

El problema de dos cuerpos.

1. Formalismo general

Cuando hablamos de un *problema de dos cuerpos* no nos referimos a un sistema en concreto sino a toda una clase de sistemas en mecánica clásica: cualquier sistema de dos partículas aisladas que interactúan entre sí pertenece a esta clase. En este apunte nos vamos a concentrar en una subclase de estos problemas (la más interesante desde el punto de vista físico) formada por aquellos en los cuales la interacción entre las partículas deriva de un potencial que depende únicamente de la distancia entre las mismas (un planeta orbitando alrededor del sol, un satélite orbitando alrededor de un planeta, ¿un electrón orbitando alrededor del núcleo atómico?, el problema 5 de la guía de teoremas de conservación de Física 1, etc.). En todos estos casos es posible reducir, mediante algún que otro truquillo matemático y alguna que otra elección conveniente del sistema de referencia, el problema de 2 cuerpos a uno equivalente de uno solo.

La hipótesis de que el sistema está aislado nos dice, en particular, que la suma de fuerzas externas actuando sobre el mismo es nula y, por ende, que el impulso lineal del sistema se conserva. Esto significa que la velocidad del centro de masa es constante y, por lo tanto, el mismo es un sistema de referencia inercial. La ausencia de fuerzas externas no nos alcanza para asegurar que la energía mecánica se conserve (¿por qué?) pero, dado que la única interacción presente entre las partículas es conservativa -dijimos que deriva de un potencial-, tenemos que la energía mecánica resulta una constante de movimiento para este tipo de problemas. En cuanto al momento angular, nuevamente, las únicas candidatas a ejercer torque alguno son las fuerzas internas, pero si nos tomamos la molestia de calcular dichos torques, vemos que:

$$\frac{d\vec{L}^{(o)}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{0}, \quad (1)$$

donde en la segunda igualdad usamos la tercera ley de Newton para decir que $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ y en la tercera el hecho de que, como el potencial depende únicamente de la distancia entre las partículas, la dirección de las fuerzas de interacción coincidirá con la dirección que une a ambas partículas (este último agregado viene con la versión fuerte de la tercera ley, la cual no es válida siempre, pero lo es para el tipo de problemas que estamos considerando acá). Es interesante notar que la única suposición que hicimos a la hora de analizar las cantidades conservadas fue que nos encontramos en un sistema de referencia inercial, por lo que las tres cantidades serán constantes para todo sistema inercial (¿las constantes son las mismas en sistemas distintos?

¿podemos obtener información nueva por cada sistema de referencia inercial que se nos ocurra?
 ¿qué pasa si el sistema no es inercial?).

Tenemos entonces que en cualquier sistema inercial “o”, se conservan las tres cantidades:

$$\vec{p} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2, \quad E = \frac{m_1}{2} |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\vec{r}}_2|^2 + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|), \quad \vec{L}^{(o)} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2, \quad (2)$$

donde \vec{r}_i y $\dot{\vec{r}}_i$ son el vector posición y el vector velocidad, respectivamente, de la partícula i . Está claro que estas tres expresiones no tienen demasiada utilidad práctica si uno no establece un sistema de referencia y de coordenadas concreto para trabajar. Hacia eso vamos ahora.

De los infinitos sistemas inerciales que podemos elegir, hay uno que debería parecernos el más atractivo y el candidato a simplificarnos la vida: el sistema fijo al centro de masa. Empecemos por notar que, en dicho sistema, la conservación del momento lineal se lee:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1 = -m_2 \dot{\vec{r}}_2, \quad (3)$$

pues el momento total es nulo en dicho sistema. Esto hace explícito el hecho de que, en el sistema centro de masa, las velocidades de las dos partículas siempre tienen que tener la misma dirección y sentidos opuestos. Por otro lado, en este sistema de referencia también es cierto que:

$$m_1 \vec{r}_1 = -m_2 \vec{r}_2, \quad (4)$$

lo cual se deduce de calcular la posición del centro de masa en el sistema fijo al mismo. Esta última igualdad nos dice que, en el sistema centro de masa, las posiciones de las partículas también deberán ser colineales y tener sentidos opuestos. No sólo eso, sino que la relación entre los módulos de estos vectores es la misma que entre los módulos de las velocidades (comparar con la ecuación (3)). Esto último es súper importante y lo vamos a usar más adelante. Por ahora, las últimas dos ecuaciones nos van a servir para deducir la primera característica importante del movimiento. Para ello, notemos que si calculamos el momento angular desde el centro de masa:

$$\vec{L}^{(cm)} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 \equiv \vec{L}_1^{(cm)} + \vec{L}_2^{(cm)}, \quad (5)$$

podemos notar dos cosas: por un lado, la contribución de cada partícula es constante, pues las fuerzas que actúan sobre ellas son colineales a sus vectores posición en este sistema de referencia. Dicho de otra forma, en el sistema fijo al centro de masa, no sólo se conserva el momento angular total del sistema, sino que también el de cada una de las partes por separado. Más importante aún, usando las ecuaciones (3) y (4) podemos ver que ambas contribuciones apuntan en la misma dirección (la del momento angular total). Esto nos dice que la posición de cada una de las partículas y su respectiva velocidad, en cualquier instante, son vectores

perpendiculares a la dirección del momento angular total (que es constante). Hemos concluido entonces que el movimiento de un sistema de dos cuerpos, descrito desde el sistema fijo al centro de masa, es necesariamente plano.

Las ecuaciones (3) y (4) implican que, en el sistema fijo al centro de masa, basta conocer la posición y la velocidad de una de las partículas para conocer el estado de todo el sistema. Uno podría elegir caprichosamente cualquiera de las dos y describir el problema a partir de dicha elección; pero veremos que existe una alternativa más elegante que simplifica enormemente la descripción del movimiento. Si miramos fijo al potencial que rige la interacción entre ambas partículas, pareciera razonable definir la siguiente variable:

$$\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (6)$$

la cual no es otra cosa que la posición relativa entre ambas partículas. Usando esta última definición, la relación (4) y un poquito de álgebra, podemos describir la posición de ambas partículas en términos de la posición relativa:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{y} \quad \vec{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}, \quad (7)$$

y derivando con respecto al tiempo obtenemos expresiones análogas para las velocidades:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}} \quad \text{y} \quad \dot{\vec{r}}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}. \quad (8)$$

En términos de nuestra nueva variable \vec{r} , la energía cinética del sistema adquiere una forma particularmente simpática:

$$T = \frac{m_1}{2} |\dot{\vec{r}}_1|^2 + \frac{m_2}{2} |\dot{\vec{r}}_2|^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \right] |\dot{\vec{r}}|^2 \equiv \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2, \quad (9)$$

donde, en la última igualdad, definimos la *masa efectiva* del sistema $\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. Mediante una triquiñuela similar (queda de tarea) podemos ver que el momento angular se puede escribir:

$$\vec{L}^{(cm)} = m_1 \vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2 = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}, \quad (10)$$

mientras que la energía potencial, en términos de la nueva variable \vec{r} también resulta tener una expresión muy sencilla: $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = V(|\vec{r}|)$.

En resumen, para un sistema de dos partículas que interactúan únicamente entre sí y mediante un potencial que depende de la distancia entre ellas, el movimiento puede describirse en términos de una única partícula de masa μ sometida a un potencial central $V(|\vec{r}|)$. Como en cualquier problema de estas características, la energía mecánica y el impulso angular serán cantidades conservadas y se escriben:

$$E = \frac{\mu}{2} |\dot{\vec{r}}|^2 + V(|\vec{r}|) \quad , \quad \vec{L} = \mu \vec{r} \times \dot{\vec{r}}. \quad (11)$$

A pesar de tratarse de una partícula ficticia, su dinámica está íntimamente relacionada con el movimiento real del sistema, ya que el vector \vec{r} fue definido como la posición relativa entre las partículas originales. De todas formas, unx puede volver cuando guste a las variables originales, por medio de las leyes de transformación (7) y (8).

Sólo resta elegir un sistema de coordenadas conveniente. Al haber reducido el problema al de una única partícula que se mueve en un plano (las partículas originales se movían en un plano, así que la posición relativa entre ellas también) sometida a un potencial central, resulta tentador describir al sistema en coordenadas cilíndricas $\{r, \theta, z\}$, con \hat{z} perpendicular al plano en el que se da el movimiento y, por ende, paralelo al momento angular del sistema. En términos del sistema real, r representa la distancia entre las partículas y θ el ángulo que forma el segmento que las une con respecto a algún eje fijo. Tenemos entonces $\vec{r} = r\hat{r}$ y $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, por lo que las cantidades conservadas pueden escribirse:

$$E = \frac{\mu}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 \right] + V(r) \quad , \quad \vec{L} = L\hat{z} = \mu r^2\dot{\theta}\hat{z} . \quad (12)$$

Aprovechando la conservación del momento angular, podemos recurrir al viejo y querido truco de reescribir la energía mecánica según:

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + V_{eff}(r) \quad \text{con} \quad V_{eff}(r) \equiv \frac{L^2}{2\mu r^2} + V(r) , \quad (13)$$

lo cual nos permite reducir el problema de nuestra partícula imaginaria al de otra partícula *más imaginaria todavía* que se mueve en una dimensión sometida al potencial $V_{eff}(r)$. Las conclusiones que saquemos para el movimiento de esta partícula, ya sabemos como transferirlas al movimiento de la partícula *un poco menos imaginaria* de masa μ y vector posición \vec{r} . Una vez entendido el movimiento de esta última, podemos usar (7) y (8) para entender el movimiento del sistema original de dos partículas.

Como observación final, notemos que si una de las masas es mucho más grande que la otra, digamos $m_1 \ll m_2$, entonces $\mu \rightarrow m_1$. Es decir, se tiene que la masa efectiva coincide con la masa de la partícula liviana, mientras que el centro de masa tiende a la posición de la partícula pesada. Por eso, en este régimen, es válido pensar a la partícula pesada quieta y a la partícula liviana moviéndose sometida a un potencial central con origen en la posición de la otra (esta aproximación es la que unx suele usar, por ejemplo, al estudiar el sistema Tierra-Sol; o el de cualquier objeto *liviano* gravitando en torno a uno mucho más masivo).

Ahora veamos cómo aplicar todo esto a un ejemplo concreto (el problema 5 de la guía de teoremas de conservación).

2. Problema 5

Empecemos notando que estamos ante un caso particular de todo lo discutido en los párrafos anteriores. Los puristas dirán que hay fuerzas externas y tienen razón: el peso de ambas partículas y la normal de la mesa sobre ellas. Pero, dado que se anulan de a pares, el problema resulta indistinguible de aquel en el cual las dos partículas se mueven en ausencia de fuerzas externas (no hace falta que nos digan que hay una mesa para saber que el movimiento será también plano en esta situación, como ya hemos visto). Estamos entonces ante un problema de dos cuerpos con un potencial de interacción dado por $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = \frac{k}{2} (|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| - l_0)^2$.

El primer inciso nos pregunta qué velocidad inicial debemos darle a la partícula 2 para que el centro de masa tenga velocidad inicial nula, sabiendo que a la partícula 1 se le dará una velocidad conocida \vec{v}_1 . De la definición del centro de masa, es sencillo ver que las dos velocidades deben ser tales que $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \vec{0}$, lo cual se va a satisfacer siempre que:

$$\vec{v}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 \text{ y } \vec{v}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0, \quad (14)$$

donde \vec{v}_0 es algún vector con unidades de velocidad cualquiera. La parametrización anterior es claramente correcta -es sencillo ver que si esas son las velocidades iniciales de cada partícula, entonces la velocidad inicial del centro de masa es nula- pero puede parecer algo caprichosa. Paciencia. Por el momento sólo notemos que no introducimos nada nuevo: si \vec{v}_1 es dato, entonces también lo es $\vec{v}_0 \equiv \frac{m_1+m_2}{m_2} \vec{v}_1$. Tenemos entonces que la velocidad que debemos darle a la partícula 2 para cumplir el objetivo solicitado es la que escribimos en la ecuación (14), donde \vec{v}_0 es lo que acabamos de definir en función de datos.

El segundo inciso nos hace una pregunta que ya respondimos en el caso general. Las tres cantidades mencionadas se conservan para todo tiempo en un sistema de esta naturaleza.

El tercer inciso nos pide calcular los valores de esas tres cantidades. El impulso lineal total es, por definición, nulo en el sistema centro de masa. Además, en el sistema fijo a la mesa también lo es, puesto que elegimos las velocidades iniciales de las partículas de manera que el centro de masa se quede quieto. En otras palabras, el centro de masa se queda quieto con respecto a la mesa para todo tiempo posterior. Para calcular la energía mecánica en el instante inicial (t_0), primero notamos que el resorte se encuentra relajado en dicho instante, por lo que no hay contribución de la energía potencial y sólo necesitamos calcular la energía cinética. Utilizando la parametrización (14) de las velocidades iniciales, tenemos:

$$E(t_0) = \frac{m_1}{2} \left[\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 \right]^2 + \frac{m_2}{2} \left[\frac{-m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_0 \right]^2 = \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2} v_0^2 = \frac{\mu v_0^2}{2}, \quad (15)$$

donde v_0 es el módulo de \vec{v}_0 y μ es la masa reducida definida anteriormente (acá se ve la conveniencia de haber tomado la parametrización que tomamos para las velocidades iniciales). Queda de tarea ver que el impulso angular (con respecto al centro de masa) inicial resulta:

$$\vec{L}(t_0) = L(t_0)\hat{z} = \mu l_0 v_0 \hat{z}, \quad (16)$$

donde ya hemos tomado \hat{z} en la dirección perpendicular al movimiento y l_0 es la longitud natural del resorte, que coincide con la separación inicial entre las partículas.

El cuarto inciso nos pide escribir la posición y la velocidad de la partícula 2 en función de las variables asociadas a la partícula 1. Ya sabemos hacerlo: son las ecuaciones (3) y (4). También nos pregunta cuánto vale la velocidad del centro de masa en un instante arbitrario: pero ya se lo respondimos. Qué infumable.

Para abordar los últimos dos incisos y estudiar el movimiento del sistema, escribimos la energía mecánica y el momento angular para todo instante como en el caso general: en términos de la descomposición en polares de la variable posición relativa $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Tenemos entonces:

$$E(t) = \frac{\mu}{2} \left[\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right] + \frac{k}{2} (r - l_0)^2 = \frac{\mu v_0^2}{2} = E(t_0) \quad \text{y} \quad L(t) = \mu r^2 \dot{\theta} = \mu l_0 v_0 = L(t_0). \quad (17)$$

Como era de esperar, el problema reducido es el de una partícula de masa μ fija a un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0 , cuyo otro extremo se encuentra fijo. Si miramos con cariño los valores iniciales de la energía mecánica y el momento angular, vemos que inicialmente el resorte se encuentra relajado y se le imprime a nuestra partícula efectiva una velocidad perpendicular a la dirección del resorte y de módulo v_0

De la conservación del momento angular se sigue que:

$$\dot{\theta} = \frac{l_0 v_0}{r^2}, \quad (18)$$

que no es otra cosa que la velocidad angular del sistema en función de la distancia entre las partículas. Insertando esta relación en la conservación de la energía, tenemos:

$$E(t) = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + V_{eff}(r) = \frac{\mu v_0^2}{2} \quad \text{con} \quad V_{eff}(r) = \frac{\mu l_0^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{k}{2} (r - l_0)^2, \quad (19)$$

la cual es una ecuación diferencial para la distancia entre las partículas como función del tiempo. Así escrita asusta un poco (tenemos derivadas de la función al cuadrado). Pero se puede llevar a una forma más amigable. Para eso, podemos escribir:

$$\frac{\mu \dot{r}^2}{2} = \frac{\mu v_0^2}{2} - V_{eff}(r) \quad (20)$$

y derivar con respecto a r de ambos lados. Para el lado izquierdo, vemos que $\frac{d}{dr}(\dot{r}^2) = 2\dot{r}\frac{d\dot{r}}{dr}$. Aquí podemos acudir a nuestra vieja amiga, la relación $\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dr}\dot{r}$, y concluir que $\frac{d}{dr}(\dot{r}^2) = 2\ddot{r}$. Tenemos entonces que al derivar con respecto a r la ecuación (20), se obtiene:

$$\mu\ddot{r} = -\frac{dV_{eff}}{dr}, \quad (21)$$

que es la ecuación de movimiento de una partícula de masa μ sometida a un potencial unidimensional $V_{eff}(r)$ (esto es súper razonable, ya que el camino para obtener la expresión de la energía mecánica de un sistema consiste en arrancar desde la ecuación de Newton e integrar, mientras que aquí partimos de la expresión de la energía mecánica y derivamos). También esclarece escribir explícitamente la *fuerza efectiva* a la que está sometida nuestra partícula imaginaria:

$$-\frac{dV_{eff}}{dr} = \frac{l_0^2 v_0^2}{r^3} - k(r - l_0), \quad (22)$$

donde aparecen tanto la fuerza elástica como la “fuerza” asociada al potencial centrífugo. Si volvemos un poco sobre nuestros pasos y hacemos reaparecer $\dot{\theta}$ por medio de la relación (18), la ecuación (21) se escribe:

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -k(r - l_0) \quad (23)$$

... ¿les suena?

El enunciado del ejercicio no pide nada de esto último, pero sirve para entender que, después de todo, todos los caminos que aprendimos para resolver problemas a lo largo de la materia son simplemente formas de parafrasear la segunda ley de Newton. Qué forma usamos en cada caso es sólo una cuestión de conveniencia y comodidad.

Con todo lo anterior en mente podemos describir, con bastante precisión, el movimiento cualitativo del sistema. La distancia entre las dos partículas oscilará (¿en qué régimen esta oscilación va a ser armónica?) entre dos valores que se pueden hallar igualando el potencial efectivo al valor de la energía mecánica del sistema. La velocidad angular de las partículas dependerá de la distancia entre las mismas según la ecuación (18). Un ejercicio interesante es pensar cómo tienen que ser las condiciones iniciales para que el sistema realice órbitas circulares; es decir, que ambas partículas giren con frecuencia angular constante mientras se mantiene fija la distancia entre las mismas.

Vale notar que el enunciado nos pedía escribir las ecuaciones (18 - 21) no en términos de \vec{r} y $\dot{\vec{r}}$ sino en términos de \vec{r}_1 y $\dot{\vec{r}}_1$, el cual es un camino bastante menos amigable. Para quienes disfruten de los caminos poco amigables, basta invertir las relaciones (7) y (8) para describir el movimiento del sistema en términos de las variables de la partícula 1.