Posible resolución del problema de Relatividad

El ejercicio propone dos sistemas que se mueven con velocidad relativa V. Ante el movimiento de una partícula, un observador en cada sistema mide el recorrido realizado y el tiempo empleado en ese movimiento.

- a) Tomemos un sistema de ejes en cada sistema S, S' según la figura 1. Observemos que las ecuaciones pedidas son las que surgen de las *transformaciones de Lorentz*, que relacionan las coordenadas de los dos sistemas de referencia con movimiento relativo. Siendo x, x', t, t' las posiciones y tiempos en los respectivos sistemas, las leyes de transformación resultan:

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(x' + V\,t') \\ t &= \gamma\,(t' + \tfrac{V}{c^2}\,x'). \end{aligned}$$

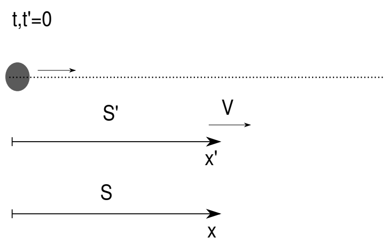

Figura 1: En esta figura se muestran los ejes de referencia de los sistemas S y S', el cual se mueve con velocidad relativa V. En la dirección de ese movimiento, se mueve una partícula. Fijamos los orígenes de manera que sean eventos de la partícula.

Calculemos v'. Para esto sencillamente tomamos el cociente del recorrido L' por el tiempo empleado T':

$$v' = \frac{L'}{T'} \tag{1}$$

Por último, queremos establecer relaciones entre las cantidades en S con las cantidades de S'. Consideremos que el proceso de medición de recorridos y tiempos para cada sistema fue realizado sobre dos eventos fijos comunes, de esta manera el tiempo T, L se relaciona con las coordenadas T', L' del otro sistema mediante las *transformaciones de Lorentz*, por lo que

$$\begin{aligned} L &= \gamma(L' + V\,T') \\ T &= \gamma(T' + \tfrac{V}{c^2}\,L') \end{aligned}$$

Tomando factor común L' en la expresión para T obtenemos

$$T = \gamma\,L'(\frac{T'}{L'} + \frac{V}{c^2}).$$

Recordando (1) y tomando v' denominador común, resulta la relación buscada

$$T = \gamma\frac{L'}{v'}(1 + \frac{V v'}{c^2}). \tag{2}$$

Además, sacando factor común L' en la expresión para L obtenemos

$$L = \gamma\, L'(1 + V\frac{T'}{L'}).$$

Nuevamente recordando (1), observemos que resulta la segunda relación pedida

$$L = \gamma\, L'(1 + \frac{V}{v'}). \tag{3}$$

- b) Para relacionar las velocidades en ambos sistemas basta dividir la ecuaciones (2) con (3) miembro a miembro, obteniendo

  $$\frac{L}{T} = \frac{L'v'}{L'}\frac{1+\frac{V}{v'}}{1+\frac{V\,v'}{c^2}},$$

  por lo que simplificando L' y dado que

  $$v = \frac{L}{T}$$

  es la velocidad medida en el sistema S, resulta

  $$v = v'\,\frac{1+\frac{V}{v'}}{1+\frac{V\,v'}{c^2}}.$$

  Distribuyendo el producto del numerador nos queda

  $$v = \frac{v+v'}{1+\frac{V\,v'}{c^2}} \tag{4}$$

  que es la *ley de adición de velocidades* buscada.

  Con respecto a la partícula siendo un fotón emitido en S', en el mismo sistema se observa con la velocidad de la luz, por lo que

  $$v' = c.$$

  El principio de relatividad dice que así debe verse en cualquier sistema de referencia que se mueva con respecto a este con velocidad constante. Esto implica que para S también debe ser $v = c$. Veamos que utilizando la ley de adición de velocidades (4) resulta semejante conclusión. En efecto, evaluando en el caso $v' = c$ nos queda

  $$v = \frac{c+V}{1+\frac{V}{c}}.$$

  Sacando denominador común c en el denominador y simplificando $c+V$, al reescribir la fracción resulta

  $$v = c.$$

- c) Observemos la diferencia en el orden de magnitud entre la velocidad de la luz (que vale $300000 km/s$) y la velocidad de un tren o un avioncito de papel. Seguramente habría pleno acuerdo si fijamos una cota superior para las velocidades de los móviles en $1 km/s$. De esta manera, el denominador de (4)

  $$1 + \frac{V\,v'}{c^2}$$

  toma valores en el intervalo $[1, 1+10^{-11}]$. Esto quiere decir que el denominador es prácticamente 1, por lo cual vale la ley de adición de velocidades de Galileo

  $$v = V + v'.$$