Cinemática (Clase 1)

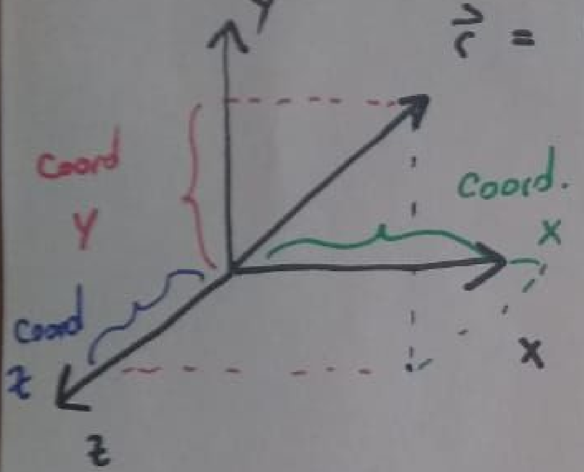
En física 1 vamos a estudiar la mecánica, es decir, vamos a estudiar cómo comprender la causa del movimiento de los cuerpos y cómo predecir su evolución futura.

Para esto, el primer paso es entender cómo describir matemáticamente el movimiento, algo que llamamos **cinemática**.

Por ahora vamos a estudiar la cinemática de un cuerpo puntual. Los cuerpos puntuales ("partículas") son una abstracción, una aproximación que usamos para describir objetos pequeños en relación al error de los instrumentos que usamos para determinar distancias (por ejemplo, un núcleo atómico), o en el caso que las distancias entre cuerpos que interactúan sean muy grandes en relación al tamaño típico de los cuerpos (por ejemplo, planetas en el sistema solar)

El primer paso es definir un punto de referencia ("origen") y un sistema de coordenadas (hay varias posibilidades, empezamos con un sistema cartesiano)

↗ vector posición



$$\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

versores (vectores de longitud 1)

$$\left[\left(\hat{x} = (1,0,0), \; \hat{y} = (0,1,0), \; \hat{z} = (0,0,1) \right) \right.$$

$$\hat{x} \perp \hat{y}, \; \hat{y} \perp \hat{z}, \; \hat{z} \perp \hat{x}$$

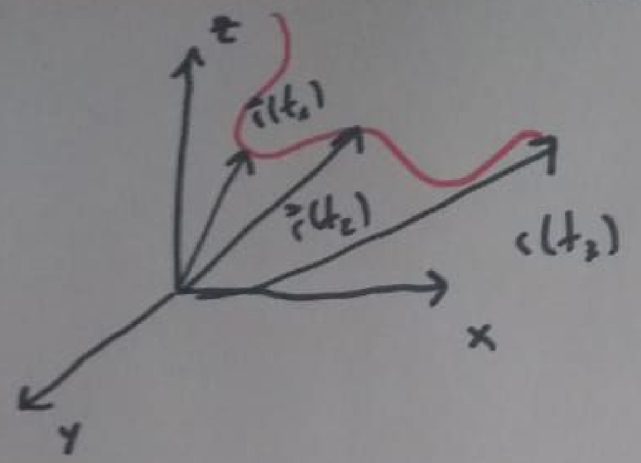
La distancia al origen O se escribe como $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$[r] = m$ (metros) en MKS

NOTACIÓN

(en física 1, $\vec{a}$ es un vector y a es su módulo)

Si un cuerpo se mueve en el tiempo, entonces su posición $\vec{r}$ depende de t, $\vec{r}(t)$. Para un vector, esto significa que sus componentes dependen de t, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$.



$\vec r(t_1), \vec r(t_2), \vec r(t_3)$

la posición en tres instantes cualesquiera

ej, $\vec r(t) = t\hat x + t^2\hat y + \sqrt{t}\,\hat z$

Consideremos primero el caso más sencillo en que $\vec r(t) = x(t)\,\hat x$ (mov. unidimensional)

Sean t_1, t_2 dos tiempos, defino la velocidad media entre t_1, t_2 como $\langle v\rangle = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$

Es un hecho físico que cuando $t_2 \to t_1$, el límite

$$\lim_{t_2 \to t_1} \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

existe (en otras palabras, $x(t)$ es continua y derivable).

Llamamos $v(t)$ al resultado del límite

$[v] = \dfrac{m}{s}$ en MKS

(cuidado que esto no pasaría si hubiésemos definido v como el límite de $\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta t}}$, $\frac{\Delta x}{\Delta t^2}$ u otra combinación.

NOTACIÓN

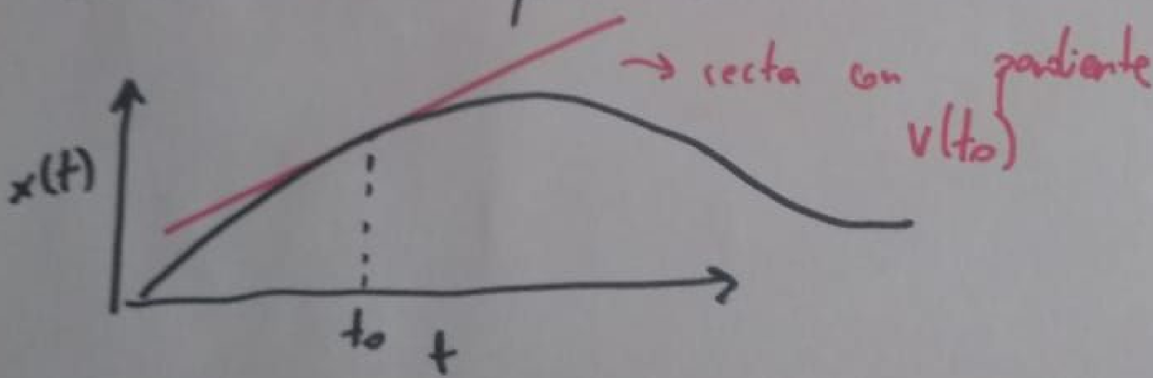
Notación de Newton:

$v(t) = \dot{x}(t)$ ó $v = \dot{x}$ ($\dot{}$ es siempre derivada respecto a tiempo)

Notación de Leibniz:

$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ ó $v = \frac{dx}{dt}$

$v(t)$ es la pendiente de $x(t)$



Así como definimos la velocidad como

$\lim_{\Delta t \to 0} \langle v \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$, podemos introducir la

aceleración media como $\langle a \rangle = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$

También es un hecho experimental que el límite,

$$a(t) = \lim_{t_2 - t_1} \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

existe y se denomina aceleración

$[a] = \frac{m}{s^2}$ en MKS.

La aceleración indica la tasa de cambio instantánea en la velocidad, si: $a(t) = 0$, v no cambia, si: $a(t)$ tiene el mismo signo que $v(t)$, la vel. aumenta, si el signo es opuesto, la vel. disminuye.

Newton: $a = \dot{v} = \ddot{x}$

Leibniz: $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

... ¿Es necesario o útil estudiar la derivada tercera de la posición?

HMMM ...

A veces, pero en general, $\boxed{\text{No}}$ porque,

① Las leyes de Newton ($F = ma$) relacionan la fuerza con la derivada segunda de la posición.

② La aceleración podría no existir (ej., un cuerpo en reposo sobre el cual empieza a actuar una fuerza)

Ejemplo (Alonso-Finn, pág 95).

$x(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$ ← ojo, se omiten las constantes necesarias para que las unidades estén bien

¿Para que t la partícula aumenta $x(t)$ y para que t disminuye? ← buscar signo $v(t)$

$$v(t) = 3t^2 - 6t - 9 = \underbrace{3(t+1)(t-3)}$$

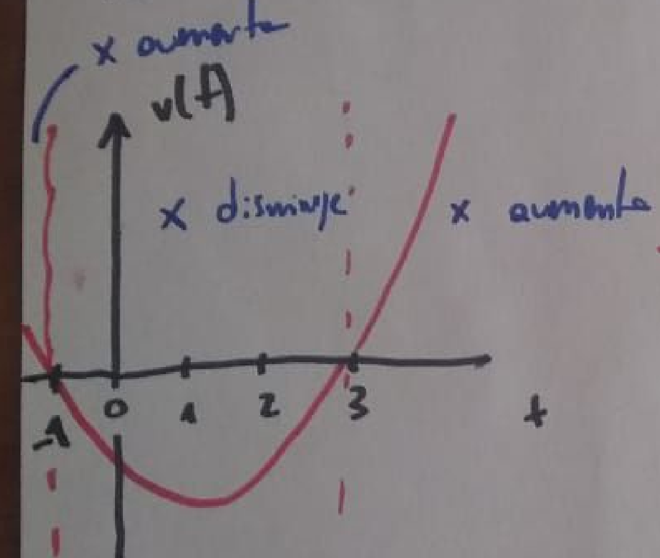
> 0 si $t > -1$

$= 0$ si $t = -1$

$-1 < t < 3 \Rightarrow < 0$

$t = 3 \Rightarrow = 0$

$t > 3 \Rightarrow > 0$



¿Durante que intervalos de tiempo el movimiento es acelerado (signo a = signo v) y retardado (signo a ≠ signo v)?

$$a(t) = 6t - 6 = 6(t-1)$$

$\Rightarrow$ $a > 0$:
- $t > 1,\ \overbrace{t < 3}^{v<0} \Rightarrow$ RETARDADO
- $t > 1,\ \overbrace{t > 3}^{v>0} \Rightarrow$ ACELERADO

$a < 0$:
- $t < 1,\ \overbrace{t > -1}^{v<0} \Rightarrow$ ACELERADO
- $t < 1,\ \overbrace{t < -1}^{v>3} \Rightarrow$ RETARDADO

¿Cómo pasar de $a(t)$ a $v(t)$?
¿Cómo pasar de $v(t)$ a $x(t)$? } INTEGRACIÓN

Sabemos que $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, entonces

$$\int_{\underbrace{t_0}_{\text{tiempo inicial}}}^{t} v(t')\,dt' = \underbrace{\int_{t_0}^{t} \frac{dx}{dt'}\,dt'}_{x(t)-x(t_0)}$$

tiempo inicial típicamente elijo $t_0=0$, aunque no siempre

$x(t) - x(t_0)$ (integral de una derivada)

NOTACIÓN

(Notar que la t' que aparece en la integral no es el tiempo t en el que evalúo el límite de la integral. La variable de integración t' desaparece. Le puedo poner cualquier nombre. En la práctica vamos a usar también t)

$$\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' = x(t) - x(t_0)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \underbrace{x(t_0)}_{\text{cond. inicial}} + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$$

Ej. Si $v(t) = t^2$ y $x(t_0=0) = 5$, calcular $x(t)$

$$x(t) = x(0) + \int_0^t t'^2\,dt' = 5 + \left.\frac{t'^3}{3}\right|_0^t = 5 + \frac{t^3}{3}$$

Idem para obtener $v(t)$ de $a(t)$,

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t')\,dt'$$

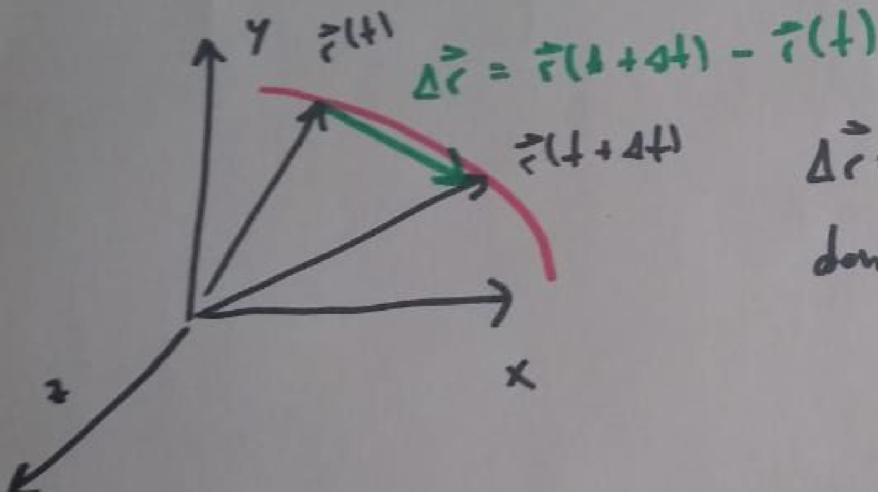
Movimiento en 3D: velocidad y aceleración vectorial

Supongamos que en 3D la posición es

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

Sea Δt un intervalo de tiempo, dibujemos

$\vec{r}(t)$, $\vec{r}(t+\Delta t)$



$$\Delta\vec{r} = \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y} + \Delta z\,\hat{z}$$

donde $\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t)$
$\Delta y = y(t+\Delta t) - y(t)$
$\Delta z = z(t+\Delta t) - z(t)$

A medida que $\Delta t \to 0$, $\Delta\vec{r}$ se vuelve más y más tangente a la trayectoria

Es también un hecho físico que

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \text{existe}$$

y lo llamamos $\vec{v}(t)$. $\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$.

¿Qué quiere decir derivar un vector?

¡NOTACIÓN...

De acuerdo a las operaciones entre vectores, podemos restar componente a componente y meter Δt en cada componente:

$$\vec{v}(t) = \Big(\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}_{v_x}, \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}_{v_y}, \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}}_{v_z} \Big)$$

→ cálculo coordenada a coordenada

otra forma de pensarlo,

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{z}$$

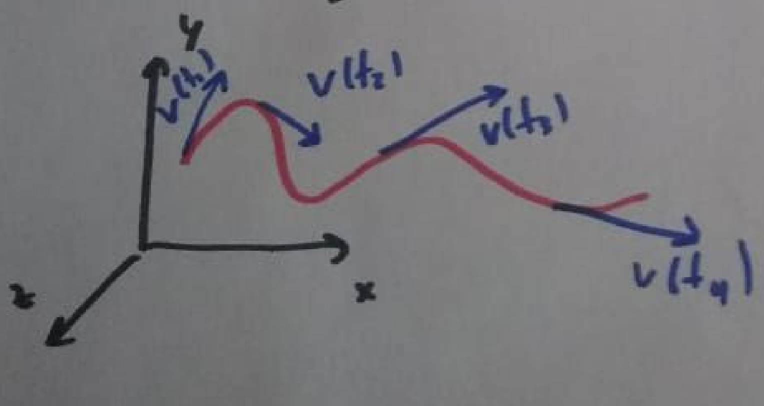
como $\hat{x} = (1,0,0)$, $\hat{y} = (0,1,0)$, $\hat{z} = (0,0,1)$

son constantes (no dependen de t)

puedo distribuir el límite,

$$\vec{v}(t) = \Big(\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}_{v_x}\Big)\hat{x} + \Big(\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}}_{v_y}\Big)\hat{y} + \Big(\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}}_{v_z}\Big)\hat{z}$$

$\vec{v}(t)$ es tangente a la trayectoria en todo t

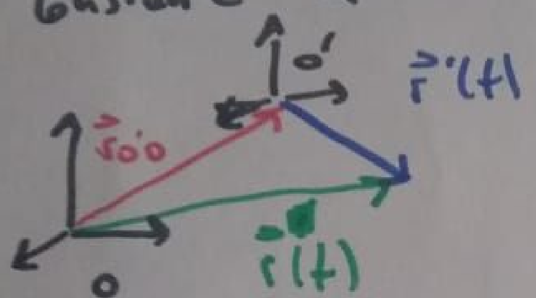


Hay una observación importante:

$\vec{r}(t)$ se determina desde cierto origen O.

Si mido $\vec{r}(t)$ desde un origen distinto O',

$\vec{r}\,'(t)$ cambia: tengo que sumar una constante a los componentes de $\vec{r}(t)$



$\vec{r}_{o'o}$ = vector posición de O' respecto a O

[redacted] $\vec{r}(t) = \vec{r}\,'(t) + \vec{r}_{o'o}$

$\Rightarrow \vec{r}\,'(t) = \vec{r}(t) - \underbrace{\vec{r}_{o'o}}_{\text{vector constante si O' no se mueve respecto a O}}$

Pero la velocidad medida desde O' va a ser la misma que desde O

si O' no se mueve respecto a O,

porque $\vec{v}(t)$ está definida en base a una diferencia de vectores posición

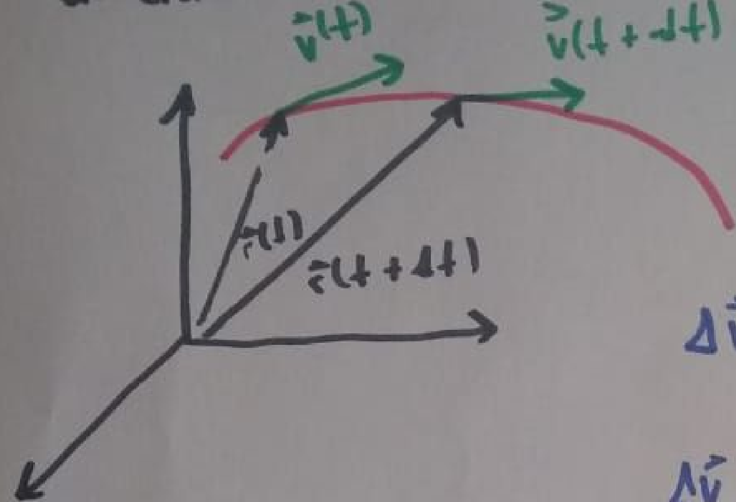
lo cual cancela el vector cte $-\vec{r}_{o'o}$

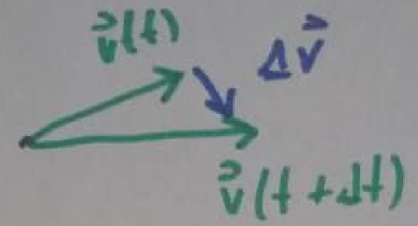
$$\vec{v}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}\,'(t+\Delta t) - \vec{r}\,'(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \cancel{\vec{r}_{o'o}} - \vec{r}(t) + \cancel{\vec{r}_{o'o}}}{\Delta t}$$

$= v(t)$

<u>Obs</u>: Además estoy pidiendo que $\Delta t'$ desde O' sea $= \Delta t$ desde O

Análogamente, veamos que pasa con la aceleración





$\Delta\vec{v}$ apunta hacia el interior de la concavidad

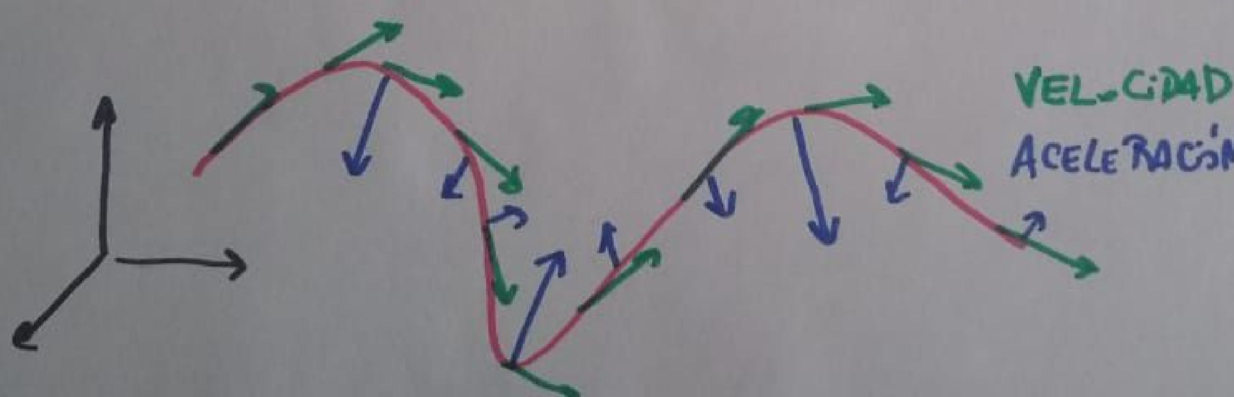
$\Delta\vec{v}$ no es necesariamente $\parallel$ $\vec{v}$: puede cambiar su dirección incluso si su sentido permanece igual.

Definimos,

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

Es decir,

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\right)}_{a_x}\hat{x} + \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\right)}_{a_y}\hat{y} + \underbrace{\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right)}_{a_z}\hat{z}$$



Integramos para encontrar $\vec{r}(t)$ desde $\vec{v}(t)$,

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(t_0)}_{\text{vector condiciones iniciales}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt}_{\text{integral comp. a comp.}}$$

vector condiciones iniciales

$\vec{r}(t_0) = x(t_0)\hat{x} + y(t_0)\hat{y} + z(t_0)\hat{z}$

integral comp. a comp.

$$= \left(\int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt\right)\hat{x} + \left(\int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt\right)\hat{y} + \left(\int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt\right)\hat{z}$$

Integramos para encontrar $\vec{v}(t)$ desde $\vec{a}(t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

Entonces, si podemos encontrar $\vec{a}(t)$ usando la 2da ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$, podemos integrar dos veces para tener $\vec{r}(t)$.

Ejemplo: movimiento bajo aceleración constante

$\vec{a} = cte$ (no depende de t)

$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}\,dt = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} [\vec{v}(t_0) + \vec{a}(t-t_0)]\,dt =$$

$$= \vec r(t_0) + \vec v(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}\vec a(t-t_0)^2 \quad (*)$$

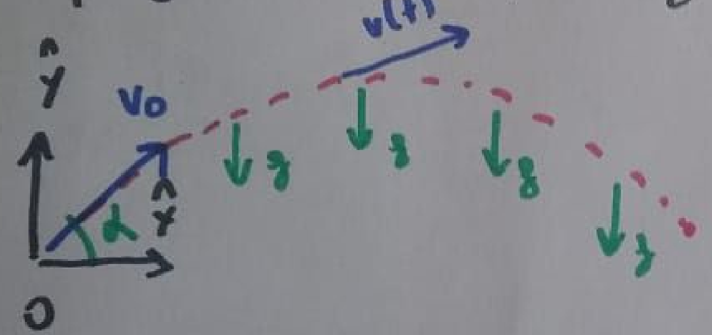
Hay una diferencia importante con el caso 1D (mov. rec. unif. acelerado):

$\vec v(t_0)$ no es necesariamente $/\!/$ $\vec a$

$\Rightarrow$ La $\vec a$ cte no sólo cambia la magnitud de $\vec v(t)$ sino también su sentido.

Supongamos sin perder generalidad que $\vec a = -g\,\hat y$

($g = 9.8\ m/s^2$)



$\rightarrow$ tiro oblicuo

$t_0 = 0$

$\vec r(0) = (0,0)$.

$\vec v(t_0) = v_0 \cos\alpha\,\hat x + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\hat y$

Entonces, usando $(*)$ tenemos,

$$\vec r(t) = (v_0\cos\alpha\, t)\,\hat x + \left(v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{g}{2}t^2\right)\hat y$$

El alcance viene de buscar t_f / $y(t_f) = 0$

$$\left(v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{g t_f}{2}\right) t_f = 0 \Rightarrow t_f = \frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

Reemplazo en $x(t)$,

$$x(t_f) = \frac{v_0 \cos\alpha \, 2 v_0 \,\text{sen}\,\alpha}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\alpha \,\text{sen}\,\alpha}{g} = x'_{max}$$

¿Alcance máximo?

$$\frac{d x_{máx}}{d\alpha} = 0 = \frac{2 v_0^2}{g} \underbrace{(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha)}_{\alpha = \frac{\pi}{4} \ (45^\circ)}$$

¿Forma de la trayectoria?

$$v_0 \cos\alpha \, t = x \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = \frac{\cancel{v_0} \,\text{sen}\,\alpha \, x}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = \underbrace{tg\,\alpha \, x - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} x}_{\text{Parábola}}$$

$\boxed{\text{Aproximaciones}}$

① $g = cte$

② Tierra plana 

③ Resistencia del aire nula

④ Rotación de la Tierra despreciable.