Colisiones + Fuerzas centrales y potencial efectivo

Vimos que si una masa m se mueve bajo la acción de una fuerza conservativa $\vec{F}(\vec{r})$ entonces,

$$\underbrace{K_f - K_i = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}_{\text{Teorema energía-trabajo}} = \underbrace{-U(\vec{r}_f) + U(\vec{r}_i)}_{\text{Porque } \vec{F} \text{ es conservativa}} = -U_f + U_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\underbrace{K_f + U_f = K_i + U_i}_{\text{Conservación de la energía mecánica } E = K + U}}$$

Si hay otras fuerzas actuando pero no hacen trabajo, como por ej. las fuerzas de vínculo, esto se mantiene.

Si hubiese una fuerza no-conservativa actuando, $\vec{F}_{nc}$, entonces,

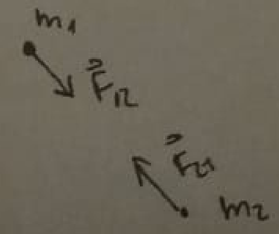
$$K_f - K_i = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} [\vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}_{nc}(\vec{r})]\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}(\vec{r})\cdot dr}_{-U_f + U_i} + \underbrace{\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_{nc}(\vec{r})\cdot d\vec{r}}_{W_{nc} = \text{Trabajo de la fuerza no-conservativa}}$$

Luego, $\overbrace{K_f + U_f}^{E_f} = \overbrace{K_i + U_i}^{E_i} + W_{nc}$

$$E_f - E_i = W_{nc} \Rightarrow \boxed{\text{La variación de la energía mecánica es igual al } W \text{ de las fuerzas no-conservativas}}$$

Hasta ahora, vimos como escribir la energía de una única partícula. Veamos como es el caso de un sistema de N partículas.

Empecemos por el caso $N = 2$



Vamos a suponer que $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{21}$ son fuerzas conservativas. Esto es válido para todas las interacciones físicas fundamentales conocidas hasta el momento, aunque podría no ser cierto en algunos sistemas mecánicos; por ejemplo, si m_1 es una masa deslizando sobre m_2, y $\vec{F}_{12}$ es una fuerza de rozamiento.

Supongamos por ahora que $\vec{F}^{ext} = 0$. Entonces,

$$\frac{m_1 v_1^{2\prime}}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} = W_1 \rightarrow \text{Trabajo } \vec{F}_{12}$$

$$\frac{m_2 v_2^{2\prime}}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} = W_2 \rightarrow \text{Trabajo } \vec{F}_{21}$$

($\vec{v}_{1,2}$ = velocidades iniciales

$\vec{r}_{1,2}$ = posiciones iniciales

$\vec{v}'_{1,2}$ = velocidades finales

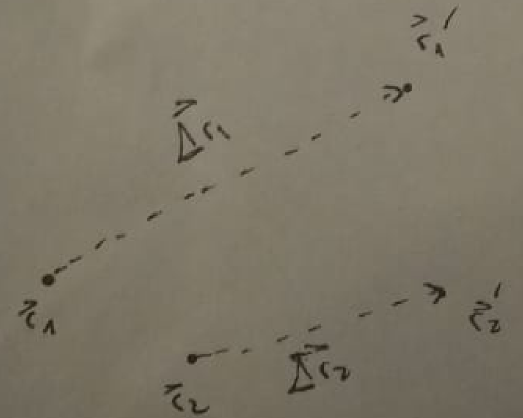
$\vec{r}'_{1,2}$ = posiciones finales)

Sumando,

$$\underbrace{\frac{m_1 v_1^{2\prime}}{2} + \frac{m_2 v_2^{2\prime}}{2}}_{\text{Defino } K_i^{TOT}} - \underbrace{\left(\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}\right)}_{\text{Defino } K_f^{TOT}} = \underbrace{W_1 + W_2}$$

- Voy a demostrar que esto se escribe como una diferencia $U_i^{TOT} - U_f^{TOT}$ donde U^{tot} depende sólo de $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ← dist. relativa entre ambas.

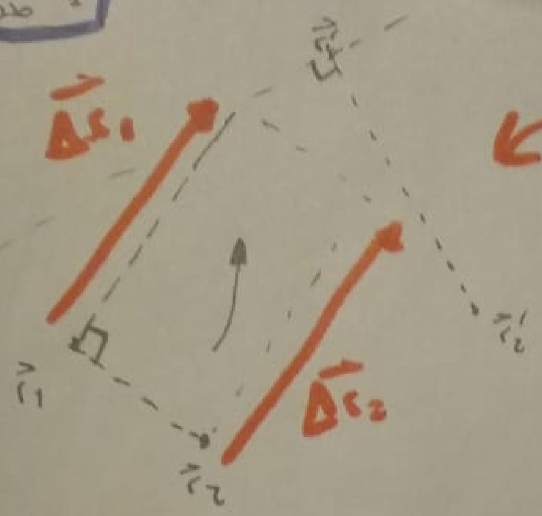
Supongamos que m_1, m_2 se desplazan de una manera arbitraria



Queremos calcular $W_1 + W_2$ en este desplazamiento.

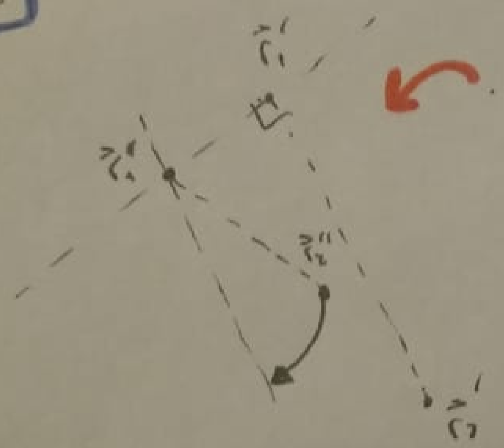
Acá está el truco: Como ya sabemos que $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ son conservativas, el trabajo no depende de la trayectoria. Por lo tanto, puedo elegir una trayectoria que me convenga para hacer la cuenta.

Paso 1



En este movimiento, las fuerzas no realizan trabajo porque son $\perp$ al desplazamiento

Paso 2

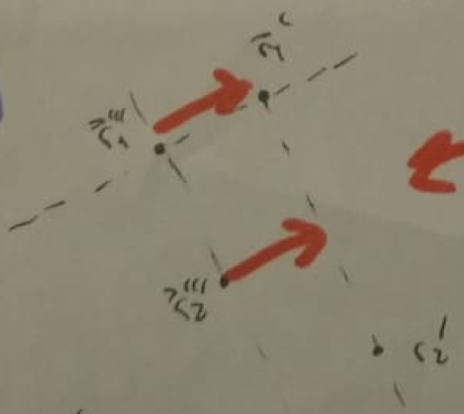


Ahora dejo fijo $\vec r_1'$ pero roto la masa 2 en un arco de circunferencia de forma tal que

$\vec r_2'' - \vec r_1'' \parallel \vec r_2' - \vec r_1'$

Tampoco se hace trabajo.

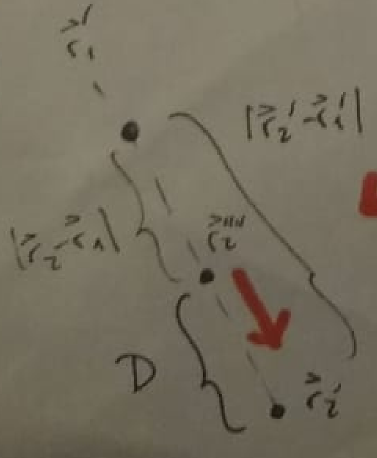
Paso 3



Ahora traslado ambas masas a la recta que une $\vec r_2'$ con $\vec r_1'$.

Nuevamente, no se hace trabajo ($\vec F_{12} \perp$ desplazamiento)

Paso 4



Ya llevé a m_1 a su posición final. Queda llevar m_2 a su posición final, moviendo $\vec r_2''''$ a $\vec r_2'$. Acá es el único paso donde $\vec F_{21}$ realiza trabajo

v. 21

¿Cuanto es el trabajo?

$$W = \int_{\vec{r}^{\,ini}}^{\vec{r}\,'} \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r} = \langle \vec{F}_{21} \rangle D \quad , \text{pero } D = |\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,'| - |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$$

Entonces $W = \underbrace{U^{TOT}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)}_{U_i^{TOT}} - \underbrace{U^{TOT}(|\vec{r}_2\,' - \vec{r}_1\,'|)}_{U_f^{TOT}}$

Finalmente, tenemos que $\overbrace{K_f^{TOT} + U_f^{TOT}}^{E_f} = \overbrace{K_i^{TOT} + U_i^{TOT}}^{E_i}$

con $U = U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$

En general, para un sistema de N partículas,

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i>j}^{N} U_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)}$$

obs: Puede que las funciones U_{ij} sean distintas si las partículas interactuan mediante fuerzas diferentes

El primer término es K^{TOT}: la suma de las N energías cinéticas

El segundo término es U^{TOT}: acá es muy importante notar que cada par de partículas aporta un único término de interacción $U(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$.

Si sumase además $U(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|)$ estaría contando 2 veces la energía potencial debido a la interacción entre m_i y m_j, por eso es que la suma corre sobre $i>j$

Es lo mismo que decir,

$j=1$ y todos los $i>j \overset{=1}{\Rightarrow} i=2, i=3, \dots, i=N$

$j=2$, y todos los $i>j \overset{=2}{\Rightarrow} i=3, \dots, i=N$

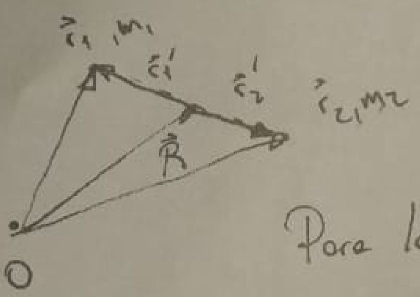
↘ así me aseguro que no haya duplicados

Aquí estamos pasando rápidamente sobre un punto que es extremadamente no trivial. Si $i = j$, es decir, si considero la energía potencial debido a la interacción de la partícula consigo mismo, entonces me queda $U(|\vec{r}_i - \vec{r}_i|) = U(0)$.
Si la partícula es realmente puntual (es decir, no tiene extensión espacial alguna) entonces estos términos pueden hacerse infinitos. Gran parte de la física del siglo XX tuvo que ver con el problema de eliminar estos infinitos en el caso de la fuerza electromagnética actuando sobre el electrón.
El problema fue resuelto por Richard Feynman, Julian Schwinger, y Shinichiro Tomonaga, quienes ganaron el premio [redacted] Nobel de física en 1965 por su desarrollo de la Electrodinámica Cuántica.

Estos problemas aparecen en el caso de la fuerza gravitatoria cuando una estrella colapsa en un agujero negro.
A diferencia del electromagnetismo, nadie logró aún desarrollar una teoría cuántica de la gravedad que resuelva este problema, que se considera el problema abierto más importante de la física teórica.

En esta materia no tenemos que preocuparnos por estas cosas, porque en la mecánica Newtoniana siempre terminamos diciendo cosas sobre objetos extensos.
Pero si alguno de ustedes resolvió el problema de la gravedad cuántica, por favor avise de todas formas.

Para terminar, veamos cómo se escribe la energía total de un sistema de dos partículas considerando por separado la contribución desde el C.M.



Como siempre, $\vec{r}_1 = \vec{r}_1' + \vec{R}$ $\quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \dot{\vec{R}}$

$\vec{r}_2 = \vec{r}_2' + \vec{R}$, $\quad \vec{v}_2 = \vec{v}_2' + \dot{\vec{R}}$

Para la K^{TOT} queda,

Notemos que para un vector, $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 (\vec{v}_1' + \dot{\vec{R}})^2}{2} + \frac{m_2 (\vec{v}_2' + \dot{\vec{R}})^2}{2} =$$

$$= \underbrace{\frac{m_1 \vec{v}_1'^2}{2} + \frac{m_2 \vec{v}_2'^2}{2}}_{K'^{TOT}} + \underbrace{\frac{(m_1+m_2)\dot{\vec{R}}^2}{2}}_{K_{CM}} + \underbrace{(m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2')}_{\vec{p}_1' + \vec{p}_2' \,=\, \text{momento total medido desde el C.M.} \,=\, 0} \cdot \dot{\vec{R}}$$

K'^{TOT}: Es la energía cinética total medida desde el C.M.

K_{CM}: Es la energía cinética de una partícula de masa $m_1 + m_2$ que se mueve a la velocidad del C.M.

Por último, para la energía potencial U^{TOT} notamos que

$$U^{TOT}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = U^{TOT}(|(\vec{r}_1' + \vec{R}) - (\vec{r}_2' + \vec{R})|) = U^{TOT}(|\vec{r}_1' - \vec{r}_2'|)$$

$\Rightarrow$ como U^{TOT} depende de la distancia relativa entre las partículas, no cambia cuando hago el cambio de coordenadas al sistema C.M.

Entonces, $\quad E = K'^{TOT} + K_{CM} + U^{TOT}$.

La hoja sin colorcitos

¡Contemplad, entonces, las leyes de conservación de la mecánica en su máximo esplendor!

Momento lineal	Momento angular	Energía mecánica
$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$	$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i$	$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2} + \sum_{i \neq j}^{N} U_{ij}^{TOT}(\lvert \vec{r}_i - \vec{r}_j \rvert)$
que es constante a menos que $\vec{F}^{ext} \neq 0$	que es constante a menos que $\vec{\tau}^{ext} \neq 0$	que es constante a menos que $W_{NC} \neq 0$
y en términos de la posición del $\vec{R}$ (centro de masa): $\vec{P} = M\dot{\vec{R}}$	y en términos de la posición del $\vec{R}$: $\vec{L} = \vec{L}_{CM} + \vec{R} \times \vec{P}$	y en términos de la posición del $\vec{R}$: $E = K^{TOT} + K_{CM} + U^{TOT}$

Acá hay algo interesante para decir.

Notemos la simetría entre las tres columnas.

1ero, defino algo ⟹ 2do digo cuando no se conserva ⟹ 3ero lo puedo escribir desde el C.M.

Pero hay una diferencia importante. Para que un sistema sea aislado en cuanto al momento lineal / angular, alcanza con que $\vec{F}^{ext} = 0$ / $\vec{\tau}^{ext} = 0$. Pero en cuanto a la energía mecánica, pedir esto no es suficiente. El motivo es que las fuerzas internas al sistema pueden ser no conservativas de forma tal que $W_{NC} \neq 0$, por ejemplo, si existe rozamiento entre los objetos que forman el sistema. Ese rozamiento hace que la energía mecánica se traslade a la energía cinética interna de cada objeto, lo que resulta en un aumento de temperatura por trans. de calor

La pregunta que deberíamos seguir haciéndos es, de nuevo, ¿cuál es la diferencia?.

¿por qué E se puede perder como la energía cinética de un montón de moléculas, pero $\vec{P}$ no?.

¿por qué no puede pasar que $\vec{P}$ pase a ser cero, pero que luego cuando computo el cambio de $\vec{p}_i$ de cada molécula individual resulta que recupero $\vec{P}$ y salvo la conservación del momento?

¿POR QUÉ EN MECÁNICA ALGUNAS COSAS PUEDEN DESAPARECER DENTRO DEL MOVIMIENTO MICROSCÓPICO DE LA MATERIA, MIENTRAS OTRAS SE MANTIENEN A UN NIVEL MACROSÓPICO, PASE LO QUE PASE?.

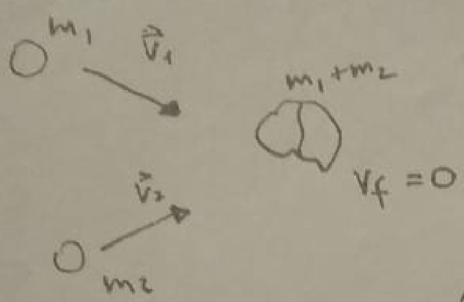
La respuesta (o una respuesta posible) es que la energía mecánica es una magnitud escalar, mientras que el momento lineal es una magnitud vectorial.

Supongamos que perdemos energía cinética K por rozamiento.
Esa energía aparece como la energía cinética de un número muy grande de moléculas, $K = \sum_{i=1}^{N \text{ GRANDE}} \frac{m v_i^2}{2}$ con m la masa de cada molécula.

Si inicialmente la velocidad del objeto que perdió la energía cinética K apuntaba en una dirección determinada, esa dirección no importa para los v_i^2. Lo único que importan son los módulos de las velocidades, no las direcciones. Las moléculas se pueden "chupar" K sin importar la $\vec{v}$ inicial, repartiéndola en un montón de $\vec{v}_i$ apuntando a cualquier lado.

En cambio, eso no pasa con $\vec{P}$.

Esto **no** puede pasar:

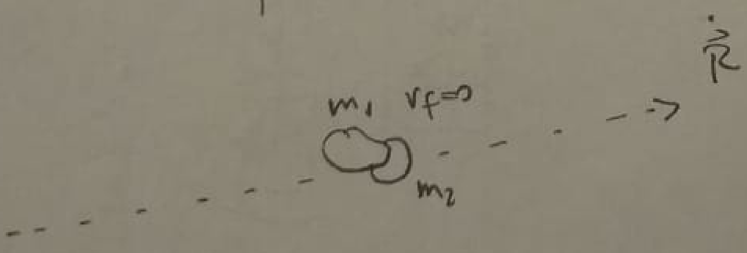


m_1 y m_2 son masas plásticas, colisionan y forman otra masa m_1+m_2, con $v_f=0$

Alguien podría argumentar:

"Así como ocurre con K, perdí el $\vec{P}$ porque se transformó en cambios en el $\vec{p}_i$ de cada molécula. Si soy muy cuidadoso y mido la velocidad de cada molécula de la masa m_1+m_2 después del choque, voy a encontrar que el cambio da cuenta de $\vec{P}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$ que perdí en el choque, y el momento lineal se conserva".

No! Pensemos en el movimiento del C.M., que se conserva pues $\vec{F}^{ext}=0$.



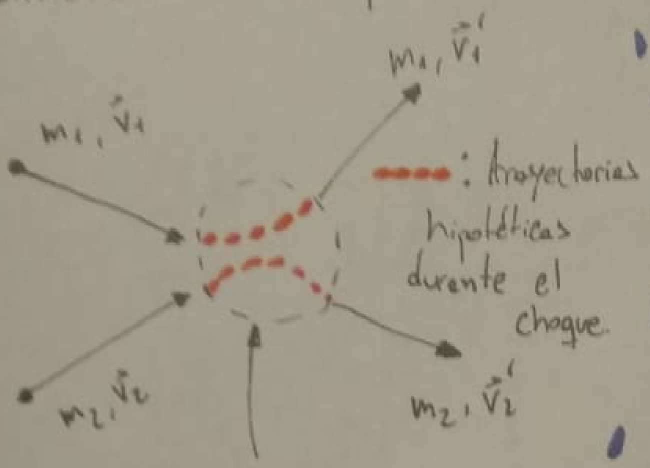
¿Cómo puede el C.M. seguir moviéndose en línea recta, si el $\vec{P}$ ahora está repartido entre las velocidades de un montón de moléculas en m_1+m_2?

La suma de $m\vec{v}_i$ de todas las moléculas como vectores nunca va a ser igual a $\vec{P}$ (algo que sí pasaba con K sumando v_i^2 escalares)

Ahora tenemos tres maravillosas leyes de conservación.

¡Vamos a usarlas!

Consideremos este problema:



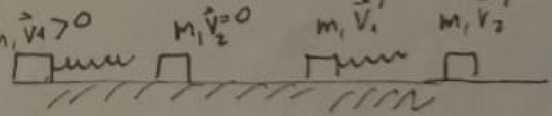
"Choque"

Acá puedo no saber qué pasa con exactitud. Puede pasar muy rápido, o ser muy complicado de describir. Pero igual podemos aprender cosas sobre qué pasó acá si comparamos $v_1, v_2 \longleftrightarrow v_1', v_2'$

En general, vamos a poder decir menos cosas que en este caso, pero vamos a poder decir igual cosas útiles.

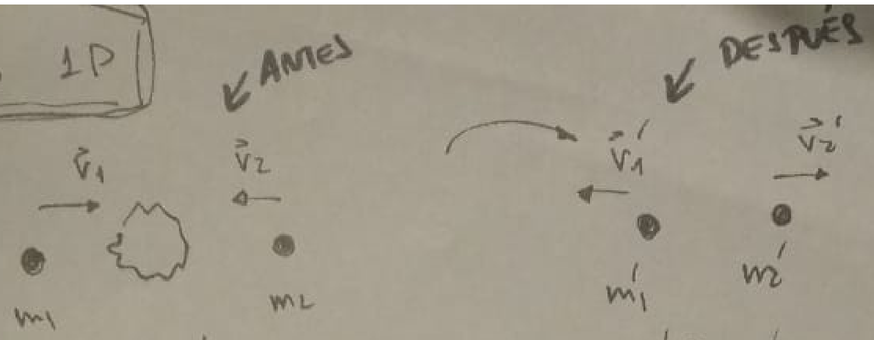
Desde que Rutherford hizo chocar cosas con planchas de metal para demostrar la existencia del núcleo atómico, los físicos se dieron cuenta de que los choques son muy útiles para entender cómo interactúan las partículas de la materia

En una clase "extra" resolví el problema:



exactamente, es decir, encontré $\vec{F}(t)$ en cada momento, y mostré cómo eso cambió el $\vec{p}$ de cada masa. Luego, podría haber usado eso para inferir cosas sobre la interacción entre las masas, por ej, el k del resorte.

$\boxed{\text{Caso 1D}}$



Asumo que las masas no se modifican ($m_1 = m_1'$, $m_2 = m_2'$)

Para el sist. aislado $m_1 + m_2$, $\vec{P} = cte.$

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

donde $\vec{v}_1$ es en realidad un único número (1D), (la velocidad con su signo)

↳ Una ecuación.
Dos incógnitas.

La energía no necesariamente se conserva, porque puede haber fuerzas no conservativas actuando durante el choque.

$$E_i = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \underbrace{U(|x_1 - x_2|)}_{\to 0}$$

$$E_f = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + \underbrace{U(|x_1' - x_2'|)}_{\to 0}$$

Voy a suponer que la energía potencial se hace $\to 0$ con $|x_1 - x_2| \to \infty$ y que mido la energía inicial y final cuando las partículas están muy separadas, entonces $E_i = K_i^{TOT}$, $E_f = K_f^{TOT}$

¡Esto no es válido para todas las fuerzas de la naturaleza, incluso las fundamentales! La U entre quarks aumenta, no disminuye con la distancia.

Voy a escribir,

$$E_i = E_f + \underbrace{Q}_{\text{energía mecánica perdida en el choque.}}$$

Nombres

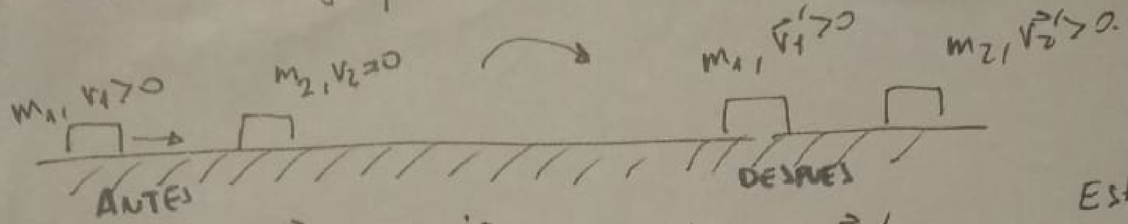
$Q = 0 \to$ choque elástico

$Q > 0 \to$ choque plástico.

[redacted]

$Q < 0 \to$ choque explosivo (gano E en el choque)

Resolvamos este ejemplo



Conservación $\vec{P}$, $m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$

Conservación E, $\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + Q$

Esto va a terminar definiendo el tipo de choque.

$v_1' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2'}{m_1}$ meto acá $\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1}{2 m_1^2} (m_1 v_1 - m_2 v_2')^2 + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + Q$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{2 m_1} \left[m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2'^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2' \right] + \frac{m_2 v_2'^2}{2} + Q$$

$$v_2'^2 \left[\frac{m_2}{2} + \frac{m_2^2}{2 m_1} \right] + v_2' \left[- m_2 v_1 \right] + \cancel{\frac{m_1 v_1^2}{2}} - \cancel{\frac{m_1 v_1^2}{2}} + Q$$

$a v_2'^2 + b v_2' + c = 0$ con $a = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 + m_2^2}{m_1}$, $b = - m_2 v_1$, $c = Q$

$$v_2' = \frac{m_2 v_1 \pm \sqrt{m_2^2 v_1^2 - \frac{4Q}{2} \frac{m_1 m_2 + m_2^2}{m_1}}}{\frac{m_1 m_2 + m_2^2}{m_1}}$$

$$v_2' = \frac{m_1 m_2 v_1 \pm m_1 \sqrt{m_2^2 v_1^2 - 2Q \left(\frac{m_1 m_2 + m_2^2}{m_1} \right)}}{m_1 m_2 + m_2^2} \qquad v_1' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2'}{m_1}$$

Veamos algunos casos particulares

Caso 1 $\quad m_1 = m_2 = m. \quad Q = 0.$

$$v_2' = \frac{m^2 v_1 \pm m\sqrt{m^2 v_1^2 - 0}}{2m^2} = \frac{m^2 v_1 \pm m^2 v_1}{2m^2} = \underbrace{\frac{1}{2}(v_1 \pm v_1)}_{0 \text{ o } v_1.}$$

Acá notamos algo interesante: v_2' puede ser 0 o v_1, matemáticamente

Si es 0,

La masa "pasa de largo" por sobre la otra.

Lo descartamos por no interés físico.

$\Rightarrow \quad v_2' = v_1 \quad$ y $\quad v_1' = 0.$

Otro caso particular: $Q = \frac{mv_1^2}{2}$ [redacted]

$$v_2' = \frac{m^2 v_1 \pm m\sqrt{m^2v_1^2 - \frac{mv_1^2\, 2m^2}{m}}}{}$$

... raíz negativa

$\boxed{\text{en este caso no hay manera de que toda la energía mecánica se disipe en la colisión}}$

¿Cuánto es entonces lo máximo de energía que puedo perder y cómo se mueven en ese caso las masas?

"perfectamente plástico"

Si $Q = \frac{mv_1^2}{4}$ entonces,

$$v_2' = \frac{m^2 v_1 \pm m\overbrace{\sqrt{m^2 v_1^2 - \frac{mv_1^2}{2}\left(\frac{2m^2}{m}\right)}}^{=0}}{2m^2} = \frac{v_1}{2} \quad \text{y} \quad v_1' = \frac{v_1}{2}$$

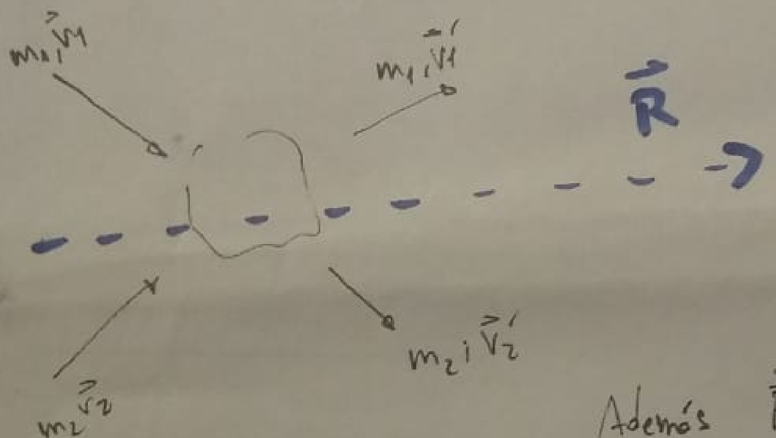
$\Rightarrow$ ¡Se mueven juntos, quedan "pegados" como plastilina!

¿Cómo podemos abordar el caso de choque 2D sin perder completa e irreversiblemente la cordura por tener que hacer tantas cuentas?

¿Qué cosa seguro se mueve muy sencillamente antes y después?

¡ El centro de masa !

$\Rightarrow$ Vamos a describir el choque 2D desde un sistema de coordenadas en el C.M.



$$\vec{v}_1 = \vec{w}_1 + \dot{\vec{R}}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{w}_2 + \dot{\vec{R}}$$
etc.

$\vec{w}$ son vel. desde el CM

Además $\dot{\vec{R}} = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

$\vec{q}$ son los momentos desde el C.M.

Si reemplazamos y hacemos las cuentas,

$$\vec{q}_1 = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \quad \text{con } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$
$$\vec{q}_2 = -\mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

(Como sabíamos ya, $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0 = \vec{p}$ desde el C.M.)

Conservación de energía en el sistema C.M.

$$\underbrace{\frac{m_1 w_1^2}{2} + \frac{m_2 w_2^2}{2}}_{K_i^{TOT}} = \underbrace{\frac{m_1 w_1'^2}{2} + \frac{m_2 w_2'^2}{2}}_{K_f^{TOT}} + Q$$

(U^{TOT} desaparece por lo mismo que dijimos en el ejemplo 1D)

Consideremos únicamente el caso de un choque elástico $Q = 0$

En ese caso, $\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$, $\vec{q}_1' + \vec{q}_2' = 0$, luego

$$\left.\begin{aligned} m_1 \vec{w}_1 &= -m_2 \vec{w}_2 \\ m_1 \vec{w}_1' &= -m_2 \vec{w}_2' \end{aligned}\right\}$$ en la ecuación para E

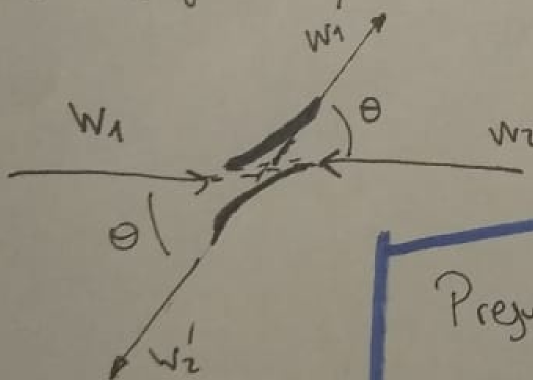
[redacted]

$$\frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 w_2^2 + \frac{m_2}{2} w_2^2 = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 w_2'^2 + \frac{m_2}{2} w_2'^2$$

$w_2 = w_2'$ (módulos iguales)

análogamente, $w_1 = w_1'$

Desde el sist. C.M. el choque queda confinado a un plano (por conservación $\vec{L}$, ej. de la guía), y dentro de ese plano, los módulos son iguales, por lo que únicamente se rotan un ángulo θ



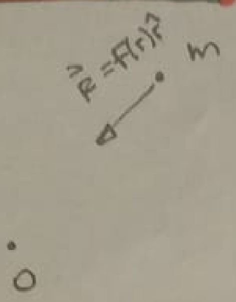
(Ángulos iguales por conservación del momento)

Pregunta para pensar:

¿Qué puedo aprender sobre la naturaleza de la interacción entre las masas / partículas analizando choques como los que estamos estudiando acá?

$\boxed{\text{Fuerzas centrales}}$

La fuerza $\vec{F}$ solo depende de la distancia al origen y apunta en $\hat{r}$



$\boxed{\text{Ejemplos}}$,

1) Atracción gravitatoria,

$$\vec{F}_{g}(r) = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}$$

"Resorte planetario"

2) Masa unida a un resorte con un extremo fijo en el origen

$$\vec{F}_e(r) = -k(r - l_0)\hat{r}$$

Preguntas: 1) ¿Son conservativos?

2) Caso afirmativo, ¿Cómo es su U?

Calculamos el trabajo entre dos puntos,

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Rightarrow$$

No sabemos calcular estas cosas, pero sí sabemos que $\vec{F} = F(r)\hat{r}$ y que en polares, [redacted]

$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} F(r)\hat{r} \cdot (dr\hat{r} + \underbrace{r\,d\theta\,\hat{\theta}}_{=0})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}$$

"Cancelando" los diferenciales dt

$$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\theta}$$

$$W = \underbrace{\int_{r_i}^{r_f} F(r)\,dr}$$

Integral de una variable (r)

W depende de F y de $(r_f - r_i) \Rightarrow$ Es conservativa

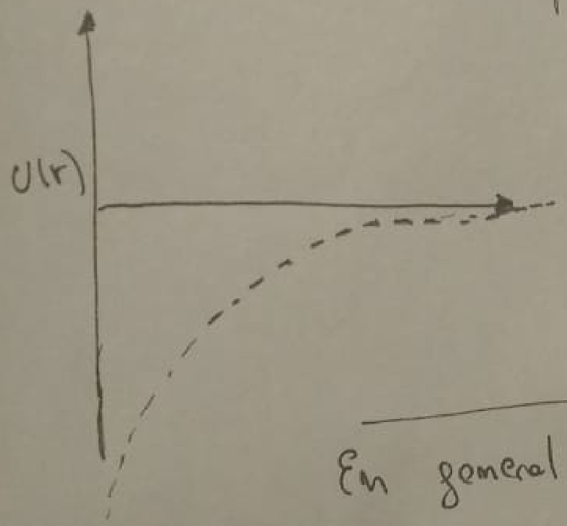
Como $F(r)$ es conservativa, existe $U(r)$ tal que

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} \quad , \quad \text{o bien} \quad \vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\hat{r}$$

Ejemplo: Fuerza gravitatoria

[redacted]

$$\boxed{U(r) = -\frac{GmM}{r}} \Rightarrow -\frac{dU}{dr} = -\frac{GmM}{r^2}$$



[redacted] $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM}{r}$

En general para una fuerza central,

(1) $E = \frac{mv^2}{2} + U(r)$ esto siempre vale y es constante si no hay $\vec{F}$ no conservativas.

Para muchos casos de interés $U(r) \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$

La fuerza se hace 0 en el infinito.

Como sabemos que $\dot{\vec{L}} = \vec{\tau}^{\,ext}$ y que $\vec{\tau}^{\,ext} = 0$ (porque $\vec{F} \parallel \vec{r}$)

vamos a usar la conservación del momento angular.

El propósito es el siguiente: La ecuación (1) no es útil así porque mezcla la velocidad en cartesianas con $U(r)$ [redacted] en término del r de polares. Queremos escribir todo en función de r.

Sabemos que en polares, $\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} \Rightarrow v^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})\cdot(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$

Ahora usamos $\vec{L}$ para sacarnos $\dot{\theta}^2$ $\leftarrow$ $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$

$\vec{L} = cte = \vec{r} \times \vec{p} = r\hat{r} \times (m\dot{r}\hat{r} + mr\dot{\theta}\hat{\theta}) = mr^2\dot{\theta}\hat{z}$

Esta constante dependerá de las condiciones iniciales

Como yo quiero tener $\dot{\theta}^2$, calculo

$$L^2 = \vec{L}\cdot\vec{L} = mr^4\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{L^2}{mr^4}$$

Finalmente, $v^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}$ $\Rightarrow$ meto en la ecuación para E

$$\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + \frac{L^2}{mr^2}\right] + U(r)$$

$$\Rightarrow E = \underbrace{\frac{m\dot{r}^2}{2}}_{①} + \underbrace{\frac{L^2}{2r^2} + U(r)}_{②} \quad (*)$$

Si miramos esta expresión, vemos que ① es un término tipo energía cinética para la velocidad radial.

En términos de la dirección radial, la masa m no se mueve bajo la acción del potencial U(r) solamente, sino que tenemos que considerar el primer término de ②

Este término es "centrífugo" porque la fuerza asociada de derivarlo con un − delante (como un potencial) apunta hacia afuera. Refleja la inercia de la masa a moverse en una linea recta, saliendo de la curva.

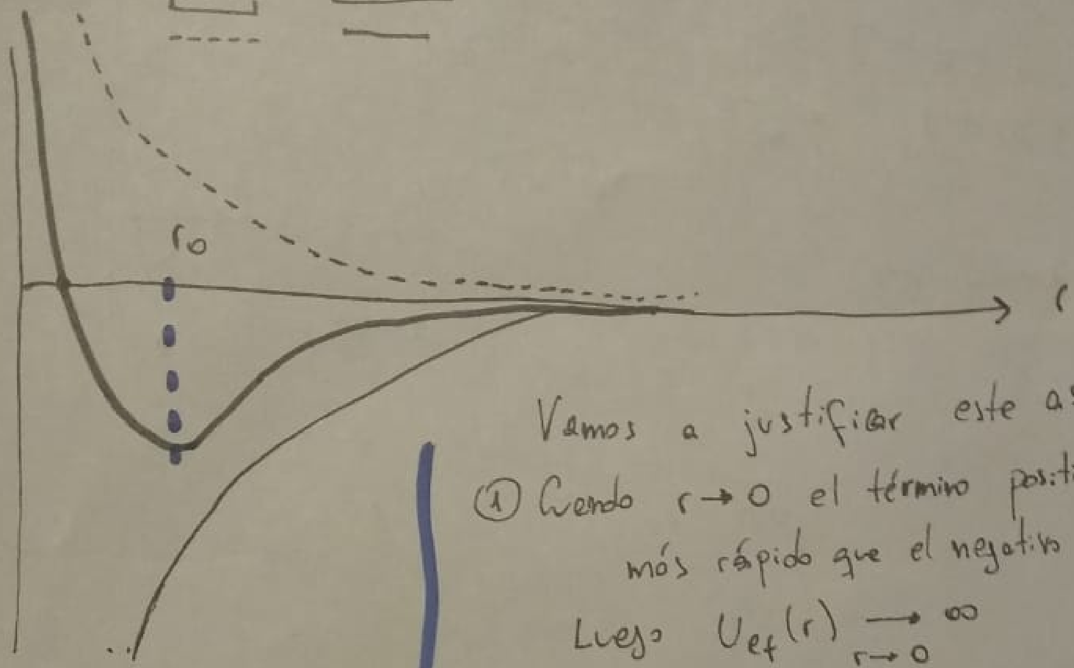
② se llama "potencial efectivo" y lo notamos $U_{ef}(r)$

En la próxima clase vamos a resolver la ecuación (*) para el caso de la atracción gravitatoria. Veamos ahora que podemos decir cualitativamente del movimiento.

Uf no es un potencial de a de veras. La derivada del primer término no corresponde a una fuerza real.

Tenemos,

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r}$$ para f. gravitatoria.



Vamos a justificar este aspecto:

① Cuando $r \to 0$ el término positivo $\to \infty$ más rápido que el negativo a $\to -\infty$

Luego $U_{ef}(r) \xrightarrow[r \to 0]{} \infty$

② $U_{ef}(r) = 0 \iff \frac{L^2}{mr^2} - \frac{GmM}{r} = 0$

$\underset{(r \neq 0)}{\iff} \frac{L^2}{m} - GmMr = 0 \iff r = \frac{L^2}{Gm^2M}$

Como $U_{ef}(r)$ es >0 cerca de $r=0$, y cruza una única vez el 0, tiene que permanecer <0 para $r \to +\infty$.

Además, $U_{ef}(r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$

¿No les hace acordar a algunos ejercicios de análisis del CBC?

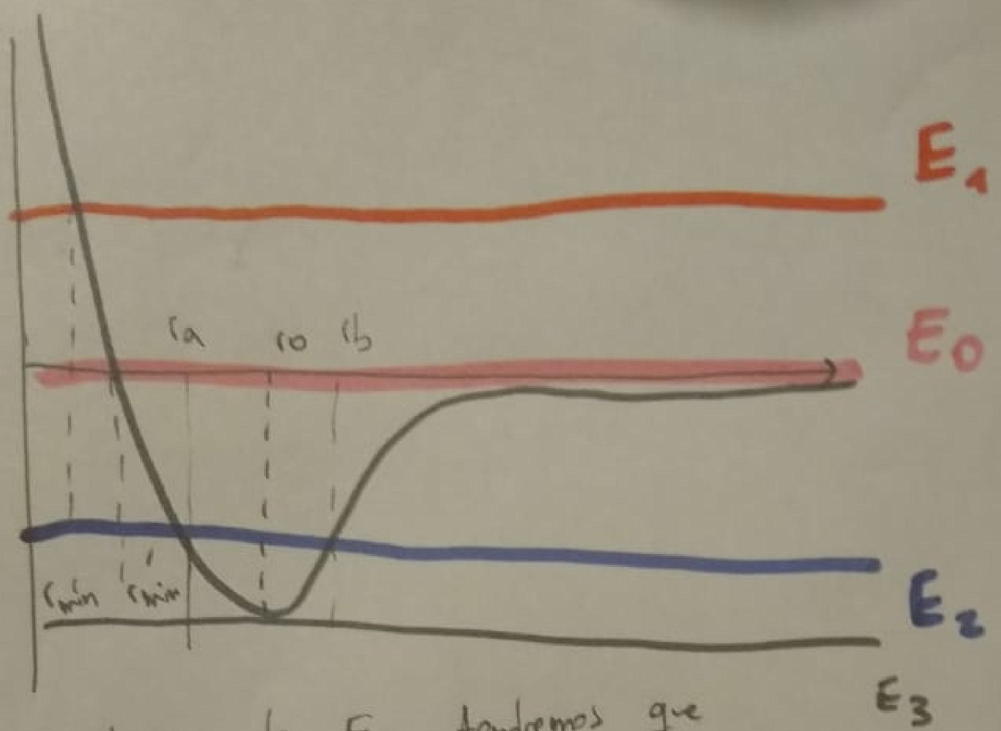
③ Por ① y ②, $U_{ef}(r)$ tiene que tener un mínimo entre [redacted] $\frac{L^2}{Gm^2M}$ y $+\infty$.

$$U_{ef}'(r_0) = \frac{-2L^2}{mr_0^3} + \frac{GmM}{r_0^2} = 0$$

$$\underset{(r \neq 0)}{\iff} -2L^2 + GmMr_0 = 0$$

$$r_0 = \frac{2L^2}{GmM}$$

⇓ Esta curva [redacted] nos permite ver cómo será el movimiento para distintos valores de E



Para el caso de E_1, tendremos que

$$E_1 = \frac{m\dot{r}_0^2}{2} + U_{ef}(r_0) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{ef}(r).$$

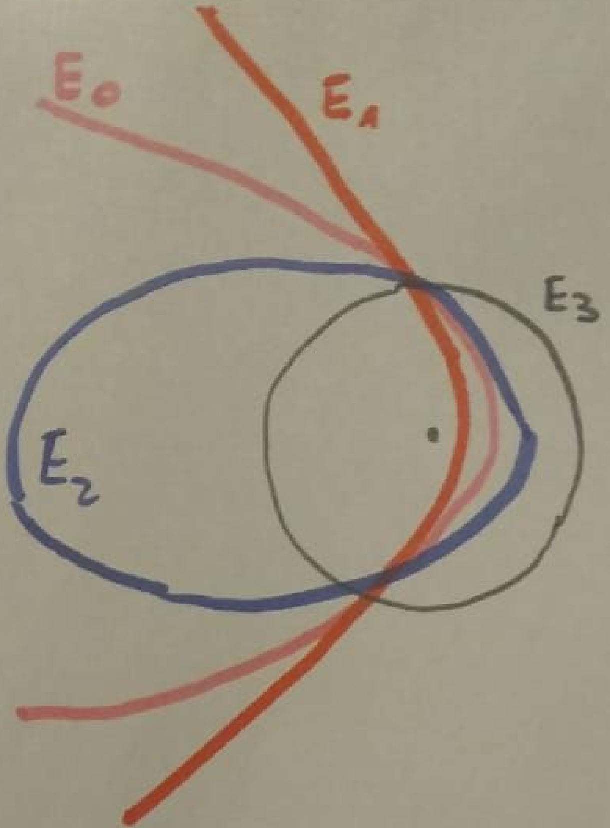
En este caso, la partícula puede moverse entre r_{min} y $r = +\infty$.
A medida que la masa escapa al infinito, su $\dot{r}$ se hace menor, aunque nunca 0.

Para el caso E_0 la partícula está en el límite de poder escapar de la [redacted] atracción gravitatoria, moviéndose entre r'_{min} y $r = +\infty$

Para E_2 la partícula está confinada a moverse entre r_a y r_b. Estos son los puntos donde $\dot{r}$ [redacted] es menor, en r_0 se tiene la máxima velocidad.

Para E_3 tengo que $r = cte = r_0$. Es un movimiento circular.

Notar que este diagrama solo me informa sobre el comportamiento de r, pero eliminamos θ de las ecuaciones.



E_1 es una hipérbola

E_0 es una parábola

E_2 es una elipse

E_3 es una circunferencia

¡ ¿Podremos encontrar las ecuaciones que rigen estas curvas únicamente a partir de la ley de gravitación Universal y seguir los pasos de Newton en la demostración de que los inmensos cielos se rigen por las leyes de la geometría que vosotros, mortales y humanos, trazamos en tinta y papel, con manos tambaleantes? !

¿¿O SE VA A VOLVER A PIXELAR LA WEBCAM??