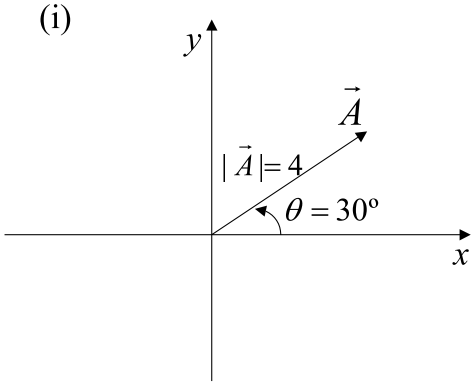
GUIA 0

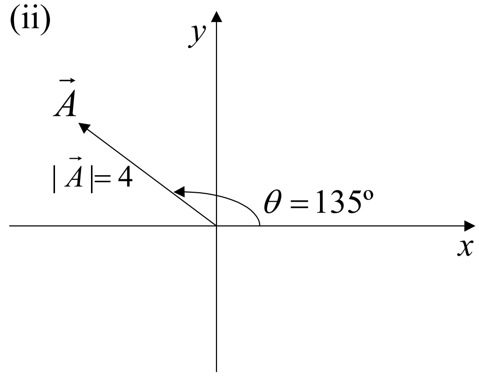
1 - Hallar el módulo del vector de origen en (20,-5,8) y extremo en (-4,-3,2).

2 - a) Hallar las componentes cartesianas de los siguientes vectores:

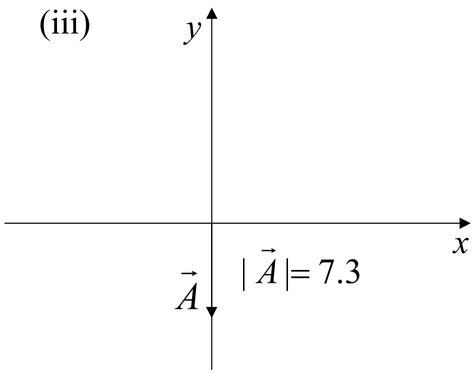
(i)



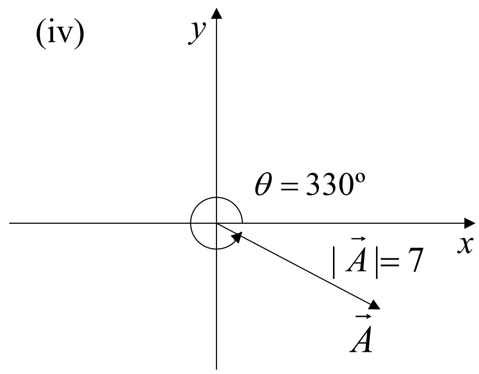
(ii)



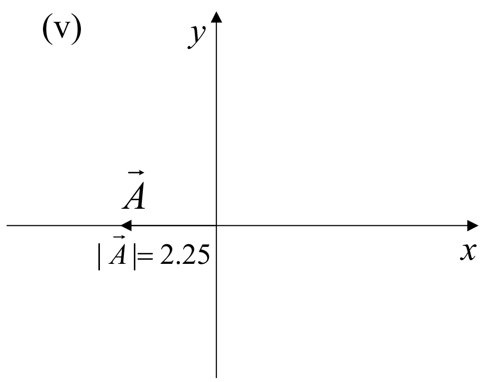
(iii)



(iv)



(v)



b) Hallar el módulo y dirección de los siguientes vectores y representarlos gráficamente:

(i) $\vec{A} = (3,3)$

(ii) $\vec{B} = (-1.25,-2.16)$

(iii) $\vec{C} = (-2.5,4.33)$

(iv) $\vec{D} = (5,0)$

(v) $\vec{E} = (0,3)$

3 - Qué propiedades tienen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tales que:

a) $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ y $\left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right| = \left|\vec{C}\right|$

b) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{A}-\vec{B}$
c) $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ y $A^2+B^2=C^2$

4 - Usando la definición de producto escalar, calcular

a) $\hat{i}\cdot\hat{j}$ e) $\hat{j}\cdot\hat{j}$
b) $\hat{i}\cdot\hat{k}$ f) $\hat{k}\cdot\hat{k}$
c) $\hat{j}\cdot\hat{k}$ g) $\hat{j}\cdot\hat{i}$
d) $\hat{i}\cdot\hat{i}$

donde $\hat{i}$ = (1,0,0), $\hat{j}$ = (0,1,0), $\hat{k}$ = (0,0,1).

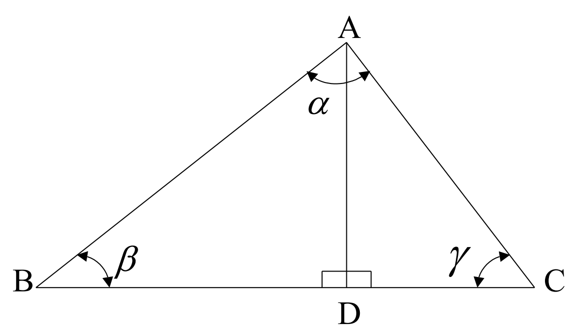
5 - Haciendo uso de la propiedad distributiva del producto escalar respecto de la suma, $\vec{C}\cdot\left(\vec{E}+\vec{F}\right)=\vec{C}\cdot\vec{E}+\vec{C}\cdot\vec{F}$ y de los resultados obtenidos en el ejercicio anterior, demostrar que si $\vec{A}=a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k}$ y $\vec{B}=b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k}$ entonces,

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

6 - a) Utilizando el teorema de Pitágoras y la definición de las funciones trigonométricas, demostrar en el triángulo de la figura el "Teorema del Coseno":

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\ BC\cos\beta,$$

donde AB, BC y AC son las longitudes de los respectivos lados.



AYUDA: Considerar los triángulos rectángulos ABD y ADC.

b) Utilizando la definición del seno demostrar sobre los mismos triángulos que

$$AC/\text{sen}\ \beta = AB/\text{sen}\ \gamma,$$

y generalizar el resultado para demostrar el "Teorema del Seno":

$$AC/\text{sen}\ \beta = AB/\text{sen}\ \gamma = BC/\ \text{sen}\ \alpha.$$

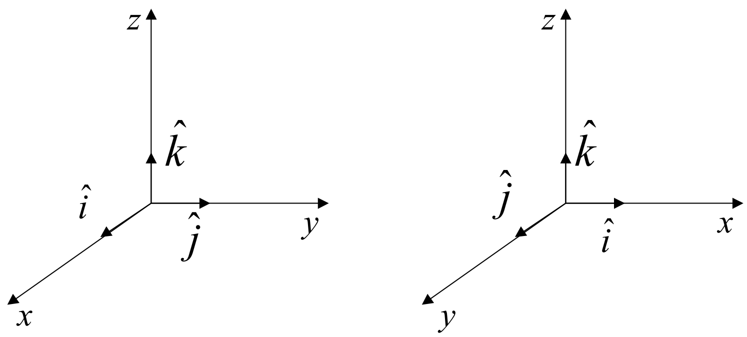
7 - a) Sean $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ los versores de la terna mostrada en la figura (a). Usando la definición

de producto vectorial, calcular

(i) $\hat{i} \times \hat{j}$ (ii) $\hat{k} \times \hat{i}$ (iii) $\hat{j} \times \hat{k}$

(iv) $\hat{i} \times \hat{i}$ (v) $\hat{j} \times \hat{j}$ (vi) $\hat{k} \times \hat{k}$

b) Repetir el cálculo anterior para la terna de la figura (b) y comparar con los resultados obtenidos en ambos casos.



(a) (b)

NOTA: En lo sucesivo se convendrá en trabajar con ternas análogas a las del caso (a), en las cuales $\hat{i}$ x $\hat{j}$ = $\hat{k}$, que se denominan “Ternas Derechas”.

8 - a) Demostrar que el producto vectorial no es asociativo y que dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$, se cumple:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right).$$

a) Probar que cualesquiera que sean los vectores, se cumple:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) + \vec{B} \times \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) + \vec{C} \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = 0\,.$$

c) Demostrar que el producto mixto de tres vectores cualesquiera $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es igual al volumen del paralelepípedo construido sobre los mismos una vez llevado a partir de su origen común.

d) Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que tres vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ sean paralelos a un mismo plano es que su producto mixto sea nulo.

9 - Hallar la expresión de los vectores posición, velocidad y aceleración en coordenadas polares y cilíndricas. Representar gráficamente.

CINEMÁTICA

10 - Un cuerpo que en el instante $t = 0$ se encuentra en un punto A, viaja en línea recta con velocidad constante de módulo desconocido v. Cuando transcurre un tiempo T el móvil pasa por un punto B que está a distancia d de A.

a) Halle v.
b) Dé dos expresiones para la posición del cuerpo en función del tiempo, una considerando un sistema de coordenadas con origen en A y otra considerando un sistema de coordenadas con origen en B, y grafíquelas.

11 - Un automóvil viaja en línea recta con velocidad constante desde A hasta C, pasando por B. Se sabe que por A pasa a las 12 hs., por B a las 13 hs. y por C a las 15 hs. (AB = 50 km, BC = desconocido).

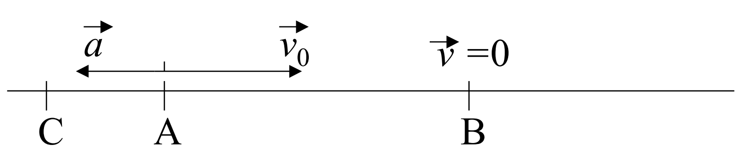
a) Elija un origen de tiempo y un sistema de referencia.
b) Elija un instante t_0 ¿cuánto vale x_0? Escriba la ecuación de movimiento.
c) Elija otro instante t_0 ¿cuánto vale x_0? Escriba la ecuación de movimiento.
d) Calcule la velocidad del auto y la distancia BC.

12 - Un móvil 1 viaja en línea recta desde A hacia B (distancia AB = 300 km) a 80 km/h y otro móvil 2 lo hace desde B hacia A a 50 km/h. El móvil 2 parte 1 hora antes que el móvil 1.

a) Elija un origen de tiempo y un sistema de referencia.
b) Escriba los vectores velocidad $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de los móviles 1 y 2, respectivamente.
c) En un mismo gráfico represente posición vs. tiempo para ambos móviles. Interprete el significado del punto de intersección de ambas curvas.
d) En un mismo gráfico represente velocidad vs. tiempo para ambos móviles. ¿ Cómo encontraría en este gráfico el tiempo de encuentro ?.

13 - Repetir el problema anterior para el caso en que ambos móviles viajan desde A hacia B.

14 - Un cuerpo viaja en línea recta con aceleración constante de módulo desconocido a y dirección como la de la figura. En el instante $t = 0$ el móvil pasa por el punto A con velocidad $\vec{v}_0$ como la de la figura, en $t = t_0$ el móvil pasa por B y tiene velocidad nula y en $t = t_1$ el móvil pasa por C.



a) Elija un sistema de referencia y escriba las expresiones para la posición y la velocidad del móvil en función del tiempo, o sea $x(t)$ y $v(t)$.
b) Halle a y la distancia AB.
c) Calcule la distancia BC y la velocidad del móvil cuando pasa por C, ¿ puede usar para este cálculo las expresiones $x(t)$ y $v(t)$ que escribió en el inciso a) ?.
d) Halle la velocidad media entre A y B y entre A y C, ¿ coinciden estas dos

velocidades medias ? ¿ por qué ?.

15 - Un auto viaja por una ruta a 20 m/seg, un perro se cruza a 50 m,

a) ¿cómo deben ser los sentidos de los vectores aceleración y velocidad para que el auto frene?.
b) ¿Cuál es la desaceleración mínima que debe imprimirse al automóvil para no chocar al perro?.
c) Idem que (b) teniendo en cuenta que el tiempo de respuesta del chofer es 0.3 seg.
d) Muestre la situación calculada en (b) y (c) en un gráfico posición vs. tiempo.

16 - Un cuerpo se deja caer desde un globo aerostático que desciende con velocidad 12 m/seg.

a) Elija un sistema de referencia y escriba las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo.
b) Calcule la velocidad y la distancia recorrida por el cuerpo al cabo de 10 seg.
c) Resuelva los incisos (a) y (b) considerando que el globo asciende a 12 m/seg.

17 - Una piedra en caída libre recorre 67 m en el último segundo de su movimiento antes de tocar el piso. Suponiendo que partió del reposo, determine la altura desde la cual cayó, el tiempo que tarda en llegar al piso y la velocidad de llegada.

18 - Desde una terraza a 40 m del suelo se lanza hacia arriba una piedra con velocidad 15 m/seg.

a) ¿Con qué velocidad vuelve a pasar por el nivel de la terraza?.
b) ¿Cuándo llega al suelo?.
c) ¿Cuándo y dónde se encuentra con una piedra arrojada desde el suelo hacia arriba con una velocidad de 55 m/seg y que parte desde el suelo en el mismo instante que la anterior?.
d) Represente gráficamente.

19 - Un automóvil cuya velocidad es 90 km/h pasa ante un puesto caminero. En ese instante sale en su persecución un patrullero que parte del reposo y acelera uniformemente de modo que alcanza una velocidad de 90 km/h en 10 seg. Halle:

a) El tiempo que dura la persecución.
b) El punto en que el patrullero alcanza el automóvil.
c) La velocidad del patrullero en el punto de alcance.

CINEMÁTICA

1 - Un cuerpo se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo a la ecuación

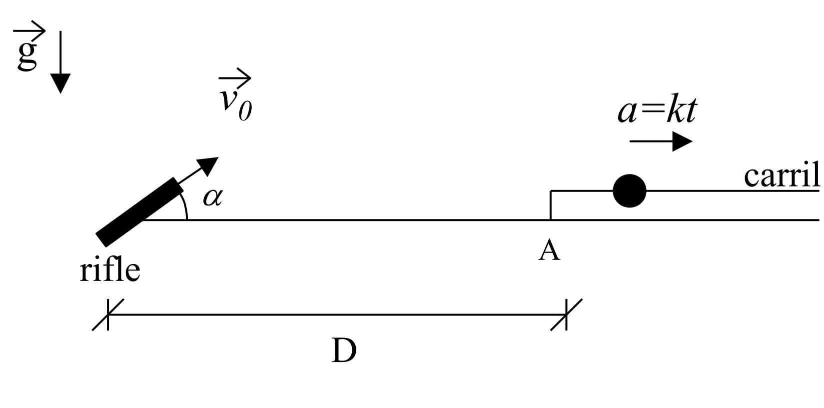
$$x = -kt^3 + bt^2 \text{, con } k, b \text{ constantes } \geq 0.$$

a) Calcule la velocidad y la aceleración del cuerpo en función del tiempo, y grafíquelas.
b) Halle el instante de tiempo, y la correspondiente posición, en el cual el cuerpo tendrá velocidad nula.
c) Describa cualitativamente el movimiento indicando en qué intervalos de tiempo el movimiento es acelerado y en cuáles desacelerado.

2 - Un cuerpo se mueve en línea recta partiendo a $t = 0$ de la posición $x(t = 0) = 0$ con velocidad $v\ (t = 0) = v_0$.
Encuentre $x(t)$ y $x(v)$ en los casos en que la aceleración del cuerpo está dada por la ecuación (k constante):

a) $a = kt^2$, $k > 0$.
b) $a = -kv^2$, $k > 0$.
c) $a = kvx$, $k > 0$.

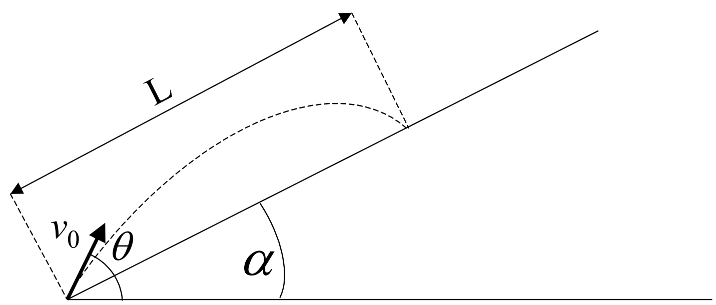
3 - Un juego de un parque de diversiones consiste en una pelotita que se mueve por un carril rectilíneo con aceleración $a = kt$ hacia la derecha, con k constante > 0. A $t = 0$, la pelotita se halla en reposo en el extremo izquierdo del carril (punto A). El jugador dispone de un rifle, ubicado a una distancia D del punto A, que dispara bolas con velocidad v_0 variable, pero con un ángulo α fijo.



a) ¿Con qué velocidad v_0 debe disparar el jugador para que le sea posible acertar en la pelotita? Es decir, ¿para qué valor de v_0 las trayectorias de la bala y la pelotita se intersectan?

b) Si v_0 es alguna de las velocidades halladas en a), ¿en qué instante debe disparar el jugador para pegarle a la pelotita?

4 - Un jugador de fútbol patea la pelota fuera de la cancha hacia las tribunas con velocidad inicial v_0 y ángulo de elevación θ. La tribuna forma un ángulo α con la horizontal (ver fig.). Se aconseja utilizar un sistema de referencia con los ejes (x,y) en las direcciones horizontal y vertical, respectivamente.



a) Muestre que la expresión del alcance L en función del ángulo θ está dada por:

$$L = \frac{2v_0^2}{g\cos^2\alpha}\operatorname{sen}(\theta-\alpha)\cos\theta\,.$$

b) Grafique el alcance L en función de θ y demuestre que para cada valor de L hay dos valores posibles de θ (tiro rasante y tiro de elevación).

c) ¿Cuál es el ángulo θ para el cual el alcance es máximo?

5 - Un cuerpo inicialmente en reposo (θ (t = 0) = 0, ω (t = 0) = 0) es acelerado en una trayectoria circular de 1,3 m de radio, de acuerdo a la ley $\gamma = 120s^{-4}t^2 - 48s^{-3}t + 16s^{-2}$ donde γ es la aceleración angular medida en seg^{-2}.

Halle:

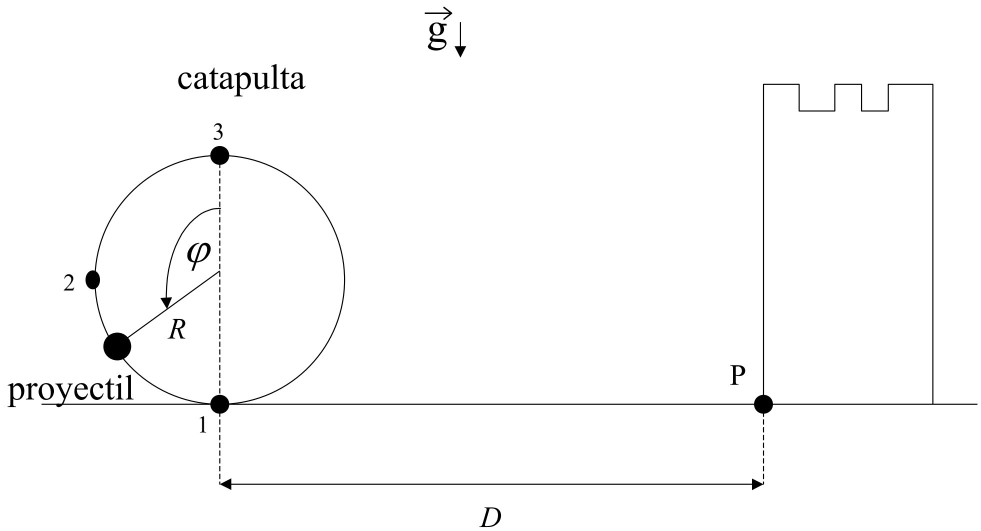
a) θ = θ (t)

b) ω = ω (t)

c) el vector aceleración (utilice la descomposición polar).

d) ¿cuánto vale $\vec{v}$ en t = 2 seg.?

6 - Una catapulta está ubicada a una distancia D de un castillo (ver fig.). La catapulta se utiliza para lanzar proyectiles y consiste en un dispositivo mediante el cual cada proyectil parte desde la posición (1) con velocidad nula, luego se mueve sobre la trayectoria circular de radio R con una aceleración angular $\ddot{\varphi}$ dada por $\ddot{\varphi} = -\frac{(n+1)K}{\pi^{n+1}}\varphi^n$ (donde K y n son constantes, n = 4) y finalmente es liberado en la posición (3).



a) Exprese la velocidad tangencial v del proyectil (cuando está en la catapulta) en función de K, R y φ. Calcule v para la posición (2).

b) Calcule (en función de K, R y g) la distancia D a la que hay que ubicar la catapulta para que los proyectiles lanzados por ella peguen en el punto P del castillo.

7 - Un nadador puede nadar a 0,7 m/seg. respecto del agua. Quiere cruzar un río de 50 m de ancho. La corriente del agua es de 0,5 m/seg.

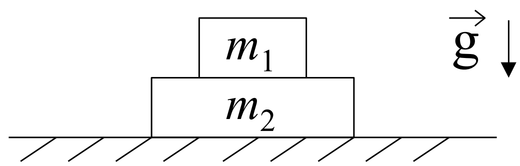
a) Si quiere llegar al punto opuesto en la otra orilla, ¿en qué dirección debe nadar? ¿cuánto tarda en cruzar?

b) Si quiere cruzar en el menor tiempo posible, ¿en qué dirección debe nadar?, ¿a qué punto llegará?

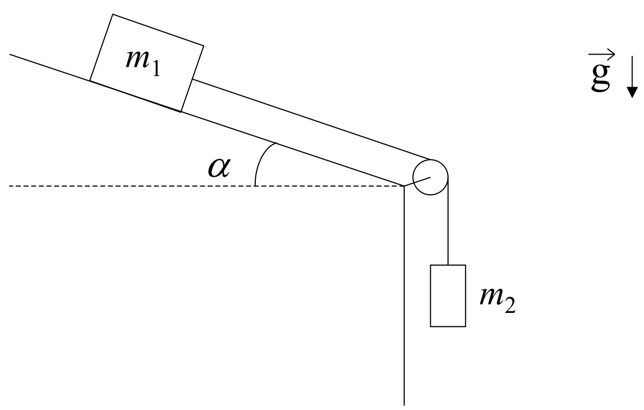
DINÁMICA

Los items denotados con * pueden elegirse para resolver como trabajo especial de computación.

1 - En el sistema de la figura señale las fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos e indique los pares de interacción.
Sugerencia: aísle cada cuerpo, dibuje las fuerzas que actúan sobre él, aclarando qué interacción las origina.

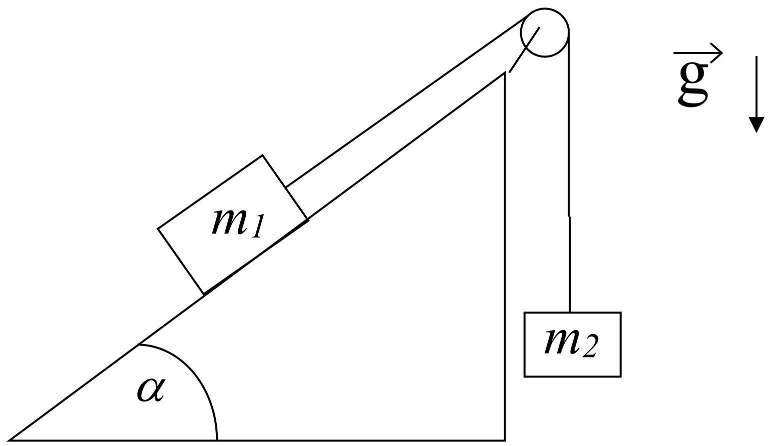


2 - Sea el sistema de la figura donde: no hay fricción, el hilo tiene masa despreciable y es inextensible y la polea es de masa despreciable y sin rozamiento.

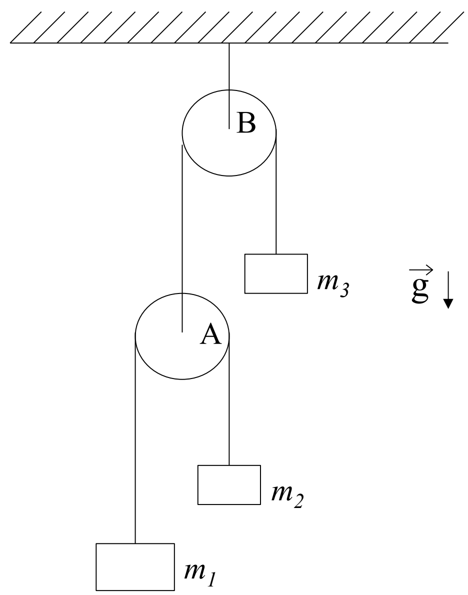


a) Diga cuáles son todas las fuerzas ejercidas sobre las masas y sobre el hilo. Indique los pares de acción y reacción.
b) ¿Cuál es la aceleración del sistema en función de m_1, m_2, α y g?

3 - El sistema de la figura, formado por dos partículas de masas m_1 y m_2 parte del reposo y se mueve de tal forma que la masa m_1 sube recorriendo todo el plano inclinado en un tiempo T. Intercambiando las partículas, m_2 recorre todo el plano subiendo en un tiempo $T/4$ (no hay rozamiento). Sabiendo que $m_1/m_2 = 9$, hallar α.



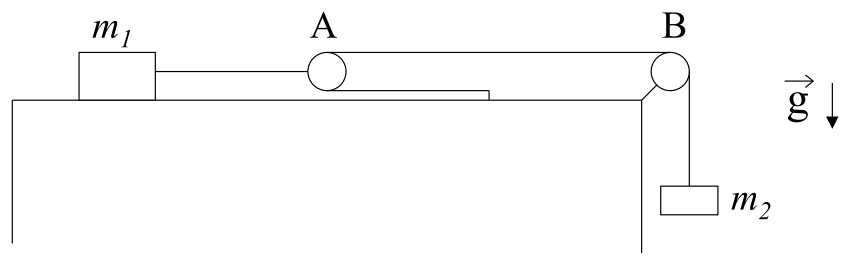
4 - El sistema de la figura está inicialmente en reposo, las poleas y los hilos tienen masas despreciables y los hilos son inextensibles.



a) Escriba las ecuaciones de Newton para las masas y la condición de vínculo que relaciona sus posiciones.

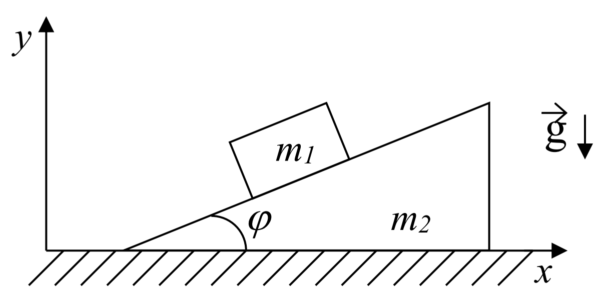
b) Halle la aceleración de cada cuerpo y las tensiones en los hilos en función de las masas y de *g*.

5 - Como se muestra en la figura, un cuerpo de masa m_1 está ubicado sobre una mesa plana sin fricción. Considere que las sogas son inextensibles, y que sogas y poleas tienen masas despreciables. El sistema está inicialmente en reposo y la polea A es móvil.



a) Escriba las ecuaciones de Newton para ambas masas y la condición de vínculo que relaciona sus posiciones.
b) Cuando el sistema comienza a moverse, diga cuál es la relación que debe existir entre las distancias d_1 y d_2 recorridas por m_1 y m_2 (condición de vínculo).
c) Encuentre la aceleración de cada masa y las tensiones en los hilos en función de m_1, m_2 y g.

6 - Un bloque de masa m_1 está colocado sobre un plano inclinado de masa m_2 como muestra la figura. El plano inclinado descansa sobre una superficie horizontal. Ambas superficies son sin fricción y ambas, el bloque y el plano, pueden moverse (ver figura).



i) Si el plano inclinado está fijo, halle las componentes x e y de la aceleración del bloque.
ii) Si el plano inclinado es libre de moverse:
a) Muestre que la componente x de la aceleración del bloque es:

$$a_{1x} = -m_2 g tan\,\varphi\,/(m_2 \sec^2\varphi + m_1 \tan^2\varphi).$$

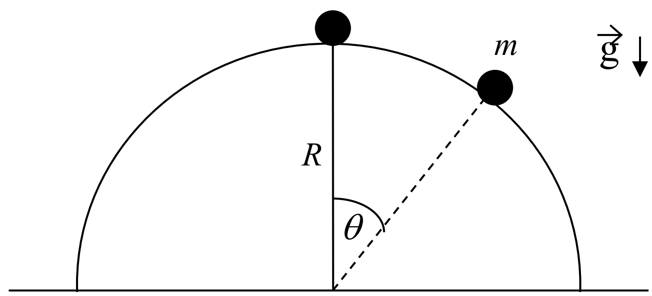
b) Muestre que la componente x de la aceleración del plano inclinado (y su única componente) es:

$$a_{2x} = m_1 g \tan\varphi\,/(m_2 \sec^2\varphi + m_1 \tan^2\varphi).$$

c) Muestre que a_{1y} es:

$$a_{1y} = -(m_1 + m_2) g \tan^2\varphi\,/(m_2 \sec^2\varphi + m_1 \tan^2\varphi).$$

7 - Una masa se desliza sobre una semiesfera de radio R sin fricción.

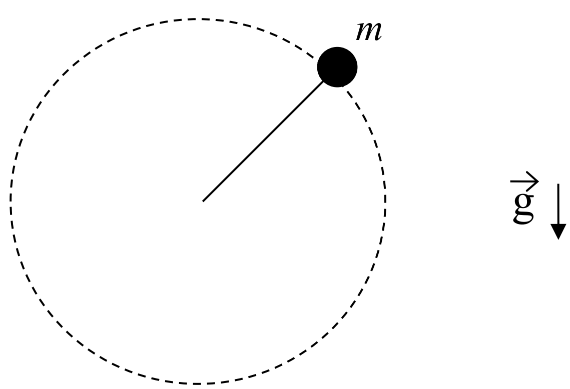


a) Calcular el ángulo θ para el cual se separa de la superficie esférica si inicialmente la masa m es apartada, en un ángulo muy pequeño, de $\theta = 0$ y su velocidad inicial es cero.

b) Si la masa m se engarza en un riel semicircular sin fricción de radio R, hallar la velocidad con que llega al suelo. ¿Qué aceleración tangencial tiene m en ese instante?

*c) Si la bolita está engarzada en el riel, estime numéricamente el tiempo que tarda en llegar al suelo si R = 1cm, 10 cm, 50 cm, 100 cm. Confeccione un gráfico del tiempo de llegada en función de g/R (si lo necesita, calcule el tiempo para otros valores de R).

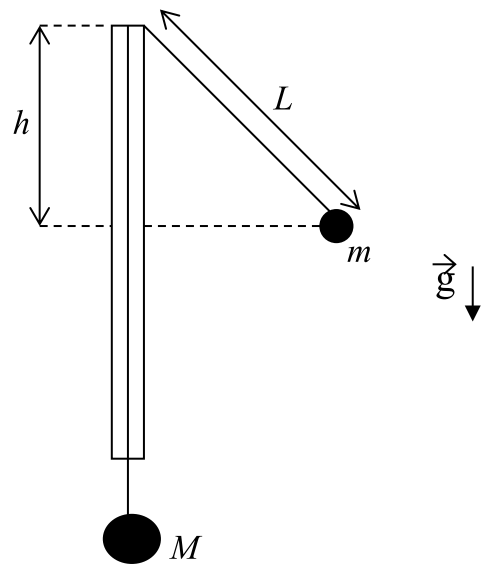
8 - Considere una partícula de masa m sujeta a una varilla rígida que le comunica un movimiento circular uniforme con velocidad angular de módulo ω en un plano vertical.



a) Escriba la ecuación de Newton para la partícula y las condiciones de vínculo a las que está sujeto el movimiento.

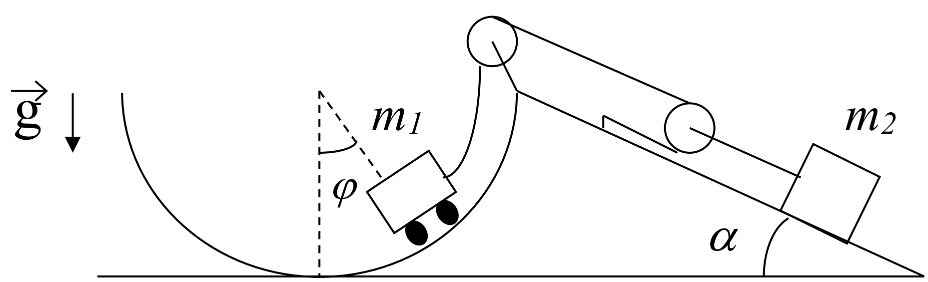
b) Calcule la fuerza ejercida por la barra en función del ángulo φ.

9 - Un hilo inextensible pasa a través de un tubo delgado de vidrio y dos cuerpos de masas M y m ($M > m$) penden de los extremos del hilo como se indica en la figura. El cuerpo de masa m realiza una trayectoria circular alrededor del tubo, en un plano horizontal, de tal forma que M permanece en reposo. El período del movimiento es T.



a) Diga cuál es el ángulo entre el hilo y el tubo en función de m y M.
b) Exprese el valor de L en función de T, m, M y g.
c) Exprese T en función de g y h.

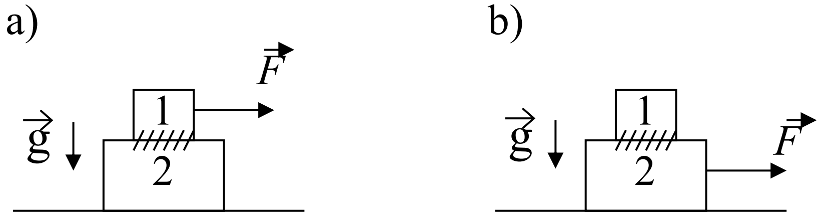
10 - Un juego de un parque de diversiones consiste en un carro de masa m_1 que se desplaza sobre un riel semicircular de radio R carente de rozamiento. El carro es arrastrado mediante una soga que se desliza a lo largo del riel que está enganchada a un sistema de poleas del cual cuelga un contrapeso de masa m_2. Este contrapeso se mueve sobre un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. Considere que las sogas son inextensibles, y que las sogas y las poleas tienen masas despreciables.



a) Escriba las ecuaciones de Newton y de vínculo para ambas masas.
b) Diga para qué valor de φ el carro podrá permanecer en reposo.
c) Encuentre la velocidad del carro como función de φ.
*d) Resuelva numéricamente la ecuación de movimiento y encuentre el tiempo que tarda el carrito en subir hasta $\varphi = \pi/2$, suponiendo que sen $\alpha = 1/2$, $m_1 = m_2$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$.

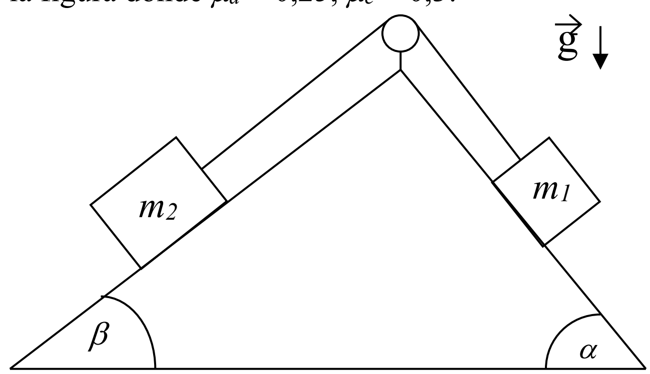
INTERACCIÓN DE ROZAMIENTO

1 - Un cuerpo de masa m_1 se apoya sobre otro de masa m_2 como indica la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre ambos es μ_e. No hay rozamiento entre la mesa y el cuerpo 2.



a) ¿Cuál es la fuerza máxima aplicada sobre el cuerpo 1 que acelera a ambos cuerpos, sin que deslice uno respecto del otro?
b) ¿Cuál es la aceleración del sistema?
c) Repita los puntos a) y b) si se aplica la fuerza sobre el cuerpo 2.
d) Se aplica ahora sobre la masa 2 una fuerza el doble de la calculada en c). ¿Cuál es la aceleración de m_1 y m_2 si el coeficiente de rozamiento dinámico es μ_d?
e) Si la dimensión del cuerpo 2 es L y la del cuerpo 1 es $l << L$, ¿cuánto tardará en caerse si inicialmente estaba apoyada m_1 en el centro de m_2?

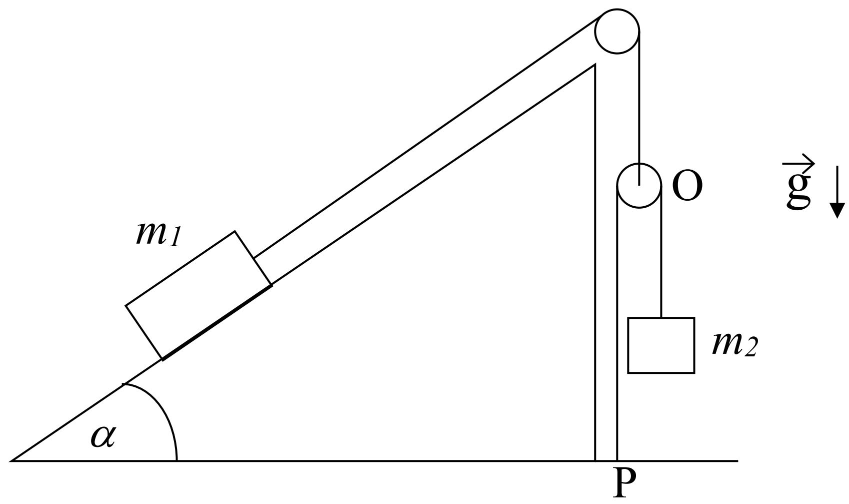
2 - Sea el sistema de la figura donde μ_d = 0,25, μ_e = 0,3:



a) Inicialmente se traba el sistema de modo que esté en reposo. Cuando se lo destraba, diga qué relaciones se deben cumplir entre las masas y los ángulos para que queden en reposo.
b) Si m_1 = 1 kg, m_2 = 2 kg, α = 60º y β = 30º, ¿se pondrá en movimiento el sistema?
c) Suponga ahora que inicialmente se le da al sistema cierta velocidad inicial y que los datos son los dados en (b). Encuentre la aceleración y describa cómo será el movimiento del sistema teniendo en cuenta los dos sentidos posibles de dicha velocidad.

3 - Considere dos partículas de masas m_1 y m_2 y dos poleas de masa despreciable dispuestas como en la figura. La partícula m_1 está sobre un plano (fijo al piso) inclinado un ángulo α siendo respectivamente μ_e y μ_d los coeficientes de rozamiento estático y dinámico entre la

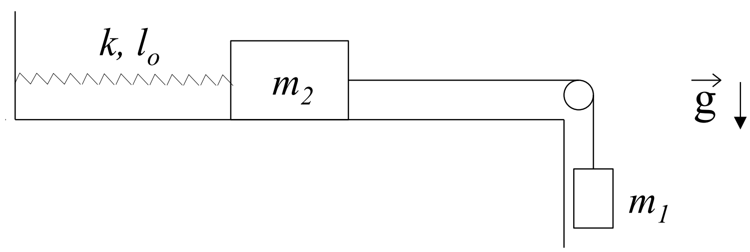
partícula m_1 y el plano. Los hilos (1) y (2) son inextensibles y de masa despreciable y el hilo (2) está atado al piso en el punto P.



a) Dibuje m_1, m_2 y las poleas por separado e indique las fuerzas que actúan sobre cada uno. Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo.
b) Halle la aceleración de m_1 en función de la aceleración de m_2. ¿Influye en su resultado el hecho que los hilos sean inextensibles?
c) Si el sistema se halla en reposo encuentre dentro de qué rango de valores debe estar m_2.
d) Si m_2 desciende con aceleración constante A:
   i) Calcule m_2. Diga justificando su respuesta si la aceleración A puede ser tal que $A>g$.
   ii) Exprese la posición de la polea O en función del tiempo y de datos si en el instante inicial estaba a distancia h del piso con velocidad nula. ¿La polea se acerca o se aleja del piso?

MOVIMIENTO OSCILATORIO

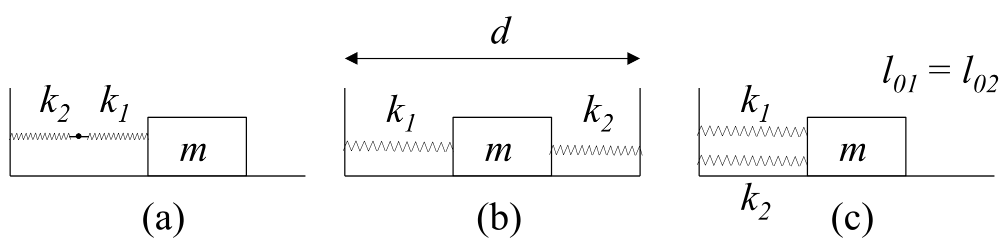
1 - El sistema de la figura, compuesto por dos cuerpos de masas m_1 y m_2 y un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0, se encuentra inicialmente en equilibrio. Se lo pone en movimiento imprimiendo a la masa m_1 una velocidad v_0 hacia abajo (no hay rozamiento).



a) Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo para m_1 y para m_2.

b) Diga cómo varía la posición de m_2 con el tiempo.

2 - Sean dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2, y un cuerpo de masa m, que desliza sin rozamiento, conectados como en las figuras a), b) y c).



i) Demostrar que la frecuencia de oscilación de m vale, en el caso a)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$$

y en los casos b) y c):

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

ii) Encuentre las posiciones de equilibrio sabiendo que los resortes tienen longitudes naturales l_{01} y l_{02}.

3 - Un cuerpo suspendido de un hilo inextensible de longitud 80 cm realiza un movimiento oscilatorio en un plano siendo $\theta = \theta(t)$ el ángulo entre la vertical y el hilo.

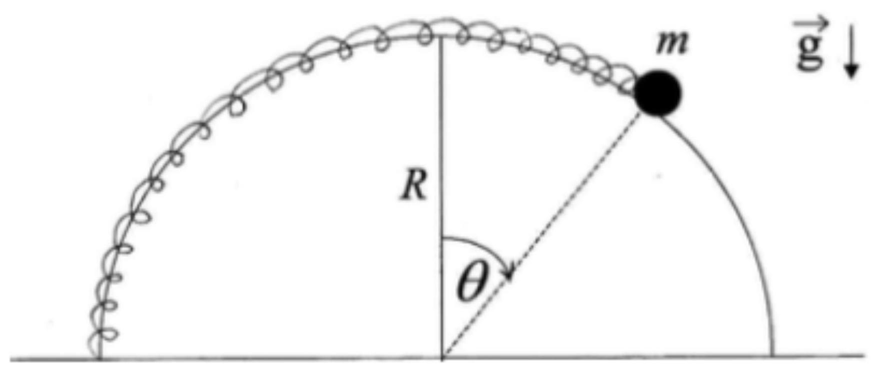
a) Plantee las ecuaciones de Newton para el cuerpo.

b) ¿Bajo qué aproximación el movimiento es armónico? ¿qué período tiene?

c) Si en $t = 0$ es $\theta = 0$, $\dot{\theta} = 0{,}2\ seg^{-1}$ ¿se satisface la aproximación de b) $\forall\ t$?

d) Usando las ecuaciones planteadas en a) halle la posición de equilibrio y diga si es estable o inestable y por qué.

4 - Una bolita de masa m está enhebrada en un aro semicircular de radio R y sujeta a un resorte de constante elástica k y longitud natural $l_0 = \pi R/2$, como muestra la figura:

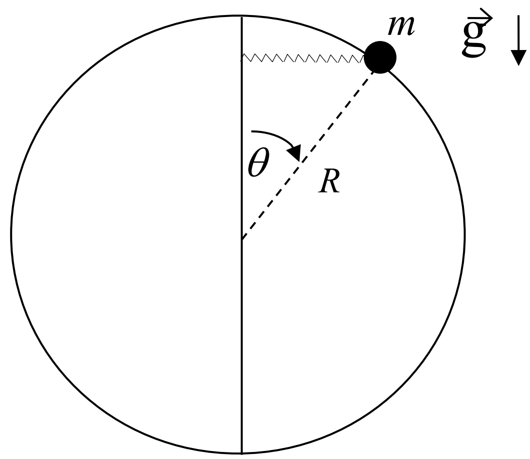


a) Halle la ecuación de movimiento.

b) Encuentre posiciones de equilibrio.

c) Diga cuándo el equilibrio es estable.

5 - Una masa m está enhebrada en un aro circular sin fricción de radio R y unida al extremo de un resorte de constante k y longitud natural nula (se considera despreciable frente al radio del aro). El otro extremo del resorte corre libremente a lo largo de un eje vertical, de modo tal que el resorte permanece siempre en posición horizontal (ver figura).



a) Halle las ecuaciones de Newton para *m*.

b) Si inicialmente la masa se encuentra en $\theta = \pi/2$ con velocidad nula, halle la expresión de la fuerza de vínculo con el aro en función del ángulo θ.

c) Encuentre las posiciones de equilibrio y analice si son estables o inestables.

6 - Una partícula de masa m está unida al extremo de un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0. El otro extremo del resorte está unido a una pared que se mueve de acuerdo a la ley $x_p(t) = L\cos(\omega t)$. La partícula también está sometida a la acción de una fuerza viscosa tal que $\vec{F}_v = -r\dot{x}\hat{x}$.

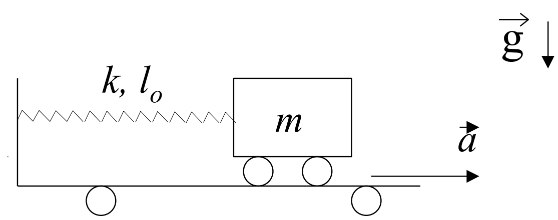
a) Escriba la ecuación de Newton para la partícula. Indique claramente cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella.

b) Para el caso $\frac{k}{m} > \left(\frac{r}{2m}\right)^2$, diga cuál es la solución de la ecuación de movimiento *x(t)*. Para tiempos largos ($\beta t >> 1$, con $\beta = \frac{r}{2m}$), diga en qué dirección se mueve la partícula cuando la pared se mueve hacia la derecha, si $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

SISTEMAS NO INERCIALES

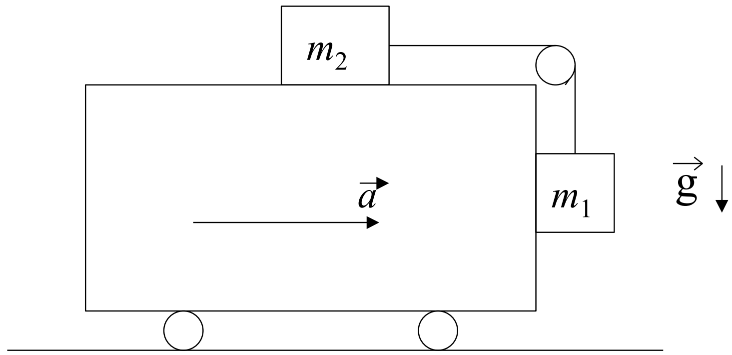
1 - Dos masas, m_1 y m_2, penden de los extremos de un hilo inextensible que pasa a través de una polea ideal fija al techo de un ascensor. Halle la aceleración de las masas para un observador que se halla dentro del ascensor y para otro que se halla quieto afuera del ascensor si:
a) El ascensor sube con velocidad constante.
b) El ascensor sube con aceleración a.
c) El ascensor baja con aceleración a.
d) Se corta el cable del ascensor.

2 - Una masa *m*, en reposo sobre una plataforma horizontal exenta de rozamiento, está sujeta al extremo de un resorte de la manera indicada en la figura. La constante elástica del resorte es *k*. Súbitamente se pone en movimiento la plataforma con una aceleración constante *a*, en la dirección horizontal.

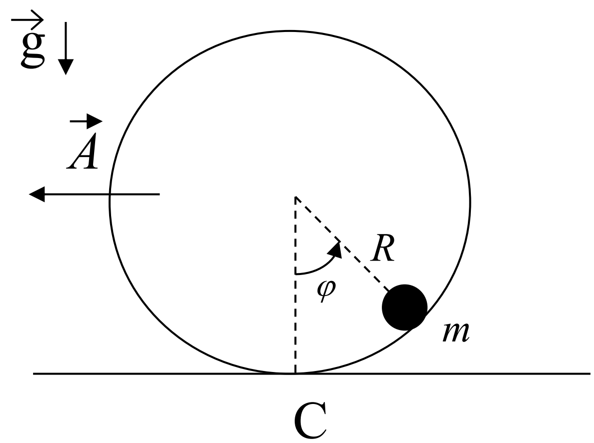


a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre la masa en un sistema de referencia unido a la plataforma y luego en otro, exterior a ella, en reposo.
b) Describa el movimiento de *m* respecto de la plataforma.
c) Si la plataforma tiene masa *M*, determinar la fuerza necesaria para mantener constante su aceleración.

3 - Sea el sistema de la figura. Los coeficientes de rozamiento estático en las superficies horizontal y vertical son μ_{e2} y μ_{e1}. ¿Para qué valores de la aceleración *a*, m_1 no sube ni baja?

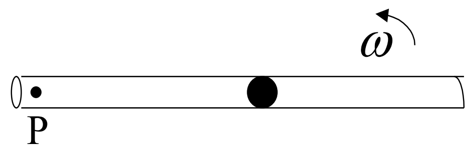


4 - Una partícula de masa *m* se halla engarzada en un riel circular de radio *R*, que carece de rozamiento. En un dado instante la partícula se encuentra en reposo en el punto *C*, y se aplica sobre el riel una fuerza tal que a partir de ese instante el mismo se mueve con aceleración constante $\vec{A}$. Utilice para resolver el problema un sistema no inercial fijo a la esfera.



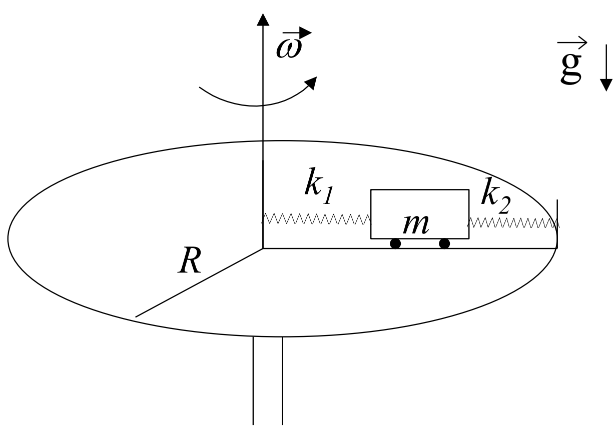
a) Haga un diagrama de las fuerzas que actúan sobre *m*, y determine cuáles son sus pares de interacción. Plantee las ecuaciones de Newton, y encuentre la ecuación de movimiento de la partícula.
b) Exprese el valor de la normal ejercida por el riel sobre *m* como función del ángulo φ.
c) Encuentre la posición de equilibrio, y determine si el equilibrio es estable o inestable.

5 - Una bolita de masa *m* se encuentra dentro de un tubo que gira con velocidad angular *w* constante alrededor de *P*.

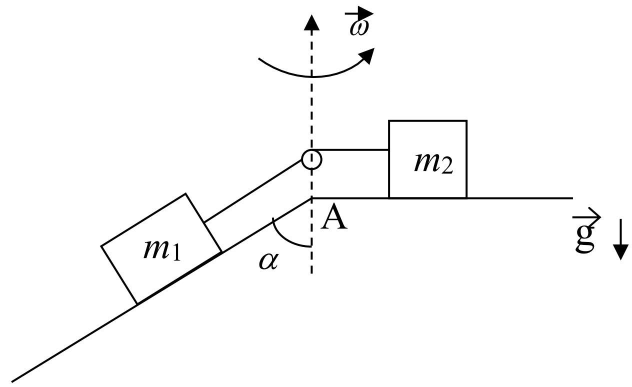


a) Calcule la aceleración de la bolita respecto de un sistema inercial y respecto de un sistema fijo al tubo.
b) Determine las fuerzas inerciales que actúan sobre la bolita en el sistema fijo al tubo y escriba las ecuaciones dinámicas.

6 - Sobre una vía recta montada sobre una mesa horizontal que puede girar alrededor de un eje vertical se mueve un carrito de masa m. Este está sujeto entre dos resortes que, a su vez, están unidos a la vía como en la figura y tienen constantes elásticas k_1 y k_2 y longitudes naturales l_{01} y l_{02}, respectivamente. Escriba las ecuaciones dinámicas para el sistema (carrito + resortes) en un sistema de referencia fijo a la mesa.

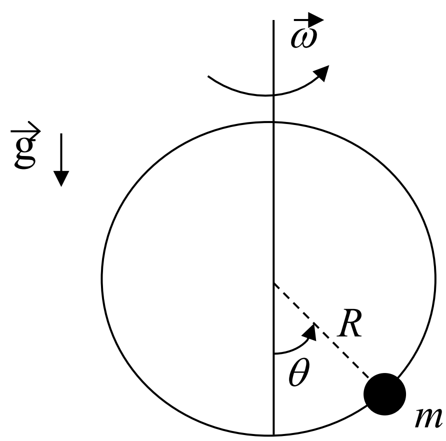


7 - Dos masas m_1 y m_2 están unidas por una soga inextensible de longitud L y de masa despreciable (ver figura). Los dos cuerpos están sobre un riel que gira con velocidad angular ω constante y el riel no permite que los cuerpos se muevan hacia los costados. En el instante $t = 0$, la masa m_1 se encuentra en la posición A con velocidad nula con respecto al riel.



a) En un sistema no inercial solidario al riel, indique cuáles son las fuerzas y pseudofuerzas que actúan sobre cada masa. Identifique los pares de acción y reacción.
b) Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo en un sistema no inercial solidario al riel.
c) Resuelva las ecuaciones de movimiento y describa cómo será el movimiento de las partículas.

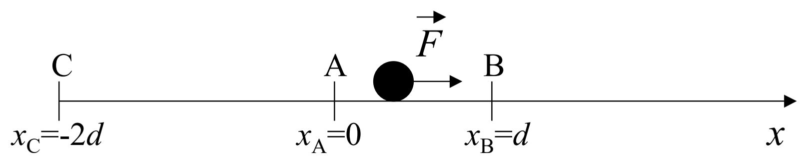
8 - Una bolita de masa m se encuentra engarzada en un alambre circular de radio R, ubicado en posición vertical. El aro de alambre gira alrededor de su diámetro vertical con velocidad angular ω constante.



a) Escriba las ecuaciones de Newton utilizando un sistema de referencia fijo al aro, indicando las fuerzas de interacción que actúan sobre la bolita.
b) Calcule las posiciones de equilibrio y analice la estabilidad de las mismas.
c) Considere que inicialmente se suelta la masa m desde un ángulo θ_0, encuentre la fuerza de vínculo ejercida por el alambre en función de la posición de la bolita.

TRABAJO Y ENERGÍA

1 - Una partícula de masa m se desplaza horizontalmente desde la posición $x_A = 0$ hasta la posición $x_B = d$, y luego desde x_B hasta la posición $x_C = -2d$ con $d > 0$ (ver figura), bajo la acción de una fuerza F. Para los siguientes valores de F:
(i) $F = -kx$, (ii) $F = kx^2$, (iii) $F = -k\,|x|\,x$, ($k > 0$), calcule:



a) el trabajo realizado por la fuerza F entre A y B, entre B y C y entre A y C.
b) en el caso en que esto sea posible, la energía potencial asociada a la fuerza F. Grafíquela.

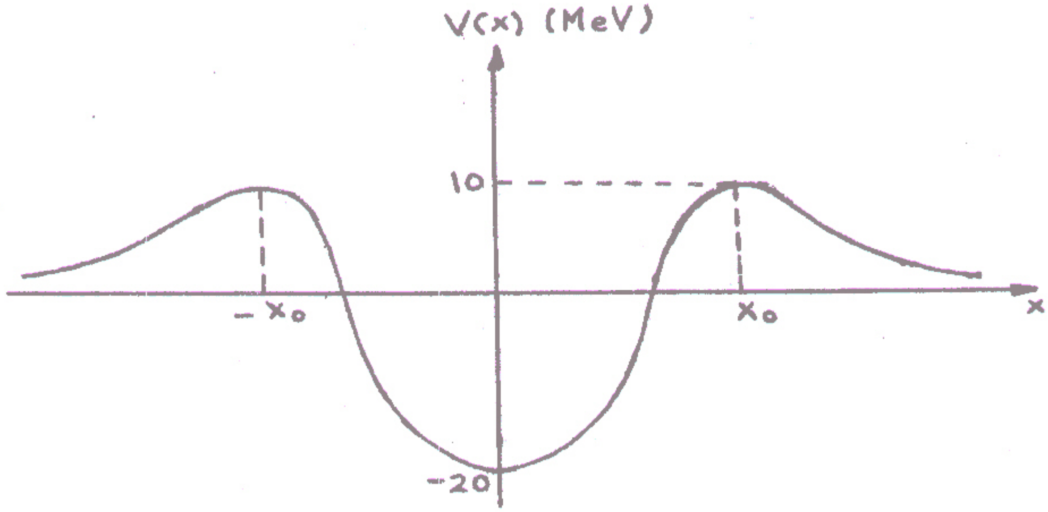
2- Sea un péndulo simple, constituido por un cuerpo de masa m suspendido del extremo de una varilla sin masa de longitud l, que oscila en un plano.
a) Grafique la energía potencial del cuerpo, V, en función de θ, siendo θ el ángulo que forma el hilo con la vertical. Indique los valores máximos y mínimos del potencial.
b) Si E es la energía mecánica total, para los casos:

$E_1 < V_{MAX}$
$E_2 = V_{MAX}$
$E_3 > V_{MAX}$

i) estudie cualitativamente el movimiento del cuerpo y diga cómo haría en la práctica para conseguir estos valores de E.
ii) a partir del gráfico V vs. θ obtenga el gráfico de velocidad en función de θ.

*c) Considere el movimiento del péndulo para amplitudes grandes. Elija algún valor de l y obtenga gráficos para $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ y $\dot{\theta}(\theta)$. Estudie la dependencia entre la frecuencia del movimiento y su amplitud.

3 - El potencial nuclear para un protón es de la forma de la figura (1 MeV = 10^6 eV, 1 eV = 1,6 10^{-12} erg).



a) Analizar qué le pasa a un protón que incide desde $x = \infty$ sobre el núcleo y a uno que está en la zona $- x_0 < x < x_0$.
b) ¿ Qué significan valores negativos de energía potencial ?.
c) Sea un protón que está en el interior del núcleo con energía total nula. ¿ Cuál es la máxima velocidad que puede tener el protón ? (m_p = 1,67 10^{-24} g). ¿ Qué energía mínima se le debe entregar para que pueda escapar del núcleo ?. ¿ Qué velocidad tendrá entonces una vez alejado totalmente del núcleo ?.

4 - Considere una partícula de masa m que se mueve en una dimensión bajo la acción de una fuerza $\vec{F} = (-ax^3 + bx)\hat{x}$.

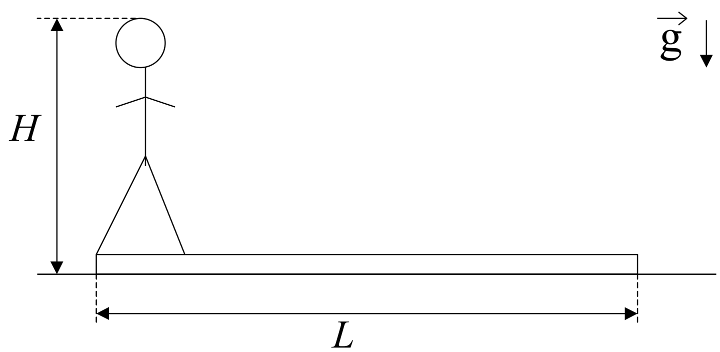
a) Grafique el potencial y analice los posibles movimientos de la partícula para los diferentes valores de su energía total.
b) Encuentre las posiciones de equilibrio y determine si son estables o inestables.

*c) Elija valores para m, a y b y obtenga gráficos para $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ variando las condiciones iniciales (obtenga también gráficos de $\dot{x}$ en función de x). Analice los movimientos posibles para alguna de las siguientes situaciones: (1) $a > 0$, $b > 0$, (2) $a > 0$, $b < 0$.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

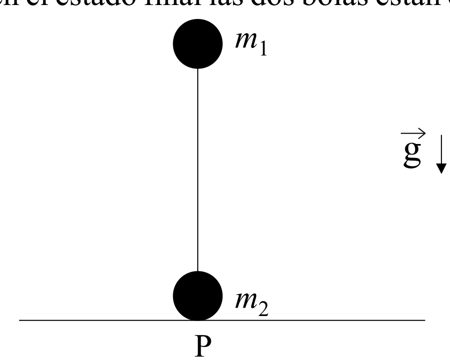
1 - Hallar la posición del centro de masa del sistema Tierra-Luna para un instante dado. La masa de la Tierra es unas 82 veces la de la Luna y la distancia entre los centros de la Tierra y de la Luna es de unos 60 radios terrestres. Expresar la respuesta en función de los radios terrestres.

2 - Según puede verse en la figura un hombre de masa M y altura H está de pie en un extremo de un tablón homogéneo de longitud L y masa m apoyado sobre una superficie sin rozamiento. Inicialmente el hombre y el tablón están en reposo y luego el hombre camina hacia el otro extremo del tablón.



a) Si el hombre se supone homogéneo, hallar la ubicación del centro de masa del sistema.
b) Hallar la velocidad del centro de masa para todo instante.
c) ¿Qué distancia habrá recorrido el hombre respecto a la superficie cuando llega al otro extremo del tablón?

3 - Dos bolas de masas m_1 y m_2 están unidas por una barra de masa despreciable y longitud L. Inicialmente el sistema se halla en equilibrio inestable, estando la barra en posición vertical y m_2 en contacto con una superficie horizontal, libre de rozamiento (ver figura). Se aparta el sistema de la posición de equilibrio inclinando levemente la barra. El sistema evoluciona de modo que en el estado final las dos bolas están en contacto con la superficie.



Estado inicial

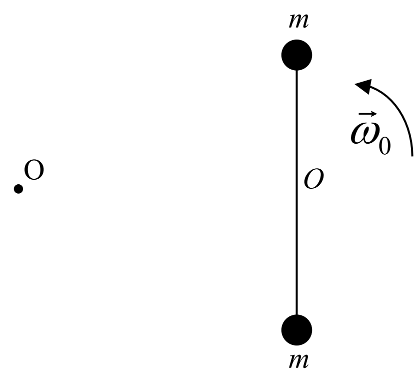
a) Hallar la posición del centro de masa en el estado inicial.
b) Hallar la componente horizontal de la velocidad del centro de masa.
c) ¿A qué distancia de P quedará cada bola en el estado final?

4 - Un bloque de masa m = 40 kg es lanzado con velocidad inicial v_0 = 100 m/s en una dirección que forma un ángulo de 30º con la horizontal. En el punto más alto de la trayectoria se divide en dos partes iguales. Una de ellas cae verticalmente, comenzando con una velocidad de 10 m/s hacia abajo.

Calcule las distancias entre el punto de lanzamiento y cada uno de los puntos de impacto de los fragmentos con la superficie. Considere g = 10 m/s^2.

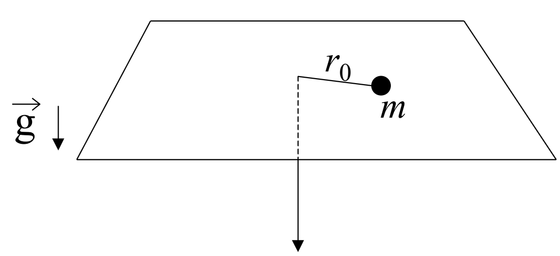
MOMENTO ANGULAR

1 - Considere el sistema formado por una barra de longitud L y masa despreciable, en cuyos extremos se hallan fijas sendas masas, de valor m y M, tal como muestra la figura. El sistema se halla apoyado sobre una superficie horizontal libre de rozamiento, y es libre de girar alrededor de un eje fijo O. El sistema se pone en movimiento dándole a $t=0$ una velocidad angular ω_0 a la barra.



a) Indique qué fuerzas actúan sobre cada una de las partículas y diga si se conserva la cantidad de movimiento y el impulso angular del sistema con respecto a O.
b) Calcule el impulso angular con respecto a O y determine como varía la velocidad angular de las barras con el tiempo.
c) Calcule la posición y velocidad del centro de masa del sistema como función del tiempo.
d) Calcule el impulso angular con respecto al punto O', situado a una distancia D del punto O.

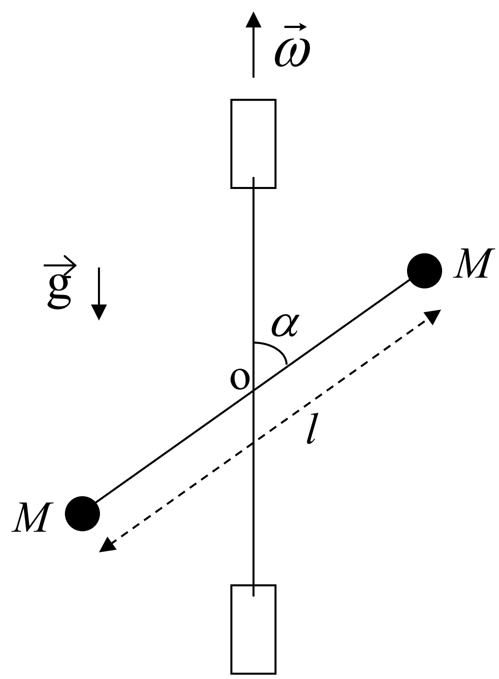
2 - Una partícula de masa m está atada al extremo de un hilo y se mueve en una trayectoria circular de radio r_0 sobre una superficie horizontal plana sin fricción. El hilo pasa por un agujero en la superficie e inicialmente su otro extremo se mantiene fijo. Si se tira lentamente del hilo, de forma que el radio disminuye, halle como varía la velocidad angular w, en función de r, sabiendo que para $r = r_0$ la velocidad angular era w_0.



3 - Dos patinadores sobre hielo, de masa m = 50 kg cada uno, se acercan mutuamente en trayectorias paralelas distantes 3 m entre sí. Ambos patinan (sin fricción) a 10 m/s. El primer patinador sostiene una varilla sin masa, de 3 m de largo, de la que se toma el segundo.

a) Describir cuantitativamente el movimiento de los dos a partir de ese momento.
b) Suponer ahora que uno de ellos tira de la varilla, acortando la distancia a 1 m. Describir el movimiento posterior.
c) ¿Cómo y con qué velocidad se moverán los patinadores si repentinamente uno de ellos suelta la varilla? Resolver para los casos (a) y (b).

4 - En el sistema de la figura, dos barras rígidas de masa despreciable están soldadas en el punto O y forman un ángulo α. Una de las barras tiene longitud *l*, su punto medio es O y en sus extremos se fijan dos pequeñas esferas de masa *M*. La otra barra está sostenida mediante dos bujes y es el eje de rotación del conjunto que gira con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante.



a) Exprese el vector impulso angular del sistema en función del tiempo, respecto de O.
b) Calcule el momento de las fuerzas efectuando la derivada temporal del impulso angular.
c) Indique en un esquema los resultados obtenidos en (a) y en (b) para un instante determinado (preste especial atención a la dirección y sentido de los vectores).
d) Identifique cuáles son las fuerzas que producen el momento hallado en (b).
e) ¿Influye en los resultados obtenidos la existencia o no de la gravedad, o su dirección?

TEOREMAS DE CONSERVACIÓN

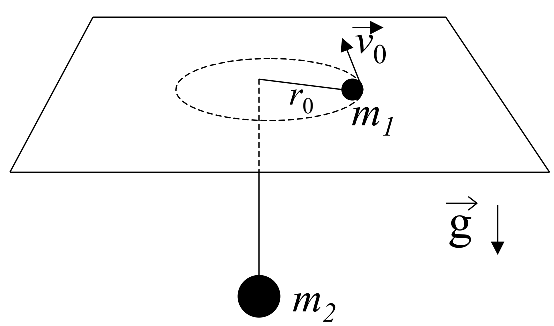
1 - Dos cuerpos de masas m_1 y m_2 y velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, que se mueven sobre una misma recta, chocan elásticamente. Luego del choque, ambos cuerpos continúan moviéndose sobre la misma recta.

a) Halle sus velocidades después del choque.
b) Calcule la variación de energía cinética de cada uno.
c) Resuelva (a) y (b) para el caso $|\vec{v}_2| = 0$.
d) Especialice los resultados obtenidos en (c) para los casos $m_1 = m_2$, $m_1 >> m_2$ y $m_1 << m_2$.

2 - Una masa m_1 se halla atada al extremo de una cuerda inextensible de longitud L y masa despreciable. Cuando la cuerda forma un ángulo α con la vertical se suelta la masa m_1 con velocidad nula. Al pasar por el punto más bajo de la trayectoria la masa m_1 choca elásticamente con una masa m_2 que cuelga de una cuerda igual a la anterior y que se halla inicialmente en reposo.

a) Calcular la velocidad de ambas masas un instante después del choque.
b) Calcular la altura máxima alcanzada por ambas masas después del choque.
c) Discutir los resultados anteriores para los casos: $m_1 >> m_2$, $m_1 = m_2$ y $m_1 << m_2$.

3 - El sistema de la figura consiste de dos masas (m_1 y m_2) unidas por un hilo inextensible que pasa por un orificio practicado en una mesa horizontal sin rozamiento. En cierto instante, la masa m_2 está en reposo y la masa m_1 se mueve con velocidad $\vec{v}_0$ a una distancia r_0 del orificio. La masa m_2 puede, o no, continuar en reposo dependiendo de cierta relación matemática entre m_1, m_2, $|\vec{v}_0|$, r_0 y g.

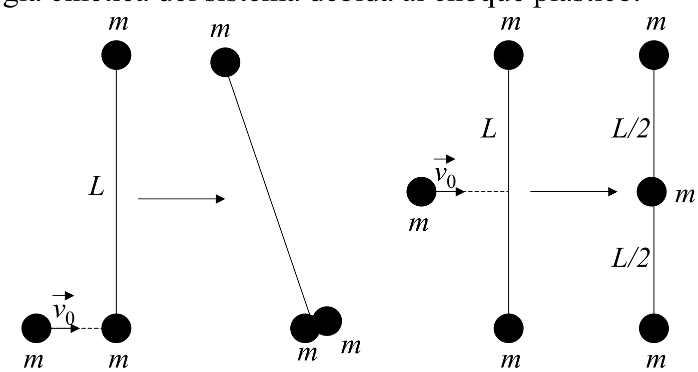


a) Determinar esa relación usando las ecuaciones de Newton.
b) Independientemente de que m_2 se mueva o no, diga qué magnitudes se conservan. Justifique su respuesta.
c) Calcular las velocidades $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de ambas partículas y el ángulo que forma $\vec{v}_1$ con el hilo, en el instante en que m_2 ha bajado una distancia d.
d) Grafique el potencial efectivo en función de la distancia de m_1 al orificio. Exprese en función de la energía la condición para que m_2 permanezca en reposo y compare con el resultado obtenido en a).
e) A partir del potencial efectivo, considere pequeñas oscilaciones alrededor del punto de

equilibrio. Halle la frecuencia angular de esas oscilaciones. Compare la frecuencia angular con la velocidad angular de m_1. Describa cualitativamente la forma de la órbita de m_1 alrededor del orificio a partir de esta relación.

*f) Resuelva numéricamente el problema. Obtenga gráficos de *z(t)* y de las trayectorias de la partícula sobre la mesa.

4 - Dos partículas de masa m están sujetas a los extremos de una barra de longitud L y masa despreciable en reposo sobre una superficie horizontal exenta de rozamiento.
Otra partícula, también de masa m, se mueve a lo largo de una recta perpendicular a la barra con velocidad $\vec{v}_0$ y choca quedándose adherida según se indica en las figuras. Describa cuantitativamente el movimiento después del choque, en particular, calcule la variación de energía cinética del sistema debida al choque plástico.



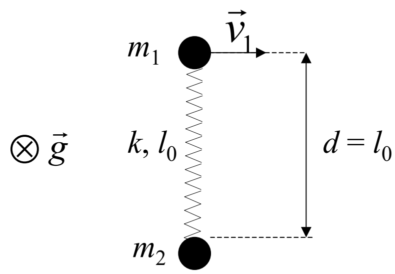
Caso (a) Caso (b)

5 – En la figura se muestra un sistema compuesto por un resorte de constante elástica k, longitud libre l_0 y masa despreciable y dos partículas de masas m_1 y m_2. El sistema está apoyado sobre una mesa libre de rozamiento. Inicialmente el sistema está en reposo y la distancia d entre las partículas es tal que $d = l_0$. En cierto instante t_0 se le imprime a m_1 una velocidad $\vec{v}_1$ como la de la figura y simultáneamente se le imprime a m_2 una velocidad $\vec{v}_2$ tal que el centro de masa del sistema tiene velocidad nula en ese instante.

a) Halle el vector velocidad $\vec{v}_2$ y la distancia que hay inicialmente (antes de t_0) entre m_2 y el centro de masa del sistema.
b) Diga justificando su respuesta si para todo instante posterior a t_0 se conserva o no, para este sistema, el impulso lineal $\vec{p}$, el impulso angular respecto del centro de masa $\vec{L}_{cm}$ y la energía mecánica total H.
c) Calcular $\vec{p}$, $\vec{L}_{cm}$ y H en el instante t_0 en función de datos.
d) Dibuje el sistema en un instante arbitrario t, posterior a t_0 y diga cuánto vale la velocidad del centro de masa en ese instante. Si en t, $\vec{v}_1'$ y $\vec{v}_2'$ son las velocidades de m_1 y m_2 respectivamente, escriba $\vec{v}_2'$ en función de $\vec{v}_1'$ y de datos. Si r_1' y r_2' son las distancias desde el centro de masa hasta m_1 y m_2 respectivamente en el tiempo t, escriba r_2' en función de r_1' y de datos.

e) Dé una expresión para $\vec{L}_{cm}$ en el tiempo t. Halle la velocidad angular del sistema, ω, en función de datos y de r_1'.

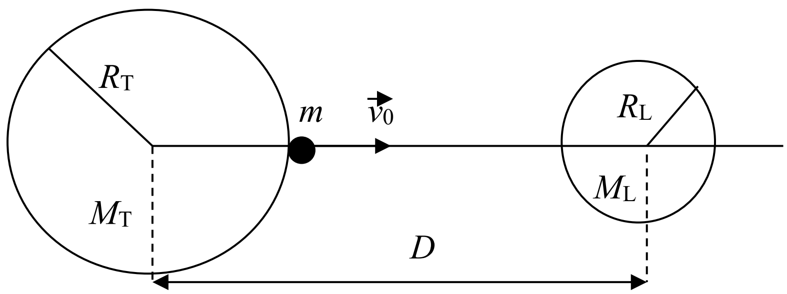
f) Escriba una expresión para H en el tiempo t en función de datos y de r_1' y $\dot{r}_1'$. ¿Qué ecuación diferencial se obtiene para r_1'?



GRAVITACIÓN

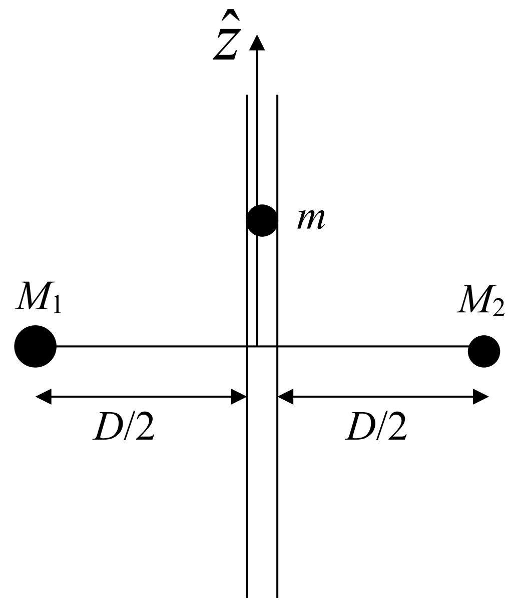
1 - Considere dos planetas fijos de masas M_1 y M_2 y radios R_1 y R_2, separados por una distancia D. Una masa m se mueve bajo la atracción gravitatoria de los dos. Suponga que m sale de M_1 con una velocidad $\vec{v}_0$ hacia M_2:

a) Escriba la fuerza neta sobre m, en función de la posición.
b) Calcule y grafique el potencial.
c) Describa cualitativamente el movimiento de m, para distintos valores de su energía mecánica.
d) ¿En qué punto de su trayectoria m tiene aceleración nula?
e) Calcule la velocidad inicial mínima de m necesaria para llegar a este punto y caer en la Luna por la acción de la atracción gravitatoria lunar.



2 - Considere dos partículas de masas M_1 y M_2, fijas y separadas entre sí por una distancia D. Una tercera partícula de masa m es libre de moverse por un tubo carente de rozamiento, que se halla sobre la mediatriz del segmento determinado por ambas masas.

a) Calcule la energía potencial gravitatoria en función de la coordenada z que determina la posición. Grafique cualitativamente el potencial.
b) Determine la posición de equilibrio indicando si corresponde a un equilibrio estable o inestable.
c) Encuentre la frecuencia angular de oscilación para pequeños apartamientos de la masa m de su posición de equilibrio.
d) Calcule la fuerza que ejerce el tubo sobre la masa en función de la posición.

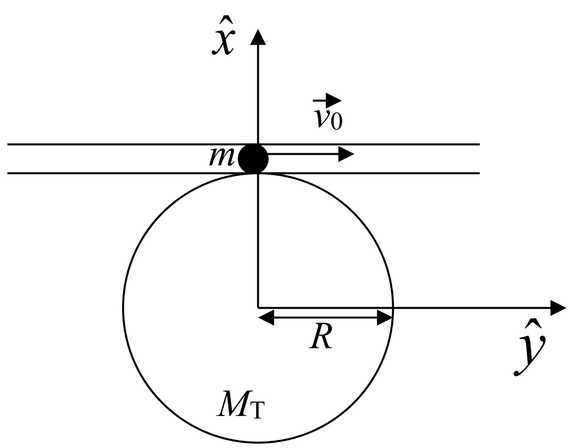


3 - Una partícula de masa m es dejada en el punto A de un túnel sin fricción imprimiéndole una velocidad $\vec{v}_0$ (ver figura). La partícula se halla bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra.

a) Grafique la energía potencial de la partícula en función de la coordenada y. Diga cuál es la máxima velocidad v_0 que puede tener la partícula en A para que su movimiento sea ligado.

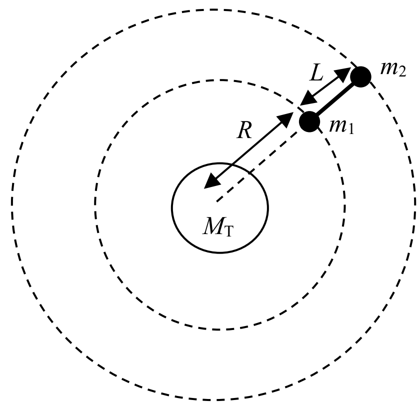
b) Encuentre la ecuación de movimiento para la partícula. Diga bajo qué condiciones el movimiento será armónico simple y escriba la ecuación de movimiento en ese caso.

c) Para el caso armónico simple, halle la frecuencia de oscilación y determine la posición de la partícula en función del tiempo.



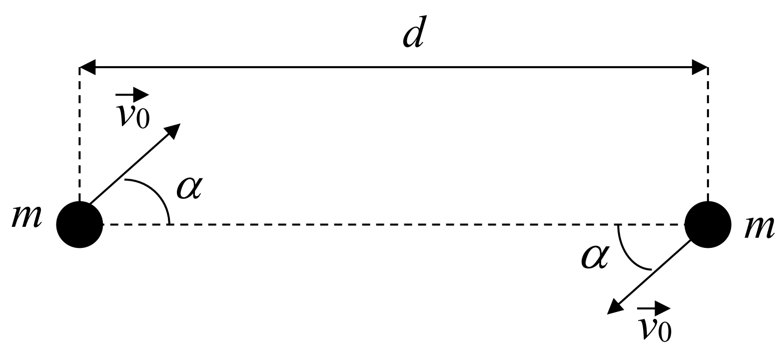
4 - Un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra, a una distancia R de su centro, está compuesto por dos masas m_1 y m_2, unidas entre sí por una barra de longitud L y masa despreciable. Durante todo el movimiento, la barra del satélite se halla orientada en la dirección radial, tal como se muestra en la figura. Considere que la Tierra permanece fija y desprecie la atracción gravitatoria entre las masas que forman el satélite.

a) Dibuje las fuerzas que actúan sobre cada una de las partículas. Plantee las ecuaciones de Newton y las condiciones de vínculo que rigen su movimiento.
b) Calcule la velocidad angular del movimiento de rotación del satélite y el valor de la tensión ejercida por la barra sobre cada una de las masas.
c) En un dado instante se corta la barra que une ambas partes del satélite. A partir de ese momento, utilizando las magnitudes que se conservan, determine cualitativamente la trayectoria de la masa m_1. Justifique su respuesta.



5 - Considere dos partículas de masa m que interactúan gravitatoriamente entre sí. Las partículas pueden moverse sobre una mesa horizontal libre de rozamiento. En el instante inicial (t = 0) las partículas se hallan separadas una distancia d y se les da a cada una de ellas una velocidad $\vec{v}_0$ de módulo v_0 y dirección indicada en la figura.

a) Indique en un diagrama todas las fuerzas que actúan sobre cada partícula. Para el sistema formado por las dos partículas diga, justificando su respuesta, si se conserva o no el impulso lineal, el impulso angular y la energía mecánica total.
b) Halle la velocidad del centro de masa del sistema en el instante inicial. Diga qué tipo de movimiento describe el centro de masa para $t > 0$.
c) Para cada una de las partículas, calcule el vector velocidad (componentes paralela y perpendicular al segmento que las une) cuando las partículas se hallan separadas una distancia $d/2$.

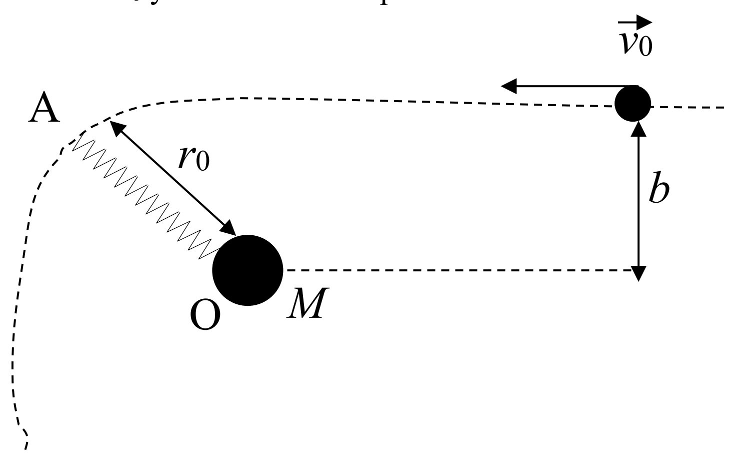


6 - Una partícula de masa m se acerca desde el infinito con velocidad y parámetro de impacto b a un cuerpo de masa M, que se halla fijo en el punto O. Debido a la atracción gravitatoria ejercida por M, la partícula describe una trayectoria hiperbólica, y al pasar por el punto de máximo acercamiento (punto A) se engancha con un resorte de masa despreciable, constante elástica k y longitud natural

$l_0 = r_0$. El otro extremo del resorte está sujeto a un eje que pasa por O. Considere que la energía potencial gravitatoria en el infinito es nula (es decir, $V_G = 0$ cuando la partícula se halla suficientemente alejada del cuerpo).

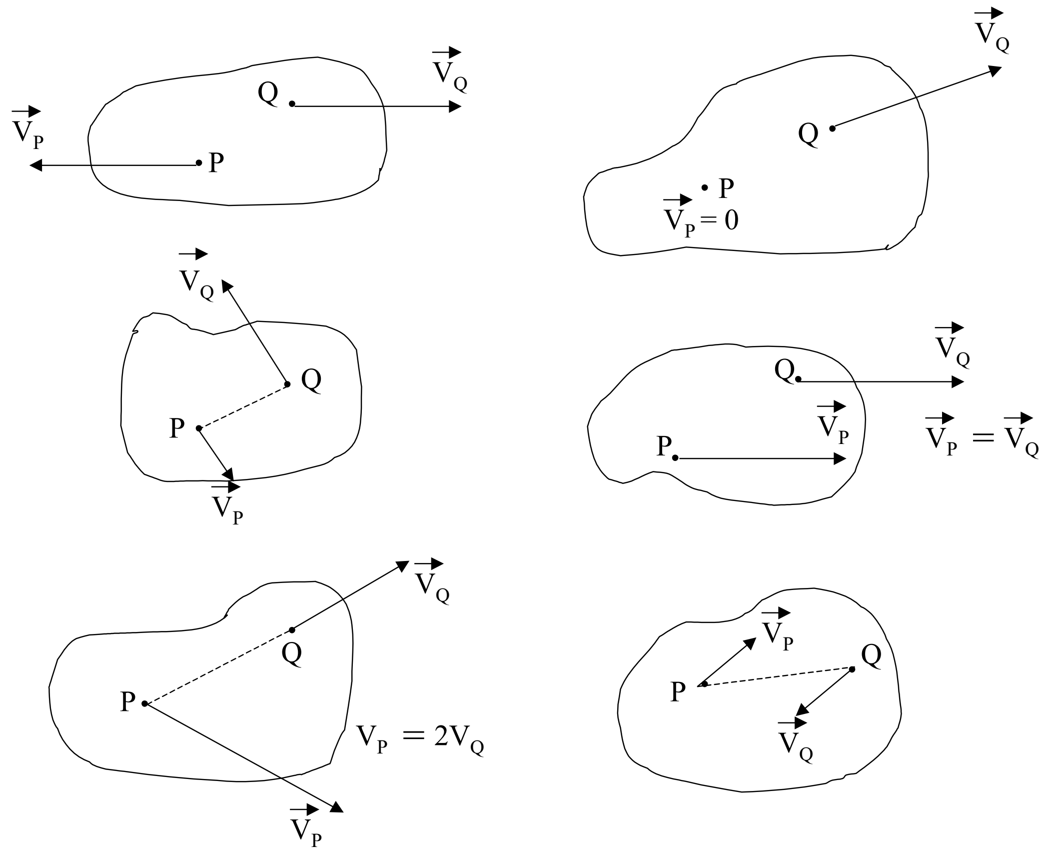
a) Diga qué magnitudes se conservan para la partícula de masa m antes y después de alcanzar el punto A. Calcule la velocidad de la partícula en el punto A y la distancia r_0 de máximo acercamiento.

b) Después de engancharse con el resorte, encuentre la velocidad de la partícula (componentes radial y tangencial) cuando ésta se halla a una distancia $d = 2\ r_0$ del punto O. Exprese el resultado en términos de r_0 y de los datos del problema.



CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

1 - Algunos de los cuerpos de la figura no son rígidos. Encuéntrelos.
(No debe hacer cálculos. Sólo debe observar la figura).



2 - Preguntas:

i) ¿Qué dirección debe tener el vector $\vec{v}_P - \vec{v}_Q$ (velocidad relativa de P respecto de Q) para que no cambie la distancia entre P y Q?.

ii) La expresión $\vec{v}_P - \vec{v}_Q = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{QP}$, ¿satisface esa condición?.

3 - El eje instantáneo de rotación es el conjunto de puntos que tienen velocidad nula en un dado instante.

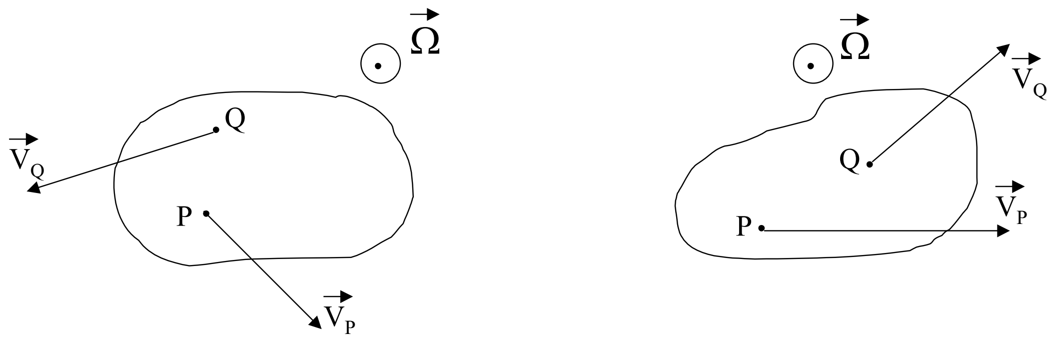
i) Demuestre que, si existe, es una recta paralela a $\vec{\Omega}$.

ii) Demuestre que si hay un punto P del cuerpo tal que $\vec{v}_P \cdot \vec{\Omega} \neq 0$, entonces no hay eje instantáneo de rotación.

iii) Demuestre que si un punto O pertenece al eje instantáneo de rotación, entonces $\vec{v}_P$ es perpendicular a $\vec{r}_{OP}$.

4 - Teniendo en cuenta el resultado del problema 3 iii):

i) Invente un método gráfico para determinar la posición del eje instantáneo de rotación, en los siguientes casos:



ii) Dibuje el campo de velocidades de un cilindro que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

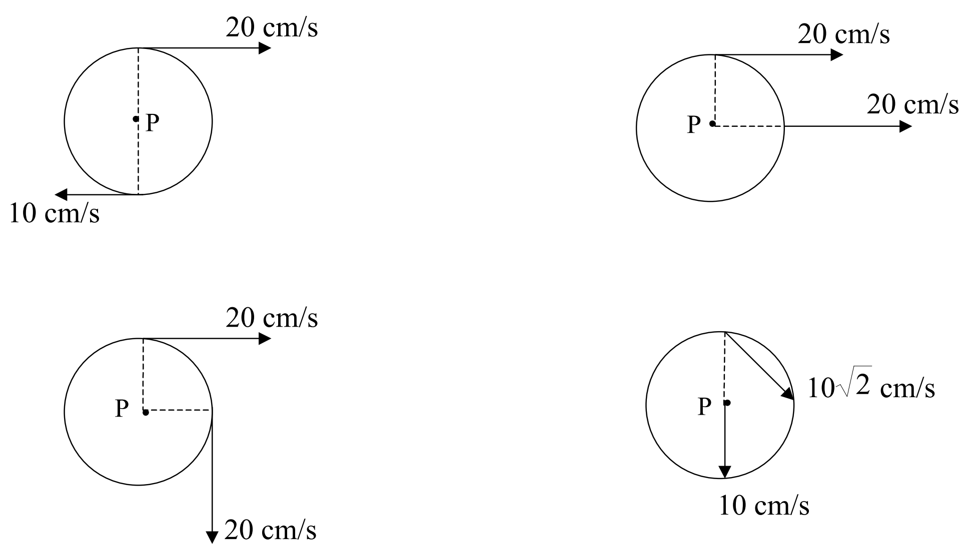
5 - La velocidad angular de un cuerpo rígido sometido a un movimiento rototraslatorio es $(0,0,\omega)$ y la velocidad de uno de sus puntos P es $(v_x,v_y,0)$.

i) Determinar por consideraciones de cálculo vectorial, si existe un eje instantáneo de rotación.

ii) Idem que i), pero con $\vec{v}_P = (v_x,v_y,v_z)$ con $v_z \neq 0$.

iii) ¿Cuál es, en ambos casos, el lugar geométrico de los puntos de velocidad mínima (en módulo)?.

6 - Los discos de la figura (R = 10 cm) tienen movimiento plano. Halle:



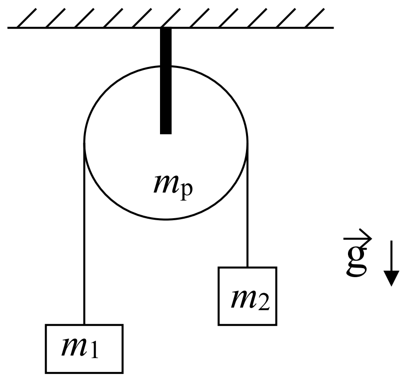
i) La posición del eje instantáneo de rotación.

ii) El vector $\vec{\Omega}$.

iii) La velocidad del punto P.

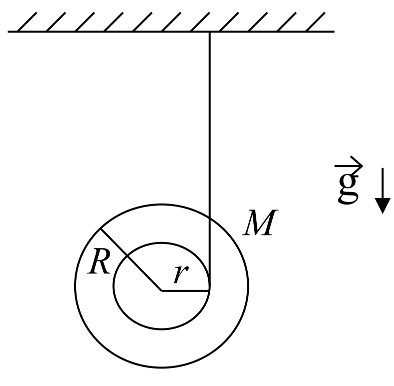
DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

1 - El sistema de la figura consiste de dos cuerpos de masas m_1 y m_2 unidos por una cuerda inextensible que pasa a través de una polea cilíndrica homogénea de masa m_p, que no posee rozamiento con su eje. Calcule la aceleración de las masas. Observe que el resultado no depende del radio de la polea.



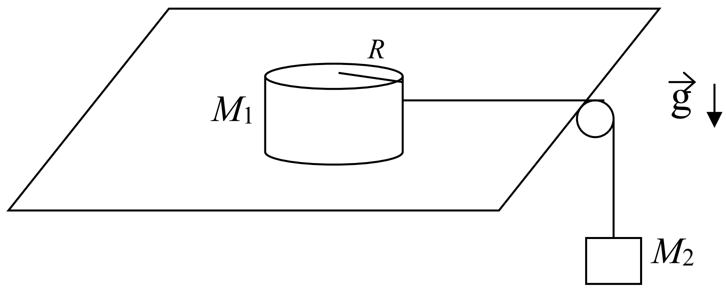
2 - Considere un yo-yo con radio exterior R igual a 10 veces su radio interior r. El momento de inercia I_o del yo-yo respecto de su centro de masa está dado por I_o=1/2MR^2, donde M es la masa total del yo-yo. El extremo final de la cuerda se mantiene en reposo y ésta no desliza respecto del yo-yo.

a) Calcule la aceleración del centro de masa del yo-yo. Cómo es comparada con g?.
b) Encuentre la tensión en la cuerda a medida que el yo-yo desciende. Cómo es comparada con Mg?.



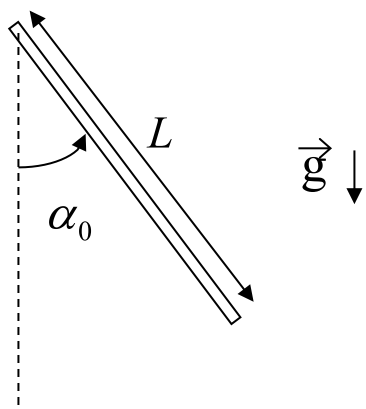
3 - Un disco cilíndrico homogéneo de radio R y masa M_1 es arrastrado sobre una superficie horizontal sin fricción por una cuerda que está unida a un cuerpo de masa M_2, como se indica en la figura. Determine:

a) la aceleración del centro del disco.
b) La aceleración angular del disco.
c) La aceleración del cuerpo de masa M_2.
d) La tensión en la cuerda.
e) La velocidad del centro de masa del disco cuando se ha desplazado una distancia igual a su diámetro, medida desde la posición en la que estaba en reposo.
f) La velocidad de la masa colgante en ese instante.



4 - Una barra homogénea delgada de masa M y longitud L puede girar libremente en torno de su eje fijo horizontal, tal como se indica en la figura. Se suelta la barra desde una posición que forma un ángulo α_0 con la vertical. Hallar:

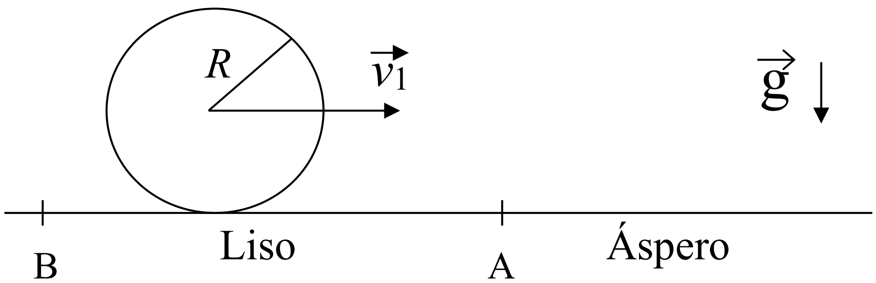
a) la velocidad angular de la barra cuando ésta pasa por la posición más baja.
b) la fuerza que ejerce el eje fijo sobre la barra cuando ésta pasa por la posición vertical.
c) Resuelva nuevamente por energía el punto a).



5 - Desde el extremo superior de un plano inclinado se sueltan, sin velocidad inicial, una esfera, un cilindro y un aro homogéneos, que bajan rodando hasta el extremo inferior del mismo.
Demuestre que la esfera llega al piso en menos tiempo que el cilindro y éste en menos tiempo que el aro, cualquiera sean sus masas y sus radios.

6 - Un cilindro homogéneo de masa M y radio R se traslada sin rodar con velocidad $\vec{v}_1$ en la parte exenta de rozamiento BA de una superficie horizontal Más allá de A cambia la superficie de manera que a la derecha de A el coeficiente de rozamiento es μ . Una vez que haya pasado el punto A, el cilindro deslizará primeramente sobre el plano áspero pero acabará rodando sin deslizar.

a) Calcule en qué punto empezará a rodar sin deslizar (rodadura) y cuál será la velocidad correspondiente del centro de masa.
b) Calcule la aceleración del cilindro y el valor de la fuerza de rozamiento a partir del punto en que entra en rodadura (punto C).
c) Calcule la energía perdida entre el punto A y el punto C. Justifique el valor hallado por razonamientos energéticos.



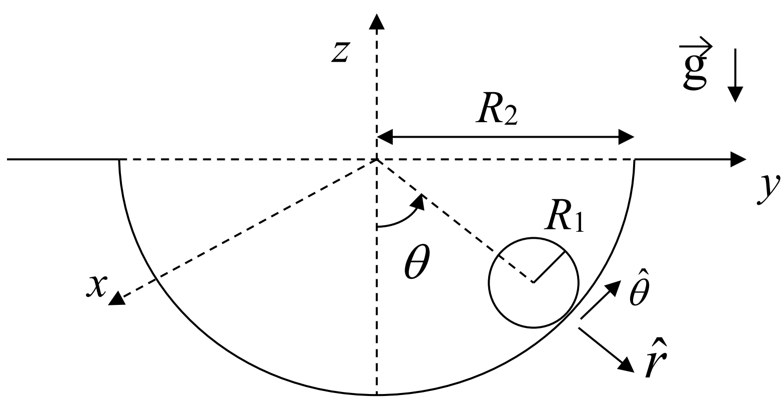
7 - Un cilindro homogéneo de radio R_1 y masa m rueda sin resbalar (hay rozamiento) dentro de una cavidad semicilíndrica de radio R_2 (ver figura).

a) Si θ es el ángulo de la figura y $\vec{v}_{CM}$ es la velocidad del centro de masa del cilindro de radio R_1, escriba los vectores $\vec{v}_{CM}$ y $\dot{\vec{v}}_{CM}$ en función de datos y de las derivadas de θ con respecto al tiempo.

b) Teniendo en cuenta los resultados de a) y que el cilindro rueda sin deslizar, exprese los vectores velocidad angular $\vec{\Omega}$ y aceleración angular $\dot{\vec{\Omega}}$ de este cilindro en función de datos y de las derivadas de θ con respecto al tiempo.

c) Indique en un dibujo todas las fuerzas que actúan sobre el cilindro y plantee las ecuaciones de Newton y momentos para este cilindro. Obtenga una ecuación diferencial para θ (t) y diga qué tipo de movimiento realiza el cilindro.

d) Si en el instante inicial θ (t = 0) = 0 y $\dot{\theta}$ (t = 0) = ω_0, diga cuál es la solución de la ecuación diferencial obtenida en c) para ángulos pequeños.



8 – Un cilindro homogéneo de masa m y radio R descansa sobre un tablón de igual masa m y longitud L. No existe fricción entre el suelo y el tablón. Una partícula de masa M y velocidad $\vec{v}_O = v_O\hat{x}$ choca elásticamente contra un extreme del tablón y queda en reposo. El sistema tablón-cilindro se pone en movimiento, de tal manera que el cilindro empieza a rodar respecto del tablón.

a) Indique qué magnitudes se conservan. Justifique.

b) Calcule la velocidad del tablón, la del centro de masa del cilindro y la velocidad angular de angular del mismo un instante después del choque.

c) ¿En qué sentido tiene que girar el cilindro? Justifique.