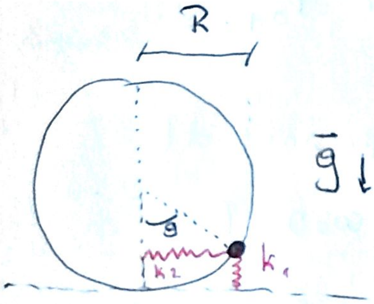
Problema (2)

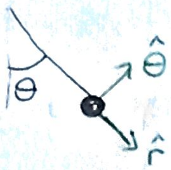


Datos: $m, g, k_1, l_{01}, k_2, l_{02}$

$k_1 > k_2, \quad l_{01} = R, \quad l_{02} = 0$

a) Obtener ecuaciones de Newton

Elegimos sistema de coord. polares



Los fuerzas q' actúan sobre la masa m son:

$\vec{F}_v, \vec{P}, \vec{F}_{e1}, \vec{F}_{e2}$

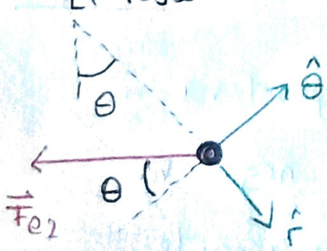
Descomponemos las fuerzas en $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$

$\vec{F}_v = F_v \hat{r}$ (el riel circular no puede realizar fuerza tangencial)
(el valor de F_v puede ser positivo o negativo)

$\vec{P} = mg(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$ (es fácil chequear q' p/ valores particulares de θ apunta en la dirección correcta)

Resortes:

El resorte 2 está siempre estirado ya q' $l_{02} = 0$

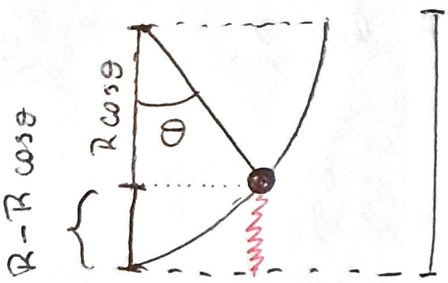


$$\boxed{\vec{F}_{e2} = -k_2 R\sin\theta\,(\sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta})}$$

$R\sin\theta$ (estiramiento del resorte 2)

Noto q'

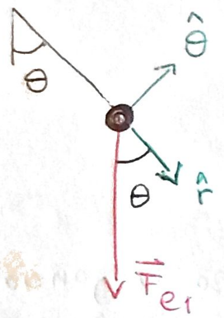
P/el resorte 1 vamos a pensar q' está estirado y luego reemplazamos el valor adecuado de l_{01}.



El estiramiento (ó compresión) del resorte es $R - R\cos\theta - l_{01}$

$$|\vec{F}_{e1}| = k_1 \, |R - R\cos\theta - l_{01}|$$

Si pensamos por un momento q' el resorte se encuentra estirado



$$\vec{F}_{e1} = k_1 \left(R - R\cos\theta - l_{01}\right)\left(\cos\theta \, \hat{r} - \sin\theta \, \hat{\theta}\right)$$

(asumiendo momentaneamente q' está estirado)

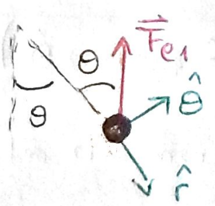
Ahora si reemplazamos $l_{01} = R$, entonces

$$\vec{F}_{e1} = -k_1 R\cos\theta \left(\cos\theta \, \hat{r} - \sin\theta \, \hat{\theta}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{e1} = -k_1 R \cos^2\theta \, \hat{r} + k_1 R \cos\theta \sin\theta \, \hat{\theta}}$$

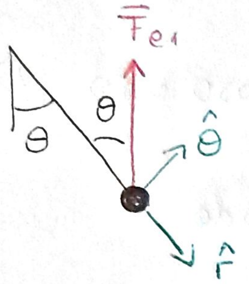
Notemos q' si $l_{01} = R$ p/ $\theta \in [0, \pi/2)$ el resorte está comprimido

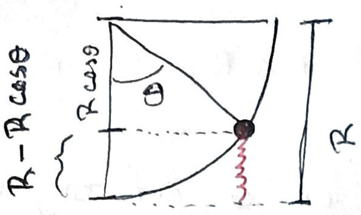
por lo tanto



la componente $\hat{\theta}$ es positiva y la componente $\hat{r}$ es negativa como es de esperar p/ un resorte comprimido.

El resorte 1 tiene $l_{01} = R$, Entonces si $\theta \in [0, \pi/2)$ se encuentra <u>comprimido</u>





El estiramiento o compresión del resorte es $\Delta l = |R - R\cos\theta - R|$

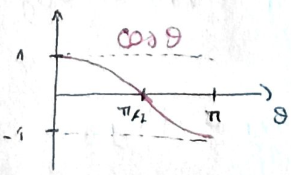
Para fijar ideas, asumamos $\theta \in [0, \pi/2) \Rightarrow \Delta l = R\cos\theta$

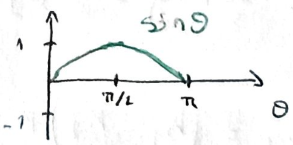
$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{e1} = k_1 R\cos\theta\,(-\cos\theta\,\hat{r} + \sin\theta\,\hat{\theta})$$

$$\boxed{\vec{F}_{e1} = -k_1 R\cos^2\theta\,\hat{r} + k_1 R\cos\theta\sin\theta\,\hat{\theta}}$$

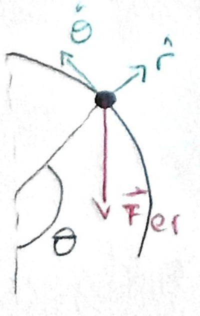
Corroboremos q' cuando el resorte está estirado, es decir $\theta \in (\pi/2, \pi)$, la fuerza apunta en la dirección correcta

p/ $\theta \in (\pi/2, \pi)$ $\quad \cos\theta < 0 \quad$ y $\quad \sin\theta > 0$





Entonces $F_{e1r} < 0$ y $F_{e1\theta} < 0$ p/ $\theta \in (\pi/2, \pi)$



Finalmente, escribimos las ecuaciones de Newton

$\hat{r})$ $-mR\ddot{\theta} = +mg\cos\theta + F_V - k_1 R\cos^2\theta - k_2 R\sin^2\theta$ (1)

$\hat{\theta})$ $mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta + k_1 R\cos\theta\sin\theta - k_2 R\cos\theta\sin\theta$ (2)

Podemos reescribir la ec. en $\hat{\theta}$ del siguiente modo

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{(k_1 - k_2)}{m}\sin\theta\cos\theta = 0}$$ Ecuación de movimiento

b) Posiciones de equilibrio

hallar θ_{eq} / $\ddot{\theta}(\theta_{eq}) = 0$ $(F_{res}(\theta_{eq}) = 0)$

de (2) podemos obtener la fuerza resultante en $\hat{\theta}$

$F_{res}(\theta) = -mg\sin\theta + (k_1 - k_2)R\cos\theta\sin\theta$

p/ q' θ_{eq} sea equilibrio

$F_{res}(\theta_{eq}) = 0 = -mg\sin\theta_{eq} + (k_1 - k_2)R\sin\theta_{eq}\cos\theta_{eq}$

$\Leftrightarrow$ $mg\sin\theta_{eq} = (k_1 - k_2)R\sin\theta_{eq}\cos\theta_{eq}$ (3)

Notemos q' $\boxed{\theta_{eq} = \{0, \pi\}}$ son siempre solución de (3)

independientemente de los valores de m, g, k_1 y k_2

Si $\theta_{eq} \neq \{0, \pi\}$ podemos obtener otras dos posiciones de equilibrio.

de (3) $mg = (k_1 - k_2) R \cos\theta_{eq}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos\theta_{eq} = \frac{mg}{(k_1 - k_2)R}} \quad (4)$$

dado q' $k_1 - k_2 > 0$ $\cos\theta_{eq} > 0$ y además $|\cos\theta_{eq}| \leq 1$

$$\Rightarrow \text{se tiene q' cumplir q'} \quad \boxed{\frac{mg}{(k_1 - k_2)R} \leq 1} \quad (5)$$

p/ q' existan posiciones de equilibrio adicionales

La ec (5) nos dice q' la fuerza peso debe ser menor q' la fuerza de los resortes, es decir, $mg \leq (k_1 - k_2)R$

Además como $\cos\theta_{eq} > 0$ (dado q' $k_1 > k_2$) $\Rightarrow \boxed{\theta_{eq}^{(1)} \in (0, \pi/2)}$

y tmb $\boxed{\theta_{eq}^{(2)} = -\theta_{eq}^{(1)}}$ (por simetría de la configuración se puede ver)

c) P/ q' existan sólo dos puntos de equilibrio $mg > (k_1 - k_2)R$, es decir, la fuerza peso es más intensa q' la fuerza de los resortes. Las únicas posiciones de equilibrio son $\theta_{eq} = \{0, \pi\}$

p/ analizar su estabilidad debemos chequear el signo de la primer derivada de la fuerza resultante

$$F_{res}(\theta) \simeq F_{res}(\theta_{eq}) + \left.\frac{dF_{res}}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})$$

si $F'_{res}(\theta_{eq}) < 0$ es estable, si $F'_{res}(\theta_{eq}) > 0$ es inestable

y si $F'_{res}(\theta_{eq}) = 0$ no sé.

$$F'_{res}(\theta) = -mg\cos\theta + (k_1 - k_2)R(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

- $\theta_{eq} = 0 \Rightarrow F'_{res}(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{\theta_{eq}}}) = -mg + (k_1 - k_2)R < 0$ Estable

dado q' $mg \geq (k_1 - k_2)R$ p/ q' sólo existan dos posiciones de equilibrio

- $\theta_{eq} = \pi \Rightarrow F'_{res}(\pi) = +mg - (k_1 - k_2)R > 0$ Inestable

Pequeñas oscilaciones alrededor de $\theta_{eq} = 0$

$$mR\ddot{\theta} = F_{res}(\theta) \simeq F_{res}(\theta_{eq})(\theta - \theta_{eq})$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \underbrace{\frac{F'_{res}}{mR}}_{\omega^2}(\theta_{eq})(\theta - \theta_{eq}) = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = -\frac{F'_{res}(0)}{mR} = \boxed{g/R - (k_1 - k_2)/m = \omega^2}$$

Tmb es posible obtener la frecuencia de oscilación desde la ec de movimiento haciendo una expansión de Taylor alrededor de $\theta_{eq} = 0$ al primer orden no nulo

$\sin\theta \simeq \theta$ $\cos\theta \simeq 1$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{g}{R}\theta - \frac{(k_1 - k_2)}{m}\theta \cdot 1}_{\underbrace{\left(\frac{g}{R} - \frac{k_1 - k_2}{m}\right)}_{\omega^2}\theta} = 0$$