Cinemática (Clase 2)

Repasamos:

Describimos la posición de una masa puntual como un vector que depende del tiempo:

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\hat{x} + y(t)\hat{y} + z(t)\hat{z}$$

La velocidad $v(t)$ se obtiene como, $\quad (\dot{\hat{x}} = \dot{\hat{y}} = \dot{\hat{z}} = 0)$

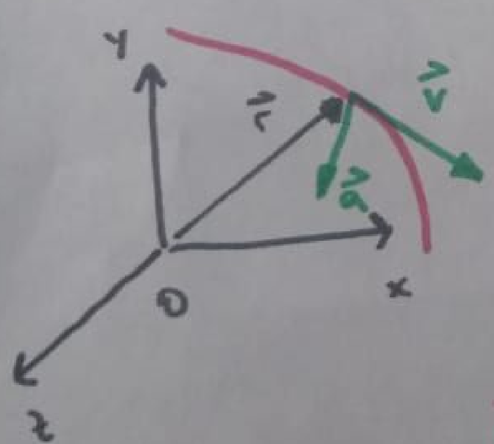
$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}} = \dot{x}(t)\hat{x} + \dot{y}(t)\hat{y} + \dot{z}(t)\hat{z}$$

La aceleración $a(t)$ se obtiene como,

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{x}(t)\hat{x} + \ddot{y}(t)\hat{y} + \ddot{z}(t)\hat{z}$$

La $\vec{v}$ es siempre tangente a la trayectoria

La $\vec{a}$ apunta siempre en la dirección de concavidad



En 1D, $\vec{a} \parallel \vec{v}$

⇒ Mov. acelerado ó Mov. retardado

En 3D, $\vec{a}$ no es $\parallel$ $\vec{v}$ en general

⇒ $\vec{a}$ cambia el módulo de $\vec{v}$ pero también su dirección

Si tenemos $\vec{v}(t)$ entonces,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)\,dt$$

La integral de un vector se resuelve componente a componente

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_x(t)\,dt$$

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_y(t)\,dt$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} v_z(t)\,dt$$

Análogamente, obtenemos $\vec{v}(t)$ partiendo de $\vec{a}(t)$

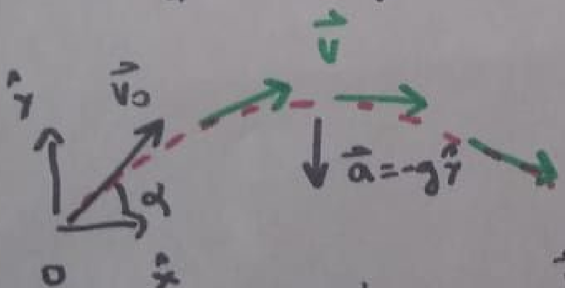
$$\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

<u>Ejemplo</u>: movimiento con $\vec{a} = cte.$ Sin pérdida de generalidad asumo $\vec{a} = -g\hat{y}$ (aceleración de gravedad $\simeq 9.8\,\frac{m}{s^2}$)

$$\vec{v}(t) = \underbrace{\vec{v}(0)}_{\vec{v}_0} + \int_{0}^{t} (-g\hat{y})\,dt = \vec{v}_0 - gt\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{\vec{r}(0)}_{\vec{r}_0} + \int_{0}^{t} (\vec{v}_0 - gt\hat{y})\,dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\hat{y}$$

Notar que $\vec{v}_0$ puede no ser paralela a $\vec{a}$



$$\vec{r}_0 = (0,0)$$

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos\alpha\,\hat{x} + v_0 \operatorname{sen}\alpha\,\hat{y}$$

Entonces,

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos\alpha\,\hat{x} + (v_0 \operatorname{sen}\alpha - gt)\,\hat{y}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0 \cos\alpha\, t)\,\hat{x} + \left(v_0 \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}\right)\hat{y}$$

Ejemplo: ¿Cuánto vale el alcance del proyectil?

- ¿Cuándo está en el piso? $y(t) = 0$

$$\Leftrightarrow \left(v_0 \operatorname{sen}\alpha - \frac{g}{2}t\right)t = 0$$

$t = 0$ (Punto de partida)

$t = \dfrac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}$ (Punto de llegada)

- ¿Donde en x cuando vuelve al piso?

$$x\left(\frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = v_0 \cos\alpha \left(\frac{2 v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\right) = \underbrace{\frac{2 v_0^2 \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}{g}}_{\text{ALCANCE } x_{max}}$$

¿Para qué angulo α el alcance es máximo?

$$\frac{dx_{max}}{d\alpha} = 0 \qquad \frac{2v_0^2}{g}\big[\underbrace{\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}_{\cos^2\alpha = \operatorname{sen}^2\alpha}\big] = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \quad (45°)$$

- ¿Cuál es la ecuación de la trayectoria?

$$x = v_0 \cos\alpha \, t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$y = v_0 \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right) - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 = \overbrace{\operatorname{tg}\alpha \, x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}}^{\text{Ec. de parábola}}$$

Aproximaciones

① $g = cte$

② Tierra plana (en realidad la trayectoria es un fragmento de elipse)

③ Resistencia al aire nula

④ Despreciamos los efectos de la rotación terrestre

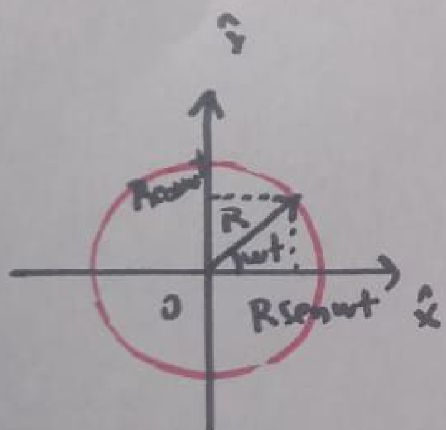
Movimiento circular

Consideremos un movimiento 2D dado por

$$\vec{r}(t) = R\cos\omega t\,\hat{x} + R\,\text{sen}\,\omega t\,\hat{y}$$

Claramente, $\sqrt{x^2+y^2} = R$ (mov. circular radio R)

$$r = \sqrt{R^2\cos^2\omega t + R^2\text{sen}^2\omega t} = R\overbrace{\sqrt{\cos^2\omega t + \text{sen}^2\omega t}}^{=1}$$



El movimiento ocurre siempre a distancia R del origen

$$\vec{r}(t + \underbrace{\tfrac{2\pi}{\omega}}_{T\,=\,\text{período}}) = \vec{r}(t)$$

Pues, $$\vec{r}\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = R\cos\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]\hat{x} + R\,\text{sen}\left[\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right]\hat{y}$$

$$= R\cos(\omega t + 2\pi)\,\hat{x} + R\,\text{sen}(\omega t + 2\pi)\,\hat{y}$$

$$= R\cos(\omega t)\,\hat{x} + R\,\text{sen}(\omega t)\,\hat{y} = \vec{r}(t)$$

Pregunta : ¿ mov. horario o antihorario ?

Anti-Horario (ir graficando puntos y verificar)

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -R\omega \, \mathrm{sen}\, \omega t \, \hat{x} + R\omega \cos \omega t \, \hat{y}$

$\vec{v} \perp \vec{r}$ pues $\langle \vec{v}, \vec{r} \rangle = 0$ (Verificar!)

Además, aunque $\vec{v}$ cambia (su dirección es siempre // trayectoria)

su módulo $v = cte = R\omega$

Puedo calcular $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = -R\omega^2 \cos \omega t \, \hat{x} - R\omega^2 \, \mathrm{sen}\, \omega t \, \hat{y}$

$$= -\omega^2 \underbrace{[R\cos \omega t \, \hat{x} + R \, \mathrm{sen}\, \omega t \, \hat{y}]}_{\vec{r}(t)}$$

Luego, $\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t)$

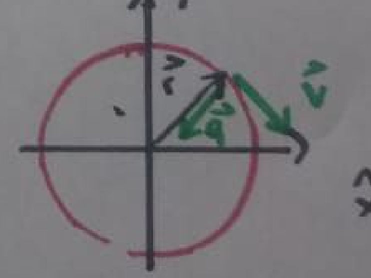
La aceleración apunta radialmente hacia dentro y únicamente cambia [redacted] la dirección de $\vec{v}(t)$.

Llamamos aceleración centrípeta

Notemos que $a = \omega^2 R$ (pues $r(t) = R$)

Pero $v = R\omega$, luego

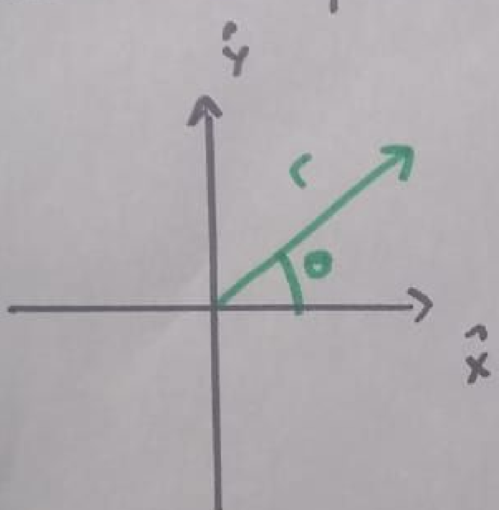
$$a = \frac{v^2}{R}$$



Coordenadas polares

No siempre las coordenadas Cartesianas son la mejor opción para describir el movimiento.

Para movimientos con simetría circular alrededor del origen es mejor describir el movimiento en coordenadas polares:



En vez de especificar x, y especificamos r, θ

Luego, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

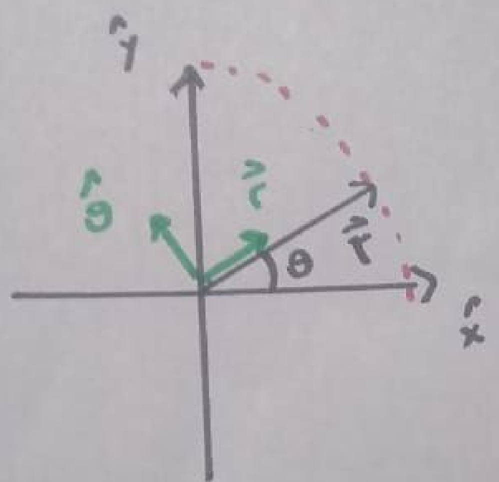
Por ejemplo, para un movimiento circular

Cartesianas	Polares
$x(t) = R\cos \omega t$	$r(t) = R$
$y(t) = R \,\mathrm{sen}\, \omega t$	$\theta(t) = \omega t$

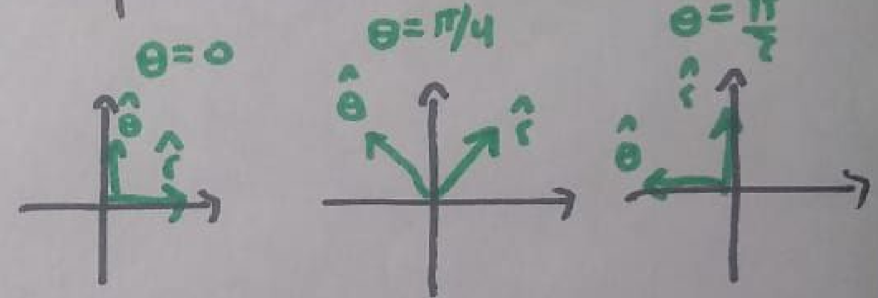
En general cuando tengamos un movimiento de rotación alrededor de 0 con $\theta(t) = \omega t$ conviendrá usar polares

En Cartesianas, $\hat{x}, \hat{y}$ versores que apuntan en la dirección en que x, y aumentan (Constantes)

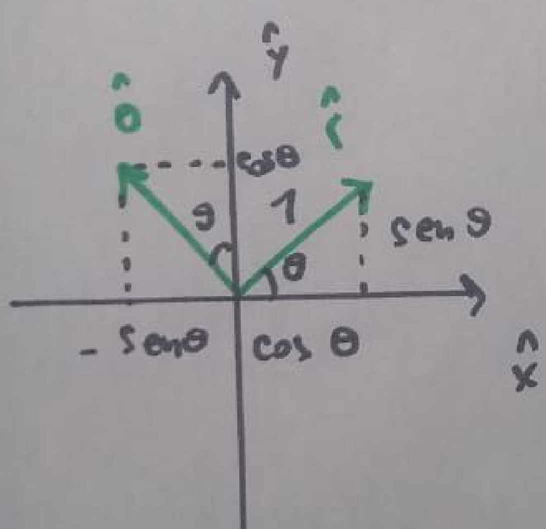
En polares introducimos $\hat{r}, \hat{\theta}$ que apuntan en la dirección en que r, θ aumenta (No son Constantes)



Notamos que $\hat{r}, \hat{\theta}$ apuntan en diferentes direcciones dependiendo del valor de θ



¿Cómo es la expresión general?



$\hat{r} = \cos\theta \, \hat{x} + \operatorname{sen}\theta \, \hat{y}$

$\hat{\theta} = -\operatorname{sen}\theta \, \hat{x} + \cos\theta \, \hat{y}$

Parece que no dependen de t pero sí lo hacen, dado que $\theta = \theta(t)$

Podemos calcular la derivada respecto de t de $\hat{r}(\theta), \hat{\theta}(\theta)$ aplicando la regla de la cadena

$$\dot{\hat{r}} \left\{ \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\hat{r}}{d\theta} \overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\dot{\theta}} \right. \quad y \quad \dot{\hat{\theta}} \left\{ \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} \overbrace{\frac{d\theta}{dt}}^{\dot{\theta}} \right.$$

Entonces,

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = -\operatorname{sen}\theta\,\dot\theta\,\hat{x} + \cos\theta\,\dot\theta\,\hat{y} = \dot\theta\,\hat\theta$$

$$\frac{d\hat\theta}{dt} = -\cos\theta\,\dot\theta\,\hat{x} - \operatorname{sen}\theta\,\dot\theta\,\hat{y} = -\dot\theta\,\hat{r}$$

En coordenadas polares, $\vec{r}(t) = r\hat{r}$, luego,

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$ (Regla del producto)

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot\theta\hat\theta}$$ ⇒ Velocidad en polares

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot\theta\hat\theta + r\frac{d(\dot\theta\hat\theta)}{dt}$$

$$\frac{d(\dot\theta\hat\theta)}{dt} = \ddot\theta\hat\theta + \dot\theta\dot{\hat\theta}.$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot\theta\hat\theta + r\ddot\theta\hat\theta + r\dot\theta\dot{\hat\theta}$$

$$a(t) = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot\theta\hat\theta + \dot{r}\dot\theta\hat\theta + r\ddot\theta\hat\theta - r\dot\theta^2\hat{r}$$

$$\boxed{a(t) = (\ddot{r} - r\dot\theta^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot\theta + r\ddot\theta)\hat\theta}$$ ⇒ Aceleración en polares

Si bien las ecuaciones parecen más complicadas que en Cartesianas, hay casos en los que escribir $\vec{r}(t)$ en polares es fácil y por eso conviene usarlas.

Por ejemplo, en el caso del movimiento circular,

$$\vec{r}(t) = \underbrace{R}_{r(t)}\hat{r} + \underbrace{\omega t}_{\theta(t)}\hat{\theta} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \dot{\theta} = \omega$$

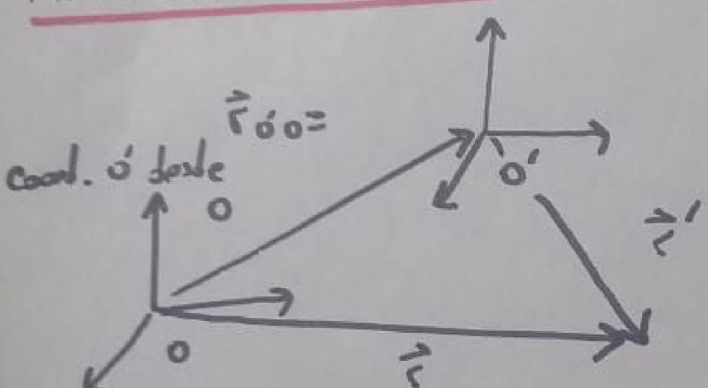
$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \qquad \ddot{r} = 0 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$\Rightarrow \quad v(t) = R\omega\hat{\theta}$ → tangencial a la trayectoria

$\vec{a}(t) = -R\omega^2\hat{r}$ → radial hacia dentro (centrípeta)

Movimiento relativo

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{o'o}$$



$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{o'o}$$

Si o' está en movimiento respecto a o con $\vec{v}_{o'o}$,

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{o'o}$$

Además, si o' está acelerado respecto a o con aceleración $\vec{a}_{o'o}$ entonces

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{o'o}$$

Estas transformaciones son importantes para entender en qué sistemas de referencia valen las leyes de Newton (más adelante)

Una última observación:

(Alonso-Finn, página 91)

Supongamos mov. 1D y conocemos $a(x)$ en vez $a(t)$
(como veremos más adelante, esta situación es bastante frecuente)

¿Cómo podemos obtener $v(x)$?

$$v = \frac{dx}{dt} \quad y \quad a = \frac{dv}{dt}$$

$$v \frac{dv}{dt} = a \frac{dx}{dt}$$, paso dt multiplicando

$$v\, dv = a\, dt \left(\frac{dx}{dt}\right) = a\, dx$$ (cancelo dt)

Integro respecto de las variables en los diferenciales de ambos lados,

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = \int_{x_0}^{x} a\, dx$$ pero la del lado izq. es $\frac{v^2}{2}$

$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\, dx$$

¿Qué es eso de pasar diferenciales multiplicando y dividiendo?

No es algo riguroso, pero es algo que los [redacted]

físicos hacen mucho.

Los físicos no piensan a dt como un diferencial infinitesimal, sino como un Δt muy chiquito

Uno puede pasar Δt multiplicando, dividiendo, o cancelarlos sin problema.

Luego uno llega al resultado que quiere y asume que hace $\Delta t \to 0$. Todo esto está implícito cuando se hacen operaciones con diferenciales.

Si Δt muy chico (pero finito)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad a \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v \Delta v = a \Delta x$$

sumas de Riemann

$$\sum_i v_i \Delta v = \sum_i a_i \Delta x$$

$$\Delta v, \Delta x \to 0 \qquad \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

Igual, uno puede pensar un poco y hacerlo de forma más elegante y rigurosa ...

$a = \frac{dv}{dt}$ por regla de la cadena, $a = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}$

Pero $\frac{dx}{dt} = v$, entonces $a = \frac{dv}{dx} v$

Ahora integro de ambos lados entre x_0, x

$$\int_{x_0}^{x} a \, dx = \int_{x_0}^{x} \frac{dv}{dx} v \, dx$$

Pero $v\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{dx} \Rightarrow$

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} \frac{d(v^2)}{dx} dx = \boxed{\frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a \, dx}$$