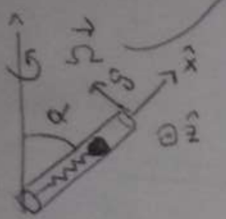
Problema 3



$\vec{\Omega} = \Omega(\cos\alpha\,\hat{x} + \text{sen}\,\alpha\,\hat{y})$ con $\Omega \equiv |\vec{\Omega}|$

$\vec{r} = x\hat{x}$, $\vec{v} = \dot{x}\,\hat{x}$, $\vec{a} = \ddot{x}\,\hat{x}$ $\quad (\dot{\vec{\Omega}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{azimutal} = \vec{0})$

$\boxed{\vec{F}_{coriolis} = -2m\vec{\Omega}\wedge\vec{v} = 2m\Omega\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{x}\,\hat{z}}$

$\boxed{\vec{F}_{centr} = -m\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{r}) = m\Omega^2\,\text{sen}\,\alpha\,[\text{sen}\,\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y}]}$

$m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\,\hat{x} - \text{sen}\,\alpha\,\hat{y})$, $\vec{F}_{elástica} = -k(x-l_0)\,\hat{x}$, $\vec{F}_{vinc} = F_v^y\,\hat{y} + F_v^z\,\hat{z}$

$\Rightarrow$ Newton:

$$\begin{cases} (\hat{x})\; m\ddot{x} = -mg\cos\alpha - k(x-l_0) + m\Omega^2\,\text{sen}^2\alpha\, x & (*) \to \text{ec. de movimiento} \\ (\hat{y})\; m\ddot{y} = F_v^y - mg\,\text{sen}\,\alpha - m\Omega^2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\, x = 0 & \to \text{vínculos} \\ (\hat{z})\; m\ddot{z} = F_v^z + 2m\Omega\,\text{sen}\,\alpha\,\dot{x} = 0 & \end{cases}$$

(no hay movimiento a y ni en z)

b) la ecuación de movimiento (*) se puede escribir:

$$\boxed{\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \Omega^2\,\text{sen}^2\alpha\right)x = \frac{kl_0}{m} - g\cos\alpha}$$

equilibrio $\rightarrow \ddot{x} = 0 \rightarrow x_{eq} = \dfrac{\frac{kl_0}{m} - g\cos\alpha}{\frac{k}{m} - \Omega^2\,\text{sen}^2\alpha}$

Sólo tienen sentido ~~[illegible]~~ físico valores positivos de x,

y sabemos q' $\frac{kl_0}{m} - g\cos\alpha > 0 \Rightarrow \exists\, x_{eq} \Leftrightarrow \frac{k}{m} - \Omega^2\,\text{sen}^2\alpha > 0$

$$\therefore \boxed{\Omega < \sqrt{\frac{k}{m\,\text{sen}^2\alpha}}}$$

$\rightarrow$ valores de Ω para los cuales es posible q' haya un equilibrio.

¿estabilidad? $\left.\dfrac{d\ddot{x}}{dx}\right|_{x_{eq}} = \left[\Omega^2\,\text{sen}^2\alpha - \frac{k}{m}\right]\Big|_{x_{eq}} = \Omega^2\,\text{sen}^2\alpha - \frac{k}{m} < 0$ $\rightarrow$ si existe

$\Rightarrow$ de existir, el punto de equilibrio es <u>estable</u>

c) Si $\Omega^2 = \frac{2k}{m \operatorname{sen}^2\alpha}$ (notar q' en este caso $\nexists$ equilibrio)

$\Rightarrow$ la ec. de movimiento queda:

$$\boxed{\ddot{x} - \frac{k}{m} x = \frac{k l_0}{m} - g\cos\alpha}$$

$x(t) = x_{HOM}(t) + x_{PART}(t)$.

propongo $x_{HOM}(t) \sim e^{\alpha t}$, es solución $\Leftrightarrow \alpha^2 \cancel{e^{\alpha t}} - \frac{k}{m}\cancel{e^{\alpha t}} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} \in \mathbb{R}$! $\to$ antioscilador ! $\to x_{HOM}(t) = Ae^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$

propongo $x_{PART} = cte \sim$ es solución $\Leftrightarrow -\frac{k}{m}x_{PART} = \frac{k l_0}{m} - g\cos\alpha$

$\Leftrightarrow x_{PART} = \frac{mg\cos\alpha}{k} - l_0$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = Ae^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + Be^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t} + \frac{mg\cos\alpha}{k} - l_0}$$

$\dot{x}(t) = \left(Ae^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} - Be^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \dot{x}(0) = 0 \Leftrightarrow A = B$

$x(0) = A + B + \frac{mg\cos\alpha}{k} - l_0 = 2A + \frac{mg\cos\alpha}{k} - l_0 = d$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(d + l_0 - \frac{mg\cos\alpha}{k}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(d + l_0 - \frac{mg\cos\alpha}{k}\right)\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2}\right) + \frac{mg\cos\alpha}{k} - l_0} \quad \star$$

de las ecuaciones de Newton para $\hat{y}$, $\hat{z}$ tenemos:

$$\boxed{\vec{F}_v(t) = \left(mg\operatorname{sen}\alpha + m\Omega^2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\, x(t)\right)\hat{y} - 2m\operatorname{sen}\alpha\,\dot{x}(t)\,\hat{z}}$$

$\hookrightarrow$ con $x(t)$ y $\dot{x}(t)$ según $\star$.