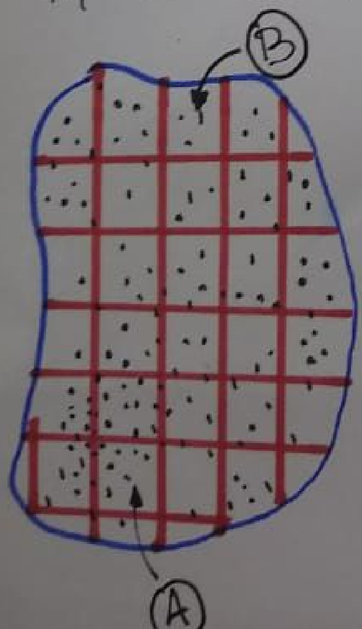
Cinemática del cuerpo rígido

(o "cómo se mueven los objetos que no se comprimen ni estiran")

Hasta ahora en la materia tratamos únicamente con el movimiento de puntos. Pero todos sabemos que los objetos reales no son puntos en el espacio. Por lo tanto, vamos a estudiar como describir el movimiento de objetos reales.

Cuando describíamos el movimiento de puntos, decíamos tener una masa m en un punto $\vec{r}$. Pero la masa de un cuerpo extenso no está ubicada en un punto. Ese es el primer problema que tenemos que resolver.

Supongamos que un cuerpo extenso en realidad es el agregado de muchos cuerpitos puntuales (sabiendo lo que sabemos hoy de teoría atómica, no es un mal punto de partida):



El cuerpo extenso es el conjunto de puntos dentro del **contorno azul**.

Vamos a dividir al cuerpo en cuadraditos determinados por la **grilla roja**.

En realidad, supongamos que el dibujo es 3D, y cada cuadradito en realidad es un cubo de volumen δV.

La masa dentro de cada cubo viene dada por la suma de todas las partículitas dentro del cubo.
Si (x,y,z) es donde está el centro del cubo, voy a escribir a esa masa como $\delta M(x,y,z)$.
Notamos que la masa depende del cubito. Por ejemplo, el cubito Ⓐ tiene más cantidad de partículitas que el cubito Ⓑ, por lo que si las partículitas tienen la misma masa, la masa dentro de Ⓐ será mayor que en Ⓑ.

Si la cantidad de puntitos es más o menos uniforme, esperamos que a mayor δV, mayor cantidad de puntitos en el cubo, y por lo tanto, mayor δM.

Resulta ser que para los cuerpos macroscópicos con los que interactuamos todos los días, siempre y cuando el δV no sea muy chico, la relación es lineal,

Densidad $\left\{ \rho(x,y,z) \cdot \delta V = \delta M(x,y,z) \right.$

Si el δV es muy pequeño, puede haber problemas con esta definición, porque empieza a haber cajitas vacías o con muy pocas partículitas, y entonces la masa (y por lo tanto, la densidad) puede pegar saltos muy grandes entre dos puntos muy próximos del espacio.

Pero tampoco quiero tomar δV muy grande, porque entonces pierdo "resolución": solo puedo saber cuanto vale la densidad en un cubo de volumen δV, pero no en un volumen más chico.

La solución es pensar a δV como muy chico, pero no tan chico en relación a la distancia intermolecular.

Eso es fácil si imaginamos que vivimos en la época de Newton, porque no sabemos qué es una molécula, y las distancias que podemos imaginar son todas mayores que las distancias entre moléculas. Podemos entonces definir,

$$\rho(x,y,z) = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta M(x,y,z)}{\delta V}$$

donde se sobreentiende que el límite pierde validez física si δV es muy muy muy pequeño.

(Alternativamente, podemos ignorar todo lo que sabemos sobre átomos y moléculas y suponer - como lo habrían hecho Newton y otros físicos de su época - que la materia puede ser subdividida infinitamente sin problemas, y que el límite es un límite matemático de verdad).

No hará ninguna diferencia, lo que nos lleva a preguntarnos por qué gastamos tanto tiempo discutiendo sobre esto)

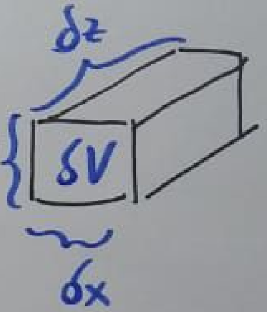
Si tenemos $\rho(x,y,z)$ definido para cajitas de tamaño δV con centros en (x,y,z), entonces la masa total es,

$$M = \sum_{\substack{\text{todas} \\ \text{las cajitas}}} \rho(x,y,z)\,\delta V$$

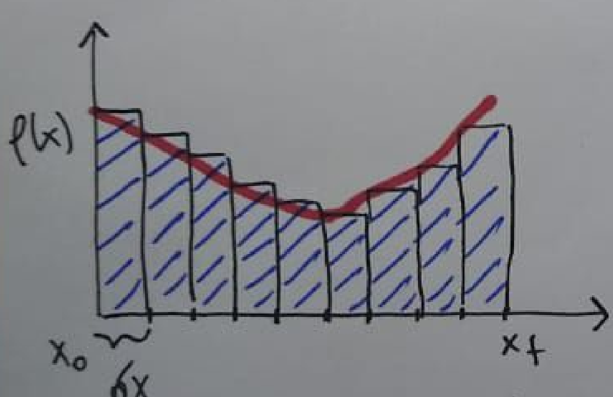
, o lo que es lo mismo:

$$M = \sum_x \sum_y \sum_z \rho(x,y,z) \underbrace{\delta x\, \delta y\, \delta z}_{\delta V}$$

pues



Si esto fuese una función de una sola variable, yo sé que estoy en una situación de este estilo,



donde $\sum_x \rho(x)\delta x$ es el área de los rectangulitos, y cuando $\delta x \to 0$ entoces se aproxima al área bajo la curva, es decir

$$M = \sum_x \rho(x)\delta x \longrightarrow \int_{x_0}^{x_f} \rho(x)\,dx$$

Como $\rho(x,y,z)$ depende de x,y,z, yo estoy sumando el volúmen (no el área) de muchos cubitos, y termina pasando que

$$M = \sum_x \sum_y \sum_z \rho(x,y,z)\delta x \delta y \delta z \longrightarrow \iiint_{V} \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

V = volumen definido por el cuerpo

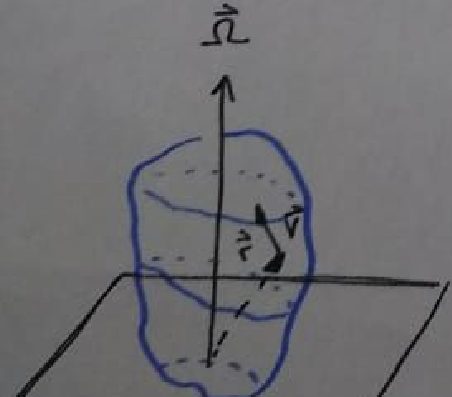
Este último objeto se llama "integral triple" o "integral de volumen", se entiende como "sumemos el volumen de muchos cuadraditos multiplicados en cada punto por $\rho(x,y,z)$".

Van a ver una definición formal y cómo se calcula en Matemática 3.

Vamos a considerar el caso de cuerpos rígidos, aquellos para los cuales la distancia entre dos puntos cualesquiera se mantiene constante en el tiempo.

La densidad $\rho(x,y,z)$ de un cuerpo rígido no puede cambiar en el tiempo, porque la distancia entre las partículitas que lo componen no puede cambiar (como ocurriría con, por ej. un gas).

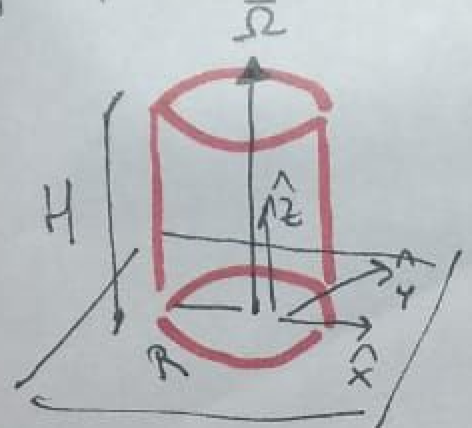
Consideremos primero el caso en el cual el cuerpo rota sobre un eje:



si tomo un punto con coordenadas $\vec{r} = \vec{r}(x,y,z)$, entonces su velocidad es

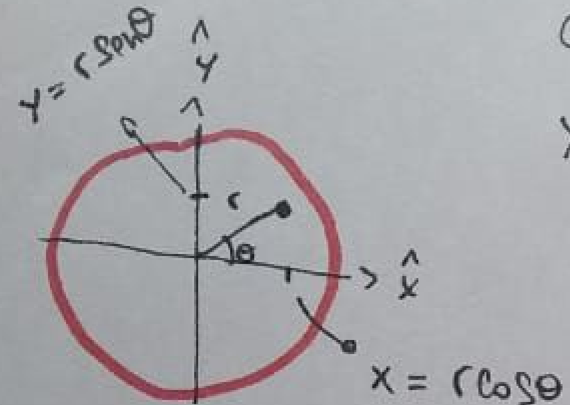
$$\underbrace{\vec{v}(x,y,z)}_{\text{en cada punto del espacio tengo una velocidad dada por esta expresión.}} = \vec{\Omega} \times \vec{r}(x,y,z)$$

Ejemplo: cilindro de radio R:



¿cuanto vale $\vec v$ en cada punto del cilindro?

Para definir un punto del cilindro, primero me ubico en la base, y luego me levanto una altura z,



$$\vec r = r\cos\theta\,\hat x + r\,\text{sen}\theta\,\hat y + z\,\hat z$$

$$(0 \leq z \leq H,\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta < 2\pi)$$

Calculo la velocidad de un punto del cilindro como,

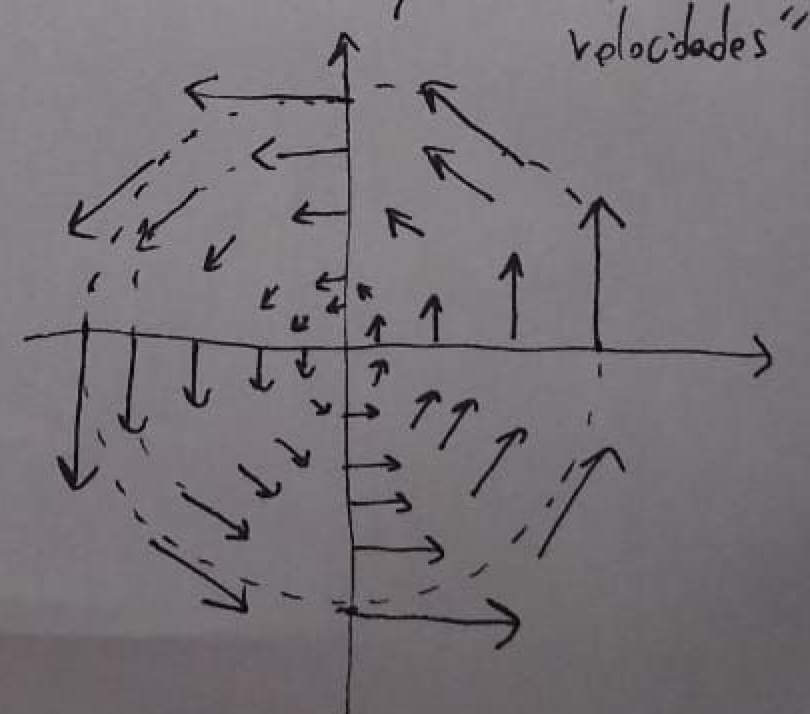
$$\vec v = \vec\Omega \times \vec r = \Omega\hat z \times (r\cos\theta\,\hat x + r\,\text{sen}\theta\,\hat y + z\,\hat z)$$

$\hat y$ $\quad -\hat x \quad$ 0

$$\boxed{\vec v = -\Omega r\,\text{sen}\theta\,\hat x + \Omega r\cos\theta\,\hat y}$$

No depende de z.

¿ "campo de velocidades"



Visto desde arriba, tengo en un instante determinado un vector velocidad para cada punto en el cilindro

Entonces si el cuerpo solo rota puedo escribir,

$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r}$. Si además cada punto del cuerpo se mueve con una velocidad $\vec{V}_0$, entonces tenemos un movimiento de roto-traslación:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{V}_0 .$$

($\vec{V}_0$ no depende de $\vec{r}$: si dos puntos del cuerpo tuviesen distinta vel. de traslación, cambiaría su distancia relativa, y no sería un cuerpo rígido)

Esta es la forma más general para la velocidad de un cuerpo rígido.

$\Rightarrow$ La forma más general de movimiento de un cuerpo rígido es una roto-traslación.

Demostrar esto es complicado y no aporta mucho a nuestra intuición física (en todo caso, ver página 280 del libro de Kleppner y Kolenkow). Roederer dice demostrar esto en la página 164 de su libro, pero es mentira.
Lo que demuestra es que si un cuerpo se mueve con velocidad $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}$, entonces es rígido (¡pero no demostró que si un cuerpo es rígido, entonces $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}$, que es lo más difícil!). Veamos la demostración de Roederer,

Sean $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ dos puntos en el cuerpo rígido, con velocidades,
$\vec{v}_1 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_1 + \vec{V}_0$ y $\vec{v}_2 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_2 + \vec{V}_0$. Luego,

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_2 - \vec{\Omega} \times \vec{r}_1 = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

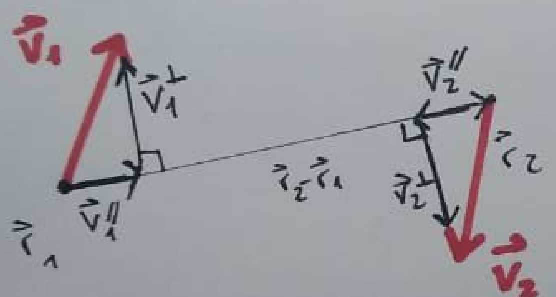
Multiplico por $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ de ambos lados,

$$(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\underbrace{\left[\vec{\Omega}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\right]}_{\perp\,(\vec{r}_2-\vec{r}_1)}\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=0$$

(es cero porque $\vec{\Omega}\times(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\perp(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$

$$(\vec{v}_2-\vec{v}_1)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\Leftrightarrow \vec{v}_2\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\vec{v}_1\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$$

Puedo escribir $\vec{v}_2=\vec{v}_2^{\,\parallel}+\vec{v}_2^{\,\perp}$ y lo mismo para $\vec{v}_1$, donde $\vec{v}_2^{\,\parallel}$ es $\parallel$ a $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$ y $\vec{v}_2^{\,\perp}$ es $\perp$ a $(\vec{r}_2-\vec{r}_1)$



→ Pero $\vec{v}_1\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\vec{v}_1^{\,\parallel}$

$\vec{v}_2\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=\vec{v}_2^{\,\parallel}$

Entonces, $\vec{r}_1^{\,\parallel}=\vec{v}_2^{\,\parallel}$.

Una situación como la del dibujo no puede ocurrir: la velocidad en la línea que los separa es siempre igual ...

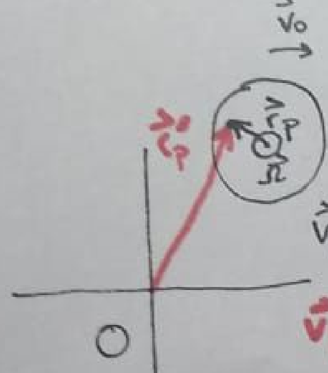
... de forma tal que no se pueden acercar ni alejar, luego se mantiene la condición de rigidez.

Llegamos entonces a la conclusión de que para determinar la velocidad de todos los puntos en un cuerpo rígido necesitamos dos vectores: $\vec{\Omega}$ y $\vec{v}_0$. Para determinar la velocidad de una masa puntual alcanzaba un solo vector. ¿Que tanto más complicado puede ser necesitar dos vectores? Rta: ¡Mucho más complicado!

Hay algo importante para aclarar:

decimos que el movimiento más general de un cuerpo rígido es $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0$

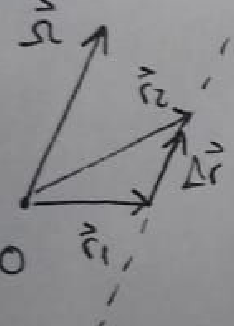
este $\vec{r}$ está calculado desde el eje de rotación



$$\vec{v}_p = \vec{\Omega} \times \vec{r}_p + \vec{v}_0 \checkmark$$

$$\vec{v}_p = \vec{\Omega} \times \vec{r}\,'_p + \vec{v}_0 \quad \text{X}$$

<u>Obs</u>: Dos puntos cualesquiera sobre una recta paralela al eje de rotación tienen la misma $\vec{v}$, pues:



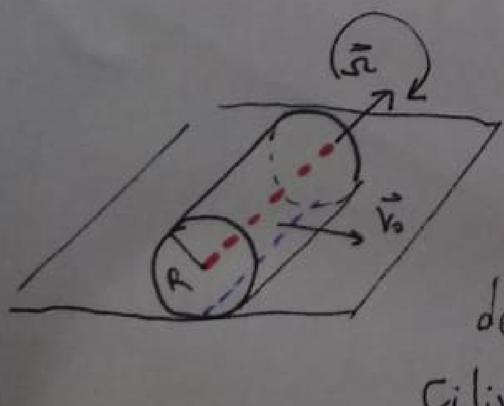
$$\vec{v}_1 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_1 + \vec{v}_0$$

IGUALES

$$\vec{v}_2 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_2 + v_0 = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_1 + \Delta\vec{r}) + \vec{v}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}_1 + \vec{v}_0$$

$$= 0 \quad (\vec{\Omega} \parallel \Delta\vec{r})$$

Supongamos que tenemos un cilindro que avanza girando sobre un plano sin deslizar



La línea roja representa el eje de rotación

La línea azul es la línea de contacto sobre la cual el cilindro está apoyado sobre la superficie.

Este tipo de movimiento es extremadamente interesante, porque está detrás de uno de los avances tecnológicos más increíbles de la humanidad (la rueda).

Ahora: si el cilindro rueda sin resbalar, existe una relación entre $\vec{v}_0$ y $\vec{\Omega}$. Veamos por qué

Visto de costado:

¿qué significa exactamente que P no deslice?

...que $\vec{v}_P$ es igual a la vel. del piso

¿cuánto vale la velocidad del piso?

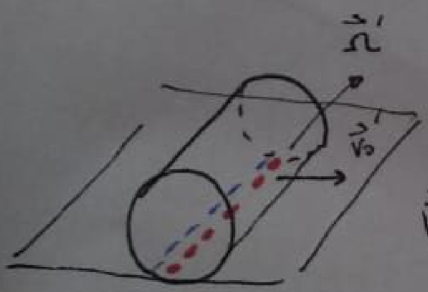
$= \underline{0}$. Entonces, $\vec{v}_P = 0$

Pero $\vec{v}_P = \vec{\Omega} \times \vec{r}_P + \vec{v}_0 = \Omega\hat{z} \times (-R\hat{x}) + v_0\hat{y}$

$$= -\Omega R\hat{y} + v_0\hat{y} = \underbrace{(v_0 - \Omega R)}_{=0 \text{ si no hay deslizamiento}}\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \Omega R}$$

¿Qué pasa si insistimos con poner el eje de rotación en otra posición, por ejemplo, en la recta de contacto entre cilindro y superficie:



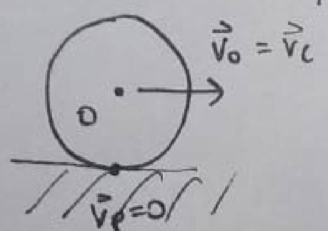
Ahora, el eje de rotación coincide con la recta de contacto

$\vec{v} = \vec{\Omega}' \times \vec{r} + \vec{v}_0'$ donde en principio,

$\vec{\Omega}' \neq \Omega$ y $\vec{v}_0' \neq \vec{v}_0$

Ahora, la velocidad de un punto del cuerpo rígido es un hecho físico: no puede depender de donde pongo un eje de rotación

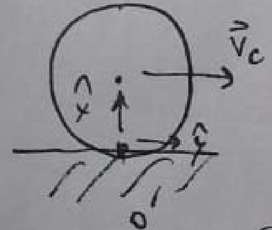
Desde O, rel. centro del cilindro



$\vec{V}_c = \vec{\Omega} \times \underbrace{\vec{r}_c}_{=0} + \vec{V}_0 = \vec{V}_0$

$\vec{V}_p = 0$ (no hay deslizamiento)

Desde O',



$\vec{V}_c = \vec{\Omega}' \times \vec{r}_c' = \Omega'\hat{z} \times R\hat{x} + V_0'\hat{y}$ $\quad V_0 = R\Omega$ porque no hay deslizamiento

$= (-R\Omega' + V_0')\hat{y}$ (1)

Luego, $V_0 = -R\Omega' + V_0' = R\Omega$

Desde O', $\vec{V}_p = \vec{\Omega}' \times \underbrace{\vec{r}_p'}_{=0} + \vec{V}_0' = \vec{V}_0' = 0$.

$\boxed{\text{Entonces, } \vec{V}_0' = 0 \text{ y } \vec{\Omega}' = \vec{\Omega} \text{ (por (1))}}$

$\Rightarrow$ La velocidad angular es la misma ($\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$) pero cambia la velocidad de traslación:

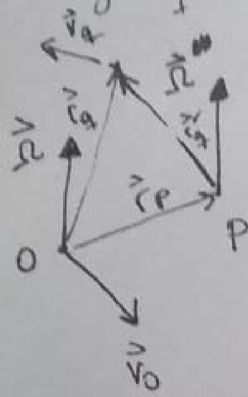
Desde O, $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{V}_0$

Desde O', $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}'$

Con el eje en O' es una rotación pura.

Con el eje en O es una roto-traslación

En general, si yo cambio el eje de rotación, y quedo //
tengo que cambiar la velocidad de traslación:



$$\vec{v}_p = \vec{\Omega} \times \vec{r}_p + \vec{v}_0 . \qquad \vec{v}_q = \vec{\Omega} \times \vec{r}_q + \vec{v}_0$$

Pero $\vec{r}_q = \vec{r}_p + \vec{r}_q'$, entonces,

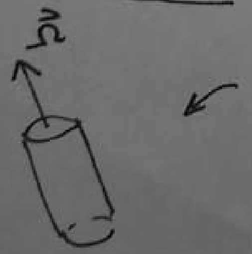
$$\vec{v}_q = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_p + \vec{r}_q') + \vec{v}_0 = \underbrace{\vec{\Omega} \times \vec{r}_p + \vec{\Omega} \times \vec{r}_q' + \vec{v}_0}_{\vec{v}_p}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{v}_q = \vec{v}_p + \vec{\Omega} \times \vec{r}_q'}$$

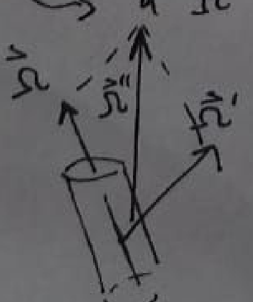
Pero esto es como escribo la velocidad desde un eje de rotación que pasa por P y es paralelo al eje de rotación que pasa por O

$\Rightarrow$ referir el movimiento alrededor de un eje de rotación nuevo paralelo al anterior sólo cambia la velocidad de traslación.

<u>Una obs. final.</u> Supongamos que tenemos un mov. rotatorio puro:



le sumamos $\vec{\Omega}'$ a $\vec{\Omega}$



$\rightarrow$ tengo un movimiento rotatorio puro alrededor de $\vec{\Omega}'' = \vec{\Omega} + \vec{\Omega}'$

En base a lo que vimos en clases anteriores, hay al menos <u>un</u> punto del cuerpo rígido cuyo movimiento sabemos predecir.

Si sabemos $\sum \vec{F}^{ext}$ = suma de fuerzas que actúan sobre el sistema de partículas (el cuerpo rígido), entonces,

$$\sum \vec{F}^{ext} = M \cdot \ddot{\vec{R}}$$

masa total

aceleración del centro de masa

Para entender cómo se mueven los otros puntos del cuerpo rígido vamos a tener que estudiar sus rotaciones.

<u>Y ahí se complica.</u>