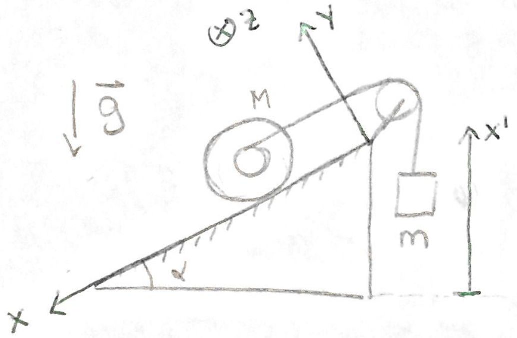
Problema (3)

Datos: $M, R, g, \alpha, I_{cm} = \frac{1}{2} M R^2$



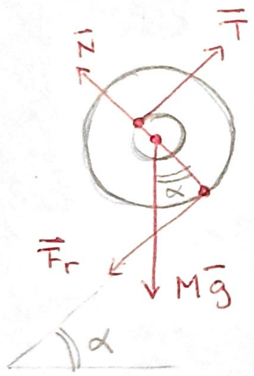
Hay rodadura entre el carrete y el plano inclinado y entre el cilindro interior y la soga

a) Ecuaciones de Newton, torques y vínculos

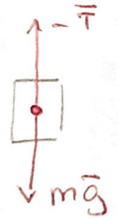
- Diagramas de cuerpo libre y fuerzas

es estático!

$\vec{T} = -T\hat{x}$, $\vec{N} = N\hat{y}$, $\vec{F}_r = F_r\hat{x}$



$\vec{P}_M = Mg(+\sin\alpha\,\hat{x} - \cos\alpha\,\hat{y})$



$-\vec{T} = +T\hat{x}'$

$\vec{P}_m = -mg\hat{x}'$

Ecuaciones de Newton

M) $\hat{x})$ $M\ddot{x}_{cm} = F_r + Mg\sin\alpha - T$ (llamo x_{cm} a la posición del cm del carrete)

$\hat{y})$ $0 = N - Mg\cos\alpha$

m) $\hat{x}')$ $m\ddot{x} = T - mg$ (llamo x a la posición del peso q' cuelga)

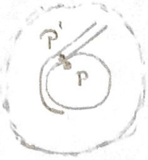
- Vínculos (rodaduras)

carrete con plataforma

$Q \in$ carrete
$Q' \in$ plataforma

$\boxed{\vec{v}_Q = \vec{0}}$

carrete con soga



$\left.\begin{array}{l} P \in \text{carrete} \\ P' \in \text{soga} \end{array}\right\} \vec{v}_P = \vec{v}_{P'}$

además, como la soga es ideal (sin masa e inextensible)

$\boxed{\vec{v}_P = \dot{x}}$ ($\dot{x}$ velocidad de la masa q' cuelga)

- Rigidez

i) $\vec{v}_{cm} = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_{cm} - \vec{r}_Q)$ $\quad \vec{\Omega} = \Omega \hat{z}$

$v_{cm}\hat{x} = \Omega \hat{z} \times R\hat{y} = -R\Omega\hat{x} \Rightarrow v_{cm} = -R\Omega$

derivando respecto a t: $\boxed{\ddot{x}_{cm} = -R\dot{\Omega}}$

(chequear q' los sentidos de giro son consistentes con el desplazamiento del carrete)

ii) $\vec{v}_P = \dot{x}\hat{x} = \vec{v}_Q + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)$

$= \Omega\hat{z} \times (R+r)\hat{y} = -(R+r)\Omega\hat{x} = \dot{x}\hat{x}$

derivando respecto al tiempo: $\boxed{\ddot{x} = -(R+r)\dot{\Omega}}$

- Torques: tanto Q ($\vec{v}_Q = \vec{0}$) como el cm del carrete son buenos centros de momentos

cm) $I_{cm}\dot{\Omega}\hat{z} = r\hat{y} \times (-T\hat{x}) + (-R\hat{y}) \times F_r\hat{x} = rT\hat{z} + RF_r\hat{z}$

$\Rightarrow I_{cm}\dot{\Omega} = \boxed{rT + RF_r = \frac{1}{2}MR^2\dot{\Omega}}$

Q) $I_Q\dot{\Omega} = R\hat{y} \times Mg\sin\alpha\,\hat{x} + (R+r)\hat{y} \times (-T\hat{x})$

$= -RMg\sin\alpha\,\hat{z} + (R+r)T\hat{z}$

usando Steiner $I_Q = \boxed{\frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2}$

Resumen (voy a resolver el problema usando Steiner pero tmb es posible hacerlo usando la ecuación q' involucra el cm)

(1) $M\ddot{x}_{cm} = F_r + Mg\sin\alpha - T$

(2) $m\ddot{x} = T - mg$

(3) $\ddot{x}_{cm} = -R\dot{\Omega}$

(4) $\ddot{x} = -(R+r)\dot{\Omega} = -\frac{3}{2}R\dot{\Omega} = \ddot{x}$

(5) $I_Q\dot{\Omega} = -RMg\sin\alpha + \frac{3}{2}RT = \frac{3}{2}MR^2\dot{\Omega}$

Incógnitas: $\underbrace{\ddot{x}_{cm}, F_r, T, \ddot{x}, \dot{\Omega}}_{5}$ ✓

b) Para obtener $\dot{\Omega}$ podemos reemplazar (4) en (2)

$$\Rightarrow \boxed{-\frac{3}{2}mR\dot{\Omega} = T - mg} \quad (6)$$

luego podemos reescribir (5) como

$$\boxed{-\frac{2}{3}Mg\sin\alpha + T = MR\dot{\Omega}} \quad (7)$$

lo q' hicimos fue multiplicar (5) por $\frac{2}{3}\frac{1}{R}$ a ambos lados de la igualdad

si ahora hacemos (7) − (6) obtenemos

$$MR\dot{\Omega} + \frac{3}{2}mR\dot{\Omega} = -\frac{2}{3}Mg\sin\alpha + mg = \frac{R}{2}(2M+3m)\dot{\Omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\Omega} = -\frac{2}{3}\frac{(2M\sin\alpha - m)}{(2M+3m)}\frac{g}{R}} \quad (8)$$

reemplazando (8) en (3) obtenemos

$$\boxed{\ddot{x}_{cm} = +\frac{2}{3}\frac{(2M\sin\alpha - m)}{(2M+3m)}} \quad (9)$$

c) Para q' el cilindro suba $\ddot{x}_{cm} < 0$ de acuerdo a nuestra elección de ejes $\Rightarrow$ $2M\sin\alpha - m < 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{m > 2M\sin\alpha}$

Notar q' en ese caso $\dot{\Omega} > 0$, lo cual es correcto