Momento angular

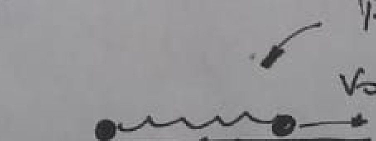
1) Motivación. ¿Por qué necesitamos definirlo?
2) Definición / deducción
3) ¿Qué representa?
4) Conservación
5) Ejemplos
6) $\vec{L}$ desde el C.M.

1) Motivación

$\vec{F}^{ext} = M\ddot{\vec{R}} \Rightarrow$ Mueve como una partícula bajo $\vec{F}^{ext}$

El problema es cómo se mueven las otras masas del sistema alrededor del C.M.

Vimos un ejemplo,



$\vec{R}$ se mueve como M.R.U. $(\sum_i \vec{F}^{ext} = 0)$

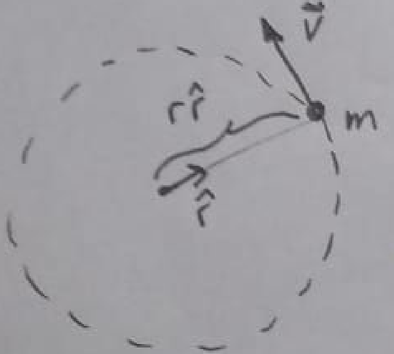
Las masas oscilan alrededor del C.M.

Las partículas se trasladan a lo largo del C.M. y giran al mismo tiempo alrededor de un eje que pasa por el C.M.

(2) Definición

Idea: definir una cantidad que sea análoga al momento lineal, pero para rotaciones: $\vec{L}$, momento angular

Así como el $\vec{p}$ se conserva si $\vec{F}_{ext}=0$, vamos a pedir que $\vec{L}$ se conserve si todas las fuerzas son en la dirección radial, por ej. en un movimiento circular uniforme.



$\vec{p}$ no se conserva en este movimiento!

Pero otras cosas sí se conservan a lo largo del tiempo

→ p (módulo de $\vec{p}$) = cte. ✓

→ r (módulo de $\vec{r}$) = cte

→ El plano de rotación es constante, y lo puedo representar con la normal del plano

Elijo $\hat{z}$ si es antihorario

Elijo $-\hat{z}$ si es horario

Regla de la "mano derecha", arbitrario, pero consistente.

¿Cómo puedo combinar las tres cosas en una única magnitud $\vec{L}$ que se conserve en el tiempo?

Hay muchas opciones,

$\vec{L} = r\,p\,\hat{z}$ → c/u por separado se conserva, luego el producto también

$\vec{L}' = (r+p)\,\hat{z}$

$\vec{L}'' = r^2 p^2\,\hat{z}$, etc.

cualquier función de r, p, $\hat{z}$ es cte. para el mov. circular uniforme

$\vec{L}'$ descartada porque $\neq 0$ si $p = 0$

Idea: así como $\vec{p}$ es una medida de "masa en movimiento",
$\vec{L}$ va a ser una medida de "masa en rotación"
... pero la masa no rota si $p = 0$!

$p=0 \Rightarrow \vec{L}'$ no me sirve.

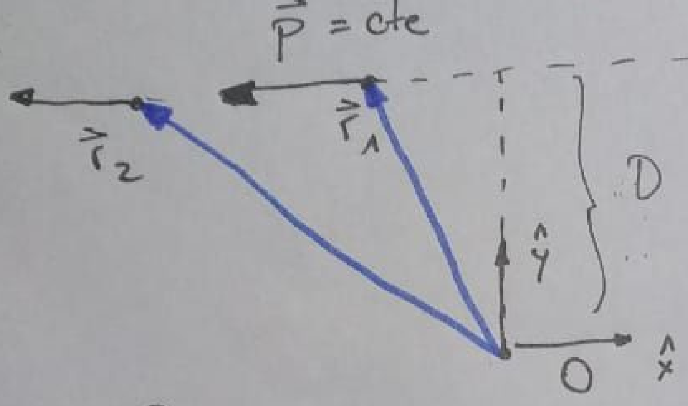
$\vec{L}''$ parece servir pero es más complicada que $\vec{L} = r p \hat{z}$

→ Vamos con $\vec{L}$

$$\vec{L} = \underbrace{r}_{\text{se conserva el radio de giro}} \cdot \underbrace{p}_{\text{se conserva el módulo de la velocidad}} \cdot \underbrace{\hat{z}}_{\text{se conserva el plano de rotación}}$$

¿En qué otro sistema puedo pedir que $\vec{L}$ se conserve?

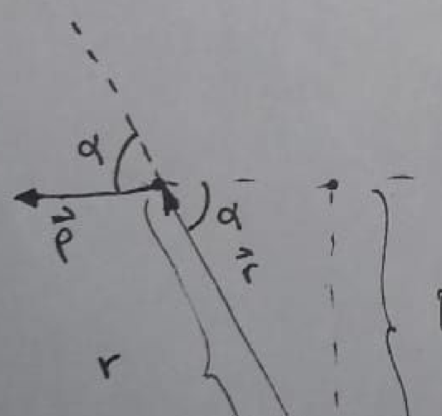
partícula libre
mov. rectilíneo uniforme
$\sum \vec{F}^{ext} = 0 \Rightarrow$ todo debería conservarse



Claramente si
$\vec{L}_1 = r_1 p \hat{z}$ y
$\vec{L}_2 = r_2 p \hat{z}$, $\vec{L}_1 \neq \vec{L}_2$
(porque $r_1 \neq r_2$)

Parece que no se conserva!

Pero lo puedo arreglar cambiando la definición de la siguiente manera



$D = cte = r \operatorname{sen} \alpha$

$\Rightarrow$ $\vec{L} = p r \operatorname{sen} \alpha \, \hat{z}$ es cte!

α es el ángulo entre $\vec{p}$ y $\vec{r}$

$\vec{L}$ cumple que,

① $\vec{L} \perp \vec{r}$
② $\vec{L} \perp \vec{p}$
} porque $\vec{L}$ es paralelo a la normal del plano donde ocurre la rotación

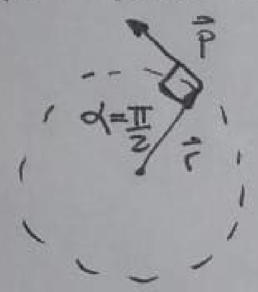
③ $L = \| p r \operatorname{sen}\alpha \, \hat{z} \| = p r \operatorname{sen} \alpha$

módulo

① + ② + ③

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Esta definición funciona también para el mov. circ. uniforme,



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = r p \operatorname{sen}\alpha\, \hat{z}$$

es $\hat{z}$ porque el producto vectorial se computa con la regla de la mano derecha.

$\hat{z} \longrightarrow$ antihorario

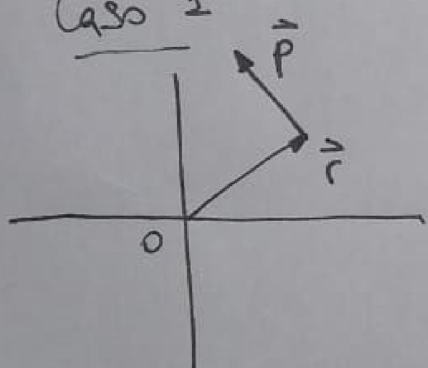
$-\hat{z} \longrightarrow$ horario

$$\left.\begin{aligned} \hat{x} \times \hat{y} &= \hat{z} \\ \hat{y} \times \hat{z} &= \hat{x} \\ \hat{z} \times \hat{x} &= \hat{y} \end{aligned}\right\}$$

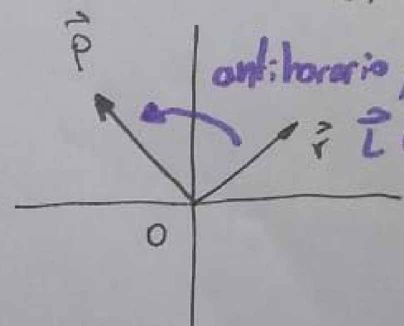
$(y\ \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a})$

3) ¿Qué representa?

Caso 1

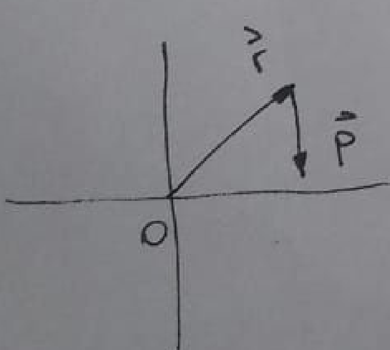


translado al origen

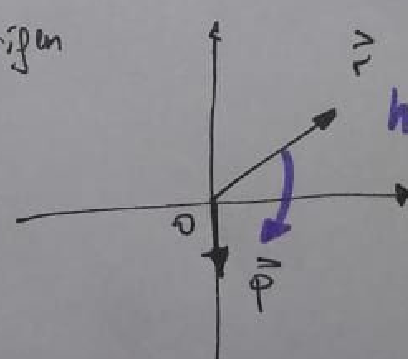


antihorario, $\vec{L}$ en $\hat{z}$ $\odot$

Caso 2

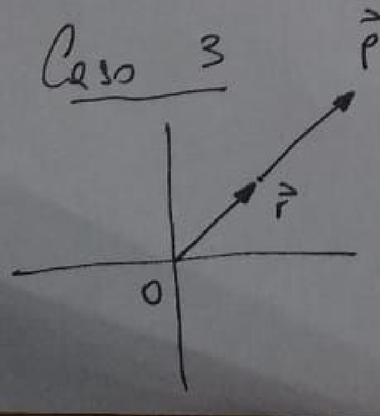


translado al origen

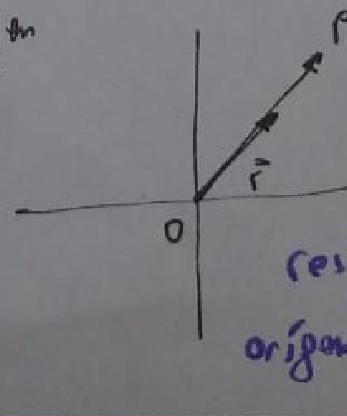


horario, $\vec{L}$ en $-\hat{z}$ $\otimes$

Caso 3



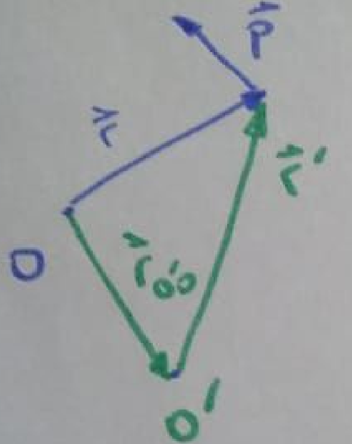
translado al origen



$\vec{L} = 0$ ($\vec{r}$ no rota respecto del origen 0)

OBS. ¡IMPORTANTE

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$



O' en reposo respecto a O

$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{O'O}\,, \quad \vec{p}\,' = \vec{p}$

Entonces,

$\vec{L}\,' = \vec{r}\,' \times \vec{p}\,' = \vec{r}\,' \times \vec{p} = (\vec{r} \times \vec{r}_{O'O}) \times \vec{p}$

$= \underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\vec{L}} - \underbrace{\vec{r}_{O'O} \times \vec{p}}_{\text{en general es } \neq 0}$

($\vec{L}$ = mom. angular en relación a O)

($\vec{L}\,'$ = mom. angular en relación a O')

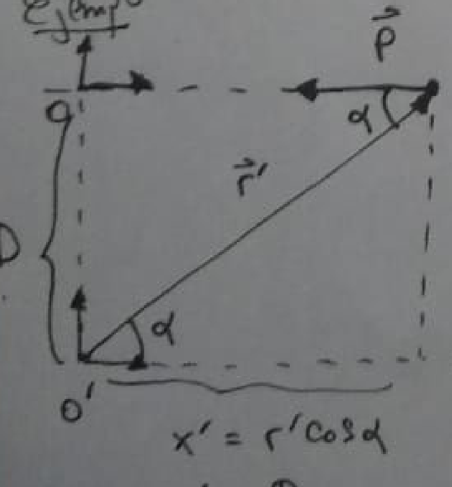
(A veces se escribe también $\vec{L} = \vec{L}_O$, $\vec{L}\,' = \vec{L}_{O'}$)

$\vec{L}\,' \neq \vec{L}$

$\Rightarrow$ ¡El momento angular depende del origen de coordenadas!

(tiene sentido: algunos vectores pueden rotar desde cierto sist. de coordenadas pero no desde otro)

Ejemplo



$x' = r'\cos\alpha$

$y' = D$

$\vec{r}\,' = r'\cos\alpha\,\hat{x} + D\hat{y}$

$\vec{p} = -p\hat{x} = -p\hat{x}'$

$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{x} \times -p\hat{x} = -rp(\hat{x} \times \hat{x}) = 0$

$\vec{L}_{O'} = \vec{r}\,' \times \vec{p}\,' = (r'\cos\alpha\,\hat{x}' + D\hat{y}') \times (-p\,\hat{x}')$

$= -pr'\cos\alpha\,\underbrace{(\hat{x}' \times \hat{x}')}_{=0} - pD\,\underbrace{(\hat{y}' \times \hat{x}')}_{-\hat{z}}$

$\Rightarrow \vec{L}_{O'} = pD\hat{z}$

Desde O

mov. rectilíneo uniforme, no hay rotación

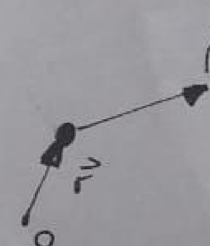
Desde O'

rot. en sentido antihorario ($\vec{L} \parallel \hat{z}$)

el vector rota, aunque no traza una curva cerrada porque además se hace más largo a medida que va rotando, de forma que siempre su extremo cae en la línea recta punteada

4) ¿Cuándo se conserva $\vec{L}$?

Primero el caso de una única partícula,



Calculo $\dot{\vec{L}}$, si es 0, $\vec{L}$ se conserva

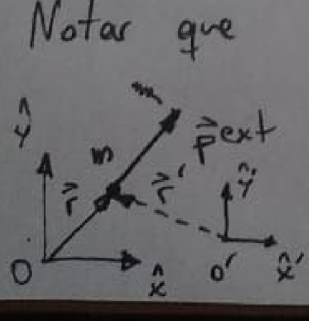
regla producto

$$\dot{\vec{L}} = \underbrace{\dot{\vec{r}}}_{\vec{v}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \underbrace{\dot{\vec{p}}}_{\vec{F}^{ext}\ (2^{da}\ \text{ley})} = \overbrace{\vec{v} \times \vec{p}}^{=0\ (\vec{v} \parallel \vec{p})} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}^{ext}}_{\vec{\tau}\ =\ \text{torque de } \vec{F}^{ext}}$$

$\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}$ ($\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}^{ext}$)

Notar que $\vec{\tau}$ también depende del origen

(de latín "torquere", ... "torcer")



Desde O, $\vec{r} \parallel \vec{F}^{ext}$

$\vec{\tau}_O = 0$

Desde O', $\vec{r}'$ no es $\parallel \vec{F}^{ext}$

$\vec{\tau}_{O'} \neq 0$

Concluimos que para una partícula única,

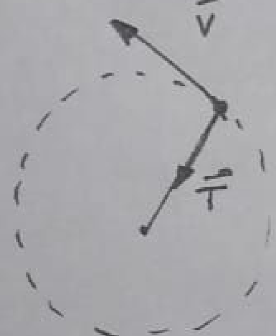
$$\vec{L} = cte \iff \dot{\vec{L}} = 0 \iff \vec{\tau} = 0$$

Notar que

1) $\vec{L} = cte$ significa que el vector $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ es cte (no únicamente su módulo)

2) $\vec{\tau} = 0$ depende del origen

Ejemplo 1:



mov. circ. uniforme

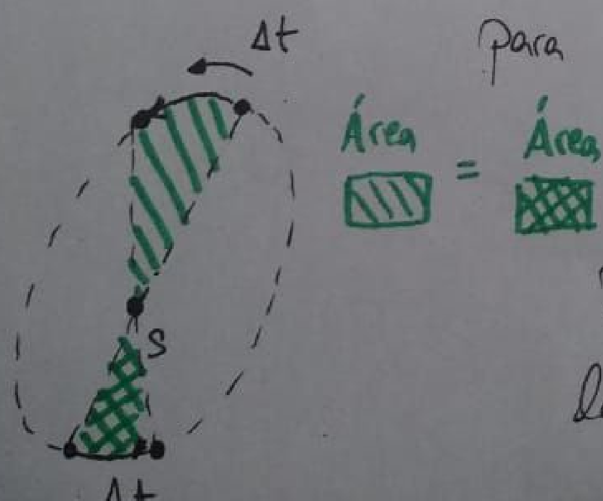
$\vec{r} = r\hat{r}$ $\quad \vec{T} = -T\hat{r}$

$$\vec{\tau} = r\hat{r} \times (-T)\hat{r} = -Tr(\hat{r} \times \hat{r}) = 0$$

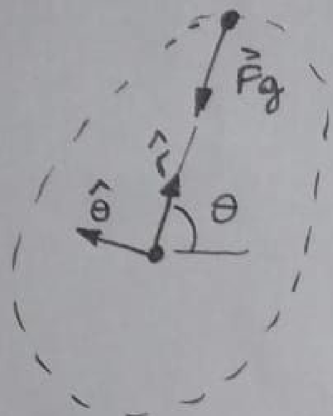
Ejemplo 2 Leyes de kepler (1609)

1era ley de kepler: Planetas se mueven en elipses que tienen al sol en uno de sus focos

2da ley de kepler: Para el mismo Δt, las áreas barridas por $\vec{r}(t)$ son iguales para un dado planeta.



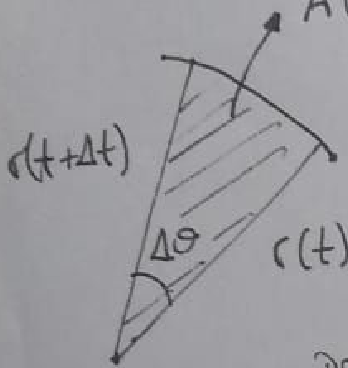
Podemos deducir 2da de la conservación de $\vec{L}$



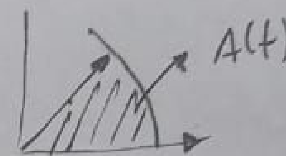
Fuerza central $\vec{F}_g = -F_g\,\hat{r}$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\times\vec{F}_g = 0.$$

$$\Rightarrow \vec{L} = cte.$$



$A(t+\Delta t) - A(t)$ donde $A(t)$ es el área barrida desde $\hat{x}$,

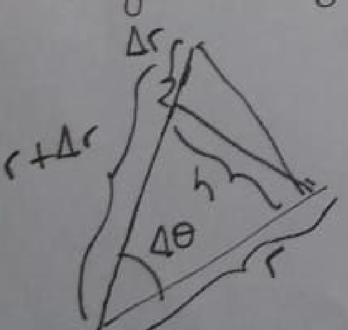


Si demuestro que $\dot{A} = cte$ ya está, porque entonces $A(t) = cte\cdot t$ y para toda Δt

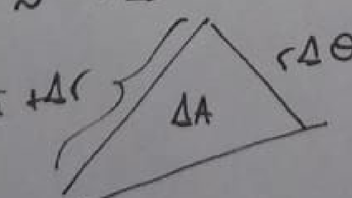
$$A(t+\Delta t) - A(t) = cte\cdot(t+\Delta t) - cte\cdot t = \underbrace{cte\cdot\Delta t}$$

el área barrida es siempre la misma para el mismo Δt

Hagamos trigonometría,



si h es muy pequeño, $h \approx r\Delta\theta$. Entonces calculo el área del triángulo



$$\frac{1}{2}(\text{base} \times \text{altura})$$

$$=$$

$$\Delta A = \frac{1}{2}(r+\Delta r)\,r\Delta\theta$$

Entonces,

$\Delta A = \frac{1}{2}r^2\Delta\theta + \frac{1}{2}r\Delta r\Delta\theta$, haciendo $\dot{A} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}$

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \underbrace{\frac{1}{2}r\frac{\overbrace{\Delta r}^{\propto\Delta t}\,\overbrace{\Delta\theta}^{\Delta t}\}\propto\Delta t^2}{\Delta t}}_{\to 0}$$

se va a cero, porque $\propto \Delta t$

sigue

$$\dot{A} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} \quad (*)$$

Pero en polares, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$, luego

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = r\hat{r} \times (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}) =$$

$$= m r\dot{r} \underbrace{(\hat{r} \times \hat{r})}_{=0} + m r^2 \dot{\theta} \underbrace{(\hat{r} \times \hat{\theta})}_{\hat{z}} = m r^2 \dot{\theta} \hat{z}$$

Entonces, $|\vec{L}| = L = m r^2 \dot{\theta} = \underline{cte}$ $\quad (\vec{\tau} = 0)$

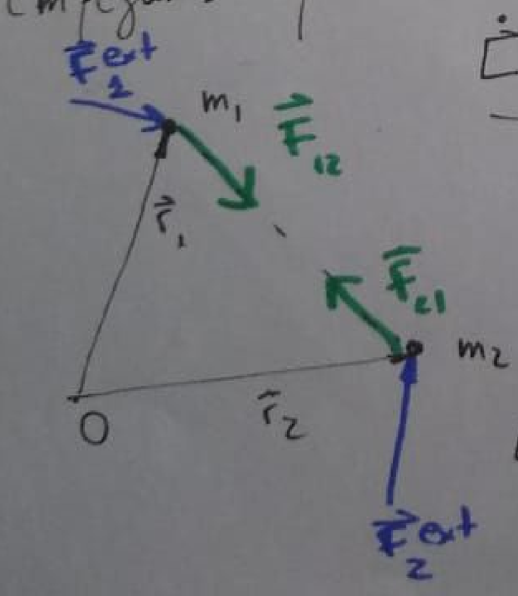
Reemplazando en (*) $r^2\dot{\theta}$ por $\frac{L}{m}$,

$\dot{A} = \frac{L}{2m} = cte \Rightarrow$ Se cumple la 2^{da} ley de Kepler porque L es cte.

Conservación de $\vec{L}$ (sistema de partículas)

Empezamos por 2, $\quad \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{L}}_1 + \dot{\vec{L}}_2 = \vec{r}_1 \times \dot{\vec{p}}_1 + \vec{r}_2 \times \dot{\vec{p}}_2$$



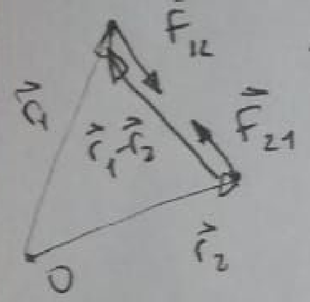
2^{da} ley, $\quad \dot{\vec{p}}_1 = \sum \vec{F}_1 = \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}$

$\dot{\vec{p}}_2 = \sum \vec{F}_2 = \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_{21}$

Pero $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$,

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r}_1 \times (\vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_{12}) + \vec{r}_2 \times (\vec{F}_2^{ext} - \vec{F}_{12})$$

$$= \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}_1^{ext}}_{\vec{\tau}_1} + \underbrace{\vec{r}_2 \times \vec{F}_2^{ext}}_{\vec{\tau}_2} + \underbrace{\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12}}_{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}}$$



Si no solo $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, pero además están en la recta que une las partículas,

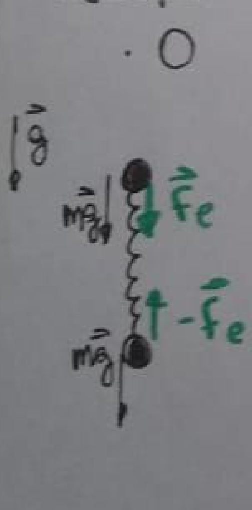
$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 \parallel \vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$

Entonces, $\boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2}$

(La derivada del momento angular total es la suma de los torques por fuerzas externas al sistema sobre 1 + 2.

La conservación de $\vec{L}$ depende del origen de coord.

Ejemplo.



Para O, $\vec{r}_1 \parallel \vec{r}_2 \parallel m\vec{g}$

$\Rightarrow \vec{\tau}_1 = \vec{\tau}_2 = 0. \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

Para O´, $\vec{\tau}_1 \neq 0$, $\vec{\tau}_2 \neq 0$

$\Rightarrow \dot{\vec{L}} \neq 0$

Aunque en ambos casos, $\vec{F}_e$ no contribuye al cambio de $\vec{L}$ (porque está en la recta que une las dos partículas)

$\vec{L}$ se puede escribir como una suma de dos términos,

posición del C.M.

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P}$$

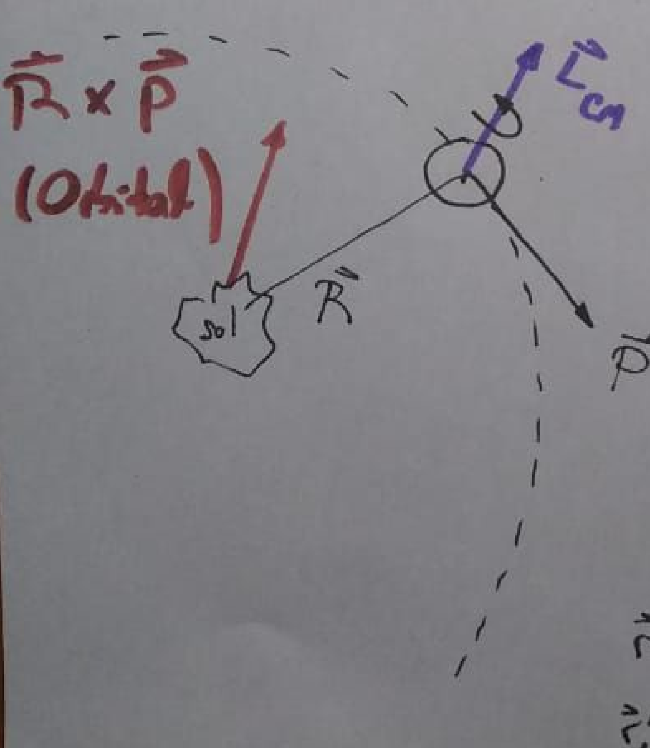
momento lineal del C.M.

momento de las partículas con origen en el CM

→ $\vec{L}$ es la suma de un <u>momento angular intrínseco</u> (medido desde el C.M.) más un momento angular asociado al desplazamiento del C.M.)

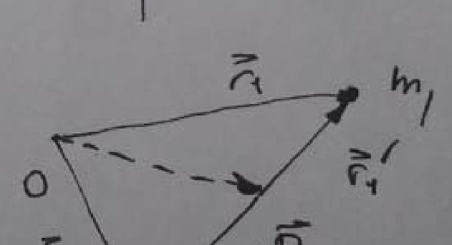
$\vec{L}_{CM}$ también se conoce como <u>ESPÍN</u>

$\vec{R} \times \vec{P}$ también se conoce como momento angular orbital



<u>Demostración</u>

(Hagamoslo para dos partículas únicamente)



$\vec{r}_1, \vec{r}_2$ = pos. desde O

$\vec{r}_1{}', \vec{r}_2{}'$ = pos. desde $\vec{R}$ (centro de masa)

$\vec{r}_1 = \vec{r}_1\,' + \vec{R} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_2\,' + \vec{R}$

Hagamos,

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = (\vec{r}_1\,' + \vec{R}) \times (\vec{p}_1\,' + m_1 \dot{\vec{R}}) + (\vec{r}_2\,' + \vec{R}) \times (\vec{p}_2\,' + m_2 \dot{\vec{R}})$$

$$= \overbrace{(\vec{r}_1\,' \times \vec{p}_1\,')}^{1} + \overbrace{(\vec{r}_1\,' \times m_1 \dot{\vec{R}})}^{3} + \overbrace{(\vec{R} \times \vec{p}_1\,')}^{5} + (\vec{R} \times m_1 \dot{\vec{R}}) +$$

$$+ \overbrace{(\vec{r}_2\,' \times \vec{p}_2\,')}^{2} + \overbrace{(\vec{r}_2\,' \times m_2 \dot{\vec{R}})}^{4} + \overbrace{(\vec{R} \times \vec{p}_2\,')}^{6} + (\vec{R} \times m_2 \dot{\vec{R}}) =$$

$$1 + 2 = \vec{r}_1\,' \times \vec{p}_1\,' + \vec{r}_2\,' \times \vec{p}_2\,' = \vec{L}_{CM}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \underbrace{\overbrace{(m_1 \vec{r}_1\,' + m_2 \vec{r}_2\,') \times \dot{\vec{R}}}^{3+4}}_{=0} + \underbrace{\overbrace{\vec{R} \times (\vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,')}^{5+6}}_{=0} + \vec{R} \times \underbrace{(m_1 + m_2)}_{M} \dot{\vec{R}}$$

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P}}$$

Notar que el movimiento alrededor del C.M. no necesariamente es una rotación alrededor de un eje (aunque sirva visualizarlo así para ganar intuición). Es más, no pedimos aún siquiera que el sistema de partículas sea un cuerpo rígido (i.e. las distancias entre partículas podrían cambiar)