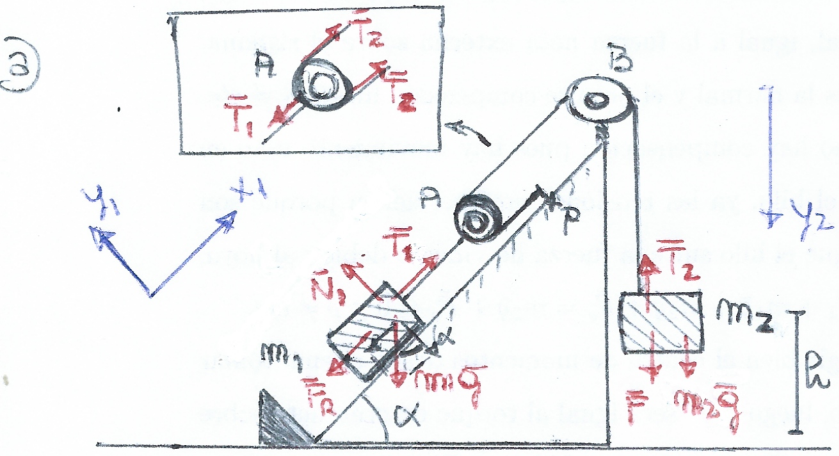
PROBLEMA 1

Se tienen dos masas unidas a un sistema de poleas sobre un plano inclinado con ángulo "α", con respecto a la horizontal. La masa m_1 presenta fricción con coeficientes μ_e y μ_d, con la superficie del plano. Sobre la masa m_2 se ejerce una fuerza $\bar{F}\downarrow$.

③



Ecuaciones de Newton:

$$\begin{cases} x1)\ T_1 - F_R - m_1 g\,\mathrm{sen}(\alpha) = m_1 \ddot{x}_1 \\ y1)\ N_1 - m_1 g \cos(\alpha) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x2)\ \text{———} \\ y2)\ -T_2 + F + m_2 g = m_2 \ddot{y}_2 \end{cases}$$

Condición de vínculo dinámico sobre T_1 y T_2:

* Sobre la cuerda que une a la masa m_1 con la polea A, la tensión debe ser la misma para que no deje de estar tensa, y su valor debe ser T_1.
* Sobre la cuerda que nace de la polea A, pasa por la polea B, y termina en la masa 2: también por las mismas razones la tensión debe ser la misma en todos sus puntos y debe valer T_2.

Entonces haciendo Newton sobre la polea móvil A tenemos:

$$2T_2 - T_1 = \underbrace{m_A}_{=0} \ddot{x}_A = 0 \Rightarrow \boxed{T_1 = 2T_2}$$

Condición de vínculo cinemático sobre $\ddot{x}_1$ y $\ddot{x}_2$:

* Long. soga recta $= cte \Rightarrow x_A - x_1 = cte \underset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \underbrace{\dot{x}_A}_{\text{polea móvil}} - \dot{x}_1 = 0 \underset{\frac{d}{dt}}{\Rightarrow} \ddot{x}_1 = \ddot{x}_A$ (*)

* Long. soga curva $= cte \Rightarrow (\underbrace{x_B}_{=cte} - x_A) + (\underbrace{x_P}_{=cte} - x_A) + (y_2 - \underbrace{y_B}_{=cte}) \underset{\frac{d^2}{dt^2}}{\Rightarrow} \ddot{y}_2 = 2\ddot{x}_A$ (**)

Luego, juntando (*) y (**): $\boxed{\ddot{y}_2 = 2\ddot{x}_1}$

b) Damos el rango de valores que puede tomar F, sin que el sistema se ponga en movimiento. Lo que tenemos que pedir es aceleración nula de ambas masas (un nuevo vínculo cinemático, para esta ocasión). De este modo tenemos, aplicando también el vínculo de las tensiones:

$$\begin{cases} x1) \; 2T - F_R - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) = 0 \\ y1) \; N_1 - m_1 g \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x2) \; \text{———} \\ y2) \; -T + F + m_2 g = 0 \end{cases}$$

La idea es hallar acá una condición sobre F_R, que nos asegure rozamiento estático. Esto es:

$$|F_R| \leq \mu_e . N_1 \Rightarrow -\mu_e N_1 \leq F_R \leq \mu_e N_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu_e m_1 g \cos(\alpha) \leq F_R \leq \mu_e m_1 g \cos(\alpha).$$

Hallemos entonces, una expresión analítica para F_R, que se de de las ecuaciones de Newton. Sumemos $x1) + 2\,y2)$:

$$\begin{array}{rl} 2T - F_R - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) = 0 & \longrightarrow (x1) \\ +2[-T + F + m_2 g = 0] & \longrightarrow 2(y2) \\ \hline \cancel{2T} - \cancel{2T} - F_R + 2F - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) + 2m_2 g = 0 & \end{array}$$

Luego queda: $F_R = 2F - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) + 2m_2 g$

Entonces volviendo a la condición de rozamiento, nos queda:

$$-\mu_e m_1 g \cos(\alpha) \leq 2F - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) + 2m_2 g \leq \mu_e m_1 g \cos(\alpha)$$

Separo la inecuación en dos:

* $-\mu_e m_1 g \cos(\alpha) \leq 2F - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) + 2m_2 g \Rightarrow$

$$\Rightarrow F \geq \frac{[\text{sen}(\alpha) - \mu_e \cos(\alpha)]\, m_1 - 2m_2}{2} g$$

* $2F - m_1 g \,\text{sen}(\alpha) + 2m_2 g \leq \mu_e m_1 g \cos(\alpha) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F \leq \frac{[\text{sen}(\alpha) + \mu_e \cos(\alpha)]\, m_1 - 2m_2}{2} g$$

Juntando ambas soluciones queda:

$$\boxed{\frac{[\text{sen}(\alpha) - \mu_e \cos(\alpha)]\, m_1 - 2m_2}{2} g \leq F \leq \frac{[\text{sen}(\alpha) + \mu_e \cos(\alpha)]\, m_1 - 2m_2}{2} g}$$

c) Supongamos que inicialmente se coloca a la masa m_2 a una altura h respecto del piso, y se la libera sin velocidad inicial. Consideremos que F es apenas superior que la mayor fuerza del intervalo que acabamos de calcular. Lo que tenemos que hacer es emplear consideraciones de Cinemática para hallar el tiempo que tarda esta masa en llegar al piso.

Planteemos la ecuación horaria:

$$\begin{cases} a(t) = \ddot{y}_2(2F_{máx}) \\ v(t) = \underbrace{v_0}_{=0} + \ddot{y}_2(2F_{máx})\cdot t \\ y(t) = \underbrace{y_0}_{\text{la tomo } =0} + \underbrace{v_0}_{=0} t + \frac{1}{2}\ddot{y}_2(2F_{máx})\, t^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a(t) = \ddot{y}_2(2F_{máx}) \\ v(t) = \ddot{y}_2(2F_{máx})\, t \\ y(t) = \frac{1}{2}\ddot{y}_2(2F_{máx})\, t^2 \end{cases}$$

Luego solo queda hallar la aceleración de m_2 evaluada en el doble de la máxima fuerza F, tal que el sistema permanece en reposo. Para ello, volvemos a las ecuaciones de Newton de la primera hoja, que dependen de $\ddot{x}_1$ e $\ddot{y}_2$. Ahora aplicamos allí la condición de vínculo sobre estas aceleraciones:

$$\begin{cases} x1)\ 2T - F_R - m_1 g \operatorname{sen}(\alpha) = m_1 \frac{\ddot{y}_2}{2} \\ y1)\ N_1 - m_1 g \cos(\alpha) = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x2)\ \text{———} \\ y2)\ -T + 2F_{máx} + m_2 g = m_2 \ddot{y}_2(2F_{máx}) \end{cases}$$

Entonces sumando como antes, $x1) + 2\,y2)$, despejamos $\ddot{y}_2(2F_{máx})$:

$$-\underbrace{F_R}_{=\mu_d N_1 = \mu_d m_1 g \cos(\alpha)} - m_1 g \operatorname{sen}(\alpha) + 4F_{máx} + 2m_2 g = \left(\frac{m_1}{2} + 2m_2\right)\ddot{y}_2(2F_{máx}) \rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu_d \cos(\alpha) m_1 g - \operatorname{sen}(\alpha) m_1 g + \underbrace{2[\operatorname{sen}(\alpha) + \mu_e \cos(\alpha)] m_1 g - 4m_2 g}_{=4F_{máx}} + 2m_2 g = \frac{m_1 + 4m_2}{2}\ddot{y}_2(2F_{máx})$$

$$\Rightarrow \ddot{y}_2(2F_{máx}) = \frac{2\{[\operatorname{sen}(\alpha) + (2\mu_e - \mu_d)\cos(\alpha)] m_1 - 2m_2\}}{m_1 + 4m_2}\, g$$

Luego, vamos a la ecuación para $y(t)$, y hallemos $t_{caída}$, tal que $y(t_{caída}) = h$:

$$y(t_{caída}) = h = \frac{\ddot{y}_2(2F_{máx})}{2} t_{caída}^2 \Rightarrow \boxed{t_{caída} = \sqrt{\frac{(m_1 + 4m_2) h}{\{[\operatorname{sen}(\alpha) + (2\mu_e - \mu_d)\cos(\alpha)] m_1 - 2m_2\} g}}}$$