilos a descansar. Veamos el segundo problema.

Problema 2:*Sea x un número real. Busque las soluciones de la siguiente ecuación:*

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

Nuevamente, esta es una ecuación porque tenemos una incógnita. Buscamos números reales que cumplan la igualdad, o, en otras palabras, buscamos raíces de un polinomio de grado 2. De nuevo, dos maneras de resolverlo.

Resolución 1: Usamos nuestra querida resolvente para llegar a que:

$$x_2^1 = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4 * 6}}{2} \tag{P2.1}$$

De donde sale que nuestras soluciones son dos: $x_1 = -6$ y $x_2 = 1$.

Resolución 2: Después de largas horas de mirar fijo nuestra ecuación, nos avivamos que $x = 1$ tiene pinta de cumplirla. Confiados y con el índice apuntando al cielo decimos: *"Propongo que $x = 1$ es solución."* Pero sabemos que esto no basta, y que tenemos que mostrar que efectivamente nuestra propuesta es solución. ¿Cómo? Reemplazando en la ecuación y preguntando si vale la igualdad:

$$1^2 + 5 * 1 - 6 = 0??? \tag{P2.2}$$

Como nuestra propuesta cumple la ecuación, es solución. Sabemos que nos falta una solución más. Habrá que hacer otra propuesta. Podríamos graficar y ver que la otra raíz es $x = -6$.

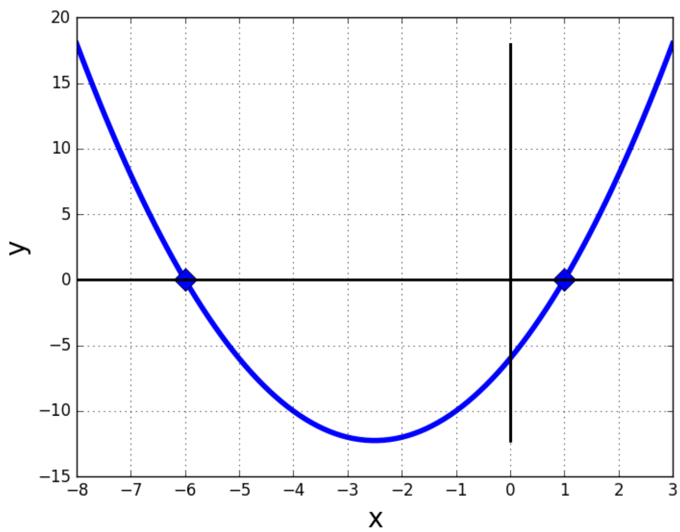

Figura 1: *Polinomio del problema 2.*

Dos cosas importantes:

1. Para este problema sabemos que hay dos soluciones, esto nos dice que si encontramos dos soluciones, ya está, el problema está resuelto. Si nos quedamos dándole vueltas no van a aparecer más soluciones. [1]

2. No tenemos que pensar que la Resolución 1 es más válida que la Resolución 2. Por más de que nos encante la resolvente, hacer más cuentas no es más válido que proponer soluciones. Eso sí, al proponer hay que chequearlo!

Antes de que te aburras, veamos un último problema y pasemos al segundo y último apartado.

Problema 3:*Después de largos meses de trabajo, Miguel logra terminar de construir su primer cohete. La misión consiste en mandarlo en línea recta hacia la luna. Está planeada para empezar un viernes a las 0hs. Miguel agarra un reloj y un lápiz, y con ayuda de su telescopio se dispone a anotar la posición del cohete. A las* $0hs$ *Miguel anota que el cohete está en el piso, a altura* $y = 0m$*. Un instante después el cohete despega. Sin poder contener la emoción, Miguel se desmaya. Cuando logra recuperar el conocimiento, al día siguiente, Miguel se pregunta cuál fue la trayectoria del cohete después de haberlo visto a las* $0hs$*.*

En este problema, tenemos una incógnita que es la posición del cohete en el tiempo. Es posible, como en los dos casos anteriores, formular el problema como una ecuación, en donde la diferencia es que ahora nuestra incógnita no es un número real, sino una función del tiempo. Entonces, otra manera de escribir este problema sin tanto cuento es: Busco una función $y = y(t)$ que cumpla:

$$y(t = 0) = 0 \tag{P3.1}$$

Sin dar muchas vueltas, las trayectorias que cumplen esto son infinitas, dibujo dos.

[1] En otro caso las raíces podrían ser complejas, o podríamos tener una raíz doble, pero aplica igual.

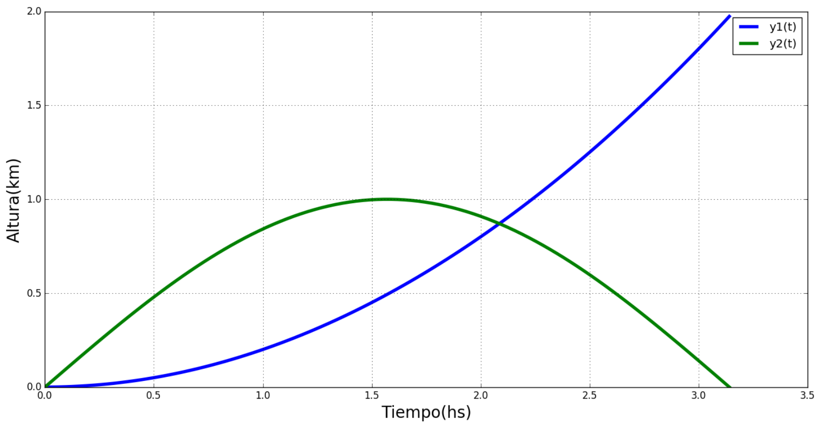

Figura 2: *Dos trayectorias posibles que cumplen la ecuación del problema 3.*

Terminando, podemos tener una ecuación cuya incógnita es una función del tiempo, y sin una regla que nos diga cómo evoluciona nuestra función, no hay mucho para decir.

(2)<u>Las ecuaciones diferenciales son diferenciales</u>

Eso mismo, *una ecuación diferencial es una ecuación en donde la incógnita es una función, y en la cual aparecen derivadas de esta función que uno busca.* En mecánica clásica la máquina de generar ecuaciones diferenciales es Newton. Y sin darnos cuenta, ya resolvimos un montón de ecuaciones diferenciales, incluso antes de llamarlas con este nombre. El ejemplo canónico es la maceta que cae del balcón de un décimo piso. Si uno escribe la segunda ley, tomando un eje y vertical hacia arriba:

$$\ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -g \tag{Sec2.1}$$

Es decir, en este problema uno se pregunta por todas las funciones que cumplan que su derivada segunda con respecto al tiempo sea una constante. Al involucrar una derivada segunda, esta ecuación se dice una ecuación diferencial de segundo orden. Como ya vimos en el inicio del curso, una manera de resolverlo es integrando dos veces, camino por el cual se llega a nuestra querida ecuación horaria: $y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{g}{2}(t - t_0)^2$.
Otra manera es intuir que la curvatura de un polinomio de grado dos es constante, es decir que si derivo dos veces una parábola me da una constante. Con esta idea podes proponer $y(t) = A + Bt + Ct^2$ y ver que es solución sólo si $2C = -g$, por lo que la solución es $y(t) = A + Bt - \frac{g}{2}t^2$. Fíjate que esta solución y la ecuación horaria no tienen exactamente la misma pinta. La única diferencia es que la ecuación horaria está escrita

para que reconozcamos fácilmente que los dos parámetros libres son la velocidad y la posición inicial (x_0 y v_0). En otras palabras, en el segundo caso B no es la velocidad inicial si el tiempo no arranca en 0, porque fijate que si evalúo $\dot{y}$ en $t = t_0$, tengo:

$$\dot{y}(t = t_0) = B - gt_0 = v_0 \tag{Sec2.2}$$

Si además de esta, planteas que $y(t_0) = x_0$, y despejas A y B, vas a llegar a la ecuación horaria.

Notemos algo importante. De una ecuación diferencial como la de la maceta, tenemos una familia de soluciones, las cuales son todos los polinomios de grado dos con esa curvatura $\frac{-g}{2}$. Ahora bien, si uno fija las condiciones iniciales: velocidad y posición inicial de la maceta, entonces la solución es única. La maceta sigue una trayectoria, no tiene más opciones. Si tiras una maceta bajo las mismas condiciones dos veces, deberías ver lo mismo. En la figura que sigue hay tres trayectorias posibles. Una que se cae a tiempo cero, otra que la tiran para arriba con velocidad de $3\frac{m}{s}$ a tiempo cero, y la tercera en la que se cae a tiempo $t = 0{,}5s$. Las tres son soluciones de la misma ecuación.

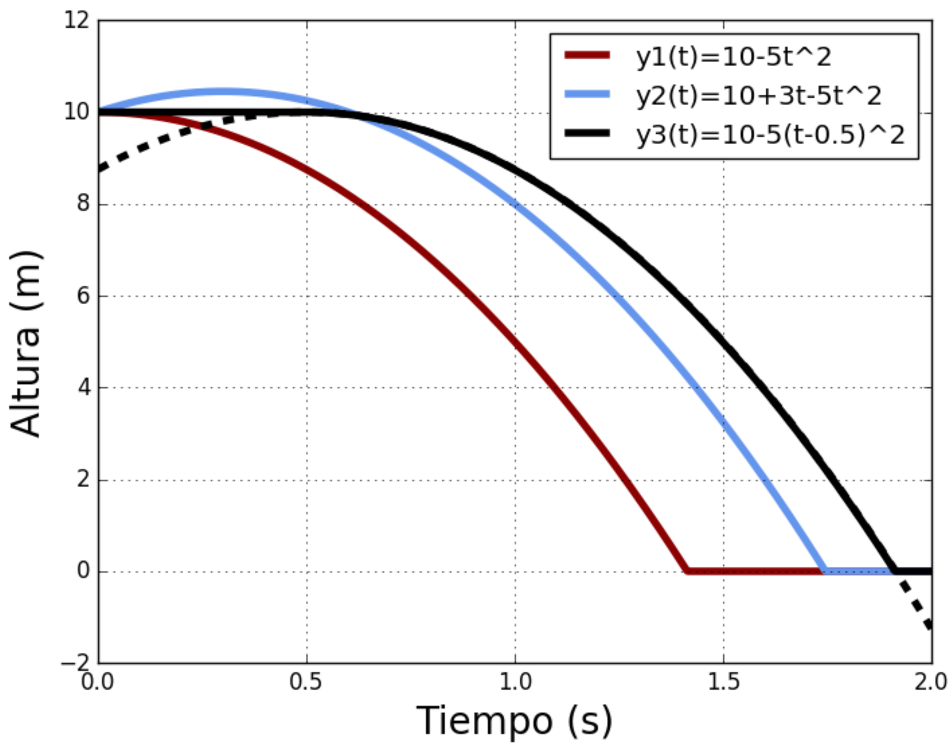

Figura 3: *Tres trayectorias de la maceta*

Acá, en la Figura 3, grafiqué las parábolas que nos dice Newton, pero corté las soluciones para que mueran cuando llega al piso ($y = 0$), y en el caso en que cae después le pedí que esté en $y = 10m$ hasta $t = 0{,}5$, momento en el que empieza a caer. Si completo la solución se ve como la punteada, pero la que describe el movimiento de la maceta es la línea. Basta de macetas, veamos dos problemas y ya.

<u>Problema 4:</u> *Encuentre $x = x(t)$ tal que:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x \\ x(0) = a > 0 \end{cases} \tag{P4.1}$$

Buscamos una función tal que si la derivo me da la misma función. Quizás se te ocurre alguna. Otra manera equivalente de formular el problema es diciendo: buscamos una función que en cada punto su pendiente sea igual al valor de la función en ese punto (leer la frase anterior hasta que deje de tener sentido).

Igual que en la sección anterior, veamos dos maneras de resolverla.

Resolución 1: Notemos que si $f(t)$ es una función del tiempo, por regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{d}{dt}log(f(t)) = \frac{1}{f(t)}\frac{df}{dt} = \frac{\dot{f}}{f} \tag{P4.2}$$

Por lo tanto, nuestra ecuación, pasando $x(t)$ dividiendo, es:

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = 1 = \frac{d}{dt}log(x(t)) \tag{P4.3}$$

Integrando entre 0 y t, tenemos que: $log(x(t)) - log(x(0)) = t$. Podemos juntar los logarítmos: $log(\frac{x(t)}{x(0)}) = t$. Y por lo tanto, podemos escribir nuestra solución como:

$$x(t) = x(0)e^t = ae^t \tag{P4.4}$$

Resolución 2: Me avivo que la derivada de una exponencial es sí misma. Propongo $x(t) = e^t$. Al proponer tengo que verificar que es solución, y efectivamente $\dot{x} = e^t = x(t)$. Sin embargo, al evaluar la condición inicial entramos en problemas, porque $x(0) = 1$. Entonces nos damos cuenta que si proponemos $x(t) = Be^t$, con B una constante real, esta también es solución de la ecuación, y al evaluar la condición inicial nos queda que $x(0) = B = a$.

Antes de pasar al último problema, notemos que la ecuación que queríamos resolver se podría escribir:

$$\dot{x} - x = 0 \tag{P4.5}$$

Como podemos escribir de un lado del igual todo lo que tiene a nuestra función incóngita $x(t)$, y del otro lado nos queda un 0, esta ecuación se dice homogénea.
Veamos un último problema.

Problema 5:*Dada C una constante real, encuentre $x = x(t)$ tal que:*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x + C \\ x(0) = a > 0 \end{cases} \tag{P5.1}$$

Este es un problema igual al anterior, pero nos agregan esta constante C. Otra manera de escribirlo es $\dot{x} - x = C$. A diferencia del caso anterior, al juntar todo lo que tiene x de un lado, del otro no nos queda un 0, sino un escalar C. Por eso, esta se dice una ecuación no homogénea. Una manera de resolver este problema es partiendolo en dos problemas más sencillos. Esto es: buscando escribir la solución del problema como una solución particular ($x_p(t)$) y la solución general del problema homogéneo ($x_h(t)$):

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t) \tag{P5.2}$$

Acá, $x_h(t)$ es la solución general del problema homogéneo: $\dot{x_h} = x_h$; y $x_p(t)$ es una solución de problema no homogéneo: $\dot{x}_p = x_p + C$. La gracia de escribir esto es que si conocemos las soluciones del problema homogéneo, nos basta con encontrar una sóla de la familia de soluciones del problema no homogéneo y con eso estamos. Esta idea funciona porque:

$$\dot{x}(t) = \dot{x_h} + \dot{x_p} = (x_h) + (x_p + C) = (x_h + x_p) + C = x + C \tag{P5.3}$$

Es decir, que si escribimos nuestra solución como la contribución de una homogenea y una particular, debido a que cada parte hace lo suyo, el total es solución de la ecuación que queremos resolver. Si en nuestra ecuación tuviesemos algo no lineal, por ejemplo $\dot{x} = x^2 + C$, esta manera de encararlo no funcionaría.
Pasemos entonces a resolver el problema homogéneo, o a re-resolverlo. Como es el Problema 4, sabemos que $x_h(t) = De^t$.
Para el no homogeneo hay que arremangarse. Como regla general: no hay regla general para resolver ecuaciones diferenciales. Lamentablemente, o afortunadamente, no tenemos el equivalente a una resolvente acá. Para nuestro problema, después de mirarlo fijo, largo y tendido, levantamos los brazos al cielo clamando "*Propongo, sí, propongo que $x_p(t) = E$ puede ser solución.*"Para que nuestra propuesta sea solución tiene que cumplir con la

ecuación, nos preguntamos si cumple:

$$\dot{x_p} = x_p + C??? \tag{P5.4}$$

$$\frac{d}{dt}(E) = 0 = E + C??? \tag{P5.5}$$

Es decir, que para que nuestra propuesta cumpla necesitamos que $E + C = 0$. Con esto, tenemos que una solución del problema no homogéneo es $x_p(t) = -C$. Decimos que es **una** solución porque fijate que si tuvieses que pedir que esta solución cumpla la condición inicial estarías en problemas (como nos había pasado con la primer propuesta en la Resolución 2 del Problema 4).

Juntando todo, nuestra solución general es: $x(t) = De^t - C$. Si pedimos que cumpla la condición inicial, como conocemos la familia de soluciones del homogéneo, podemos llegar a que la solución que buscamos es: $x(t) = (a + C)e^t - C$. Y listo, ya está. Mas allá de que resolvimos con el cuento del homogéneo y particular, podes verificar que ésta es solución del problema (ec. P5.1), y solución con todo el derecho.

Preguntas y conclusiones

Dando por terminados los dos problemas, detengámosnos en las siguientes preguntas:

1.*Muy linda la matemática, ¿pero qué tienen de real o interesante los Problemas 4 y 5?*

El Problema 4 puede pensarse como el modelo más sencillo para describir la dinámica de una población. En este, el crecimiento de la población es proporcional al número de individuos. Si la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad es constante, y una constante positiva, se podría expresar el problema en el idioma de ecuaciones diferenciales como en la ec. P4.1, y tendríamos como solución un crecimiento exponencial de la población. Esto fue planteado por Malthus, en el siglo XIX, y tuvo a mucha gente bastante preocupada, como ilustró más adelante nuestro gran amigo Quino.

Como irán viendo, desde que Newton nos dejó sus leyes, la gente buscó traducir problemas físicos a ecuaciones diferenciales. La gran ventaja es que este tipo de formulación nos permite, operacionalmente, predecir la evolución del sistema en estudio.[2]

2. *¿Cómo sabíamos que hay solución para estos problemas? ¿Podría haber pasado que no exista una solución al problema que planteamos?*
3. *Ok, resuelvo el Problema 4 y me da la exponencial, ¿pero de todas las funciones del mundo posta la única que cumple esto es la exponencial? En otras palabras, ¿es la exponencial la única solución? Y lo mismo para el Problema 5.*

Las respuestas a estas dos preguntas se llama *Teorema de existencia y unicidad* para ecuaciones diferenciales ordinarias (forma corta de decir para ecuaciones que tienen como incógnita una función que depende de una única variable, por ejemplo el tiempo). Es decir que, para una ecuación diferencial con condición inicial de la pinta:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Hay un teorema que dice que si la función $f(t, x(t))$ cumple ciertos requisitos, la solución del problema existe y es única.[3][4] Es decir que si encontrás una solución, para esa condición inicial, listo. Igual que en el caso de las raíces del polinomio del Problema 2, si te quedas dándole vueltas no vas a encontrar una solución distinta.
Lo que puede pasar es que sepas que la solución del problema existe, pero no puedas escribir la solución en forma cerrada. Esto es, que digas $x(t)$ es igual a sumas, restas,

[2] Argumento basado en "Dinámica no lineal", G.B. Mindlin.
[3] Para el Problema 4 la función f sería $f(t, x(t)) = x(t)$. Para el Problema 5 sería $f(t, x(t)) = x(t) + C$.
[4] Si querés adelantarte a Mate 3, podes mirar el apunte de N. Wolanski, "Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias".

multiplicaciones, logaritmos, exponenciales, polinomios, etc. Estas ecuaciones no son producto de matemáticos retorcidos, rápidamente nos vamos a encontrar con ellas. El ejemplo por excelencia es el problema de 3 cuerpos que interactúan gravitatoriamente.

Este resultado, que escribimos para ecuaciones que tienen una sola derivada se extiende fácilmente a ecuaciones diferenciales de segundo orden (con derivadas segundas) como las que salen de Newton. Por eso, y ya terminando, no te enojes si para el oscilador armónico ($\ddot{x} = -\omega^2 x$) escribimos la solución como $x(t) = Acos(\omega t + \phi)$ o como $x(t) = Bcos(\omega t) + Csen(\omega t)$. Si bien se escriben distinto, al fijar las dos condiciones iniciales la curva que dibujan es la misma.

En forma de conclusión: existe una maceta que se cae, y se cae de una única manera. Menos mal.

Quejas, dudas, sugerencias:

facu.fainstein@gmail.com