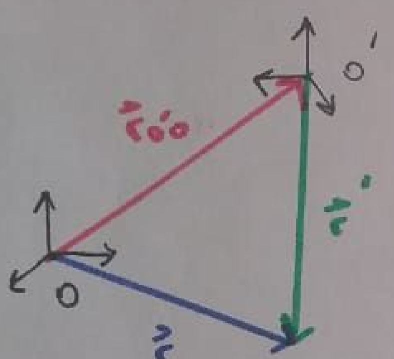
Movimiento relativo

Empezamos nuestra discusión sobre cinemática remarcando la necesidad de adoptar un origen O desde el cual medimos los valores de distintas coordenadas.

Otra persona podría haber descripto el movimiento desde un origen distinto O'. La pregunta es cómo se relacionan ambas descripciones.



$\vec{r}$ es el vector posición medido desde el origen O

$\vec{r}\,'$ es el vector posición medido desde el origen O'

$\vec{r}_{O'O}$ es el vector posición del origen O' desde el origen O

Tenemos entonces la relación vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_{O'O}$$

o bien

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{r}_{O'O}$$

derivando de ambos lados respecto a t,

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{O'O}$$

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_{O'O}$$

Estas tres expresiones me indican cómo obtener $\vec{r}\,', \vec{v}\,', \vec{a}\,'$ (desde O') conociendo $\vec{r}, \vec{v}, \vec{a}$ (desde O) y $\vec{r}_{O'O}, \vec{v}_{O'O}, \vec{a}_{O'O}$. Dos casos importantes:

① Si O', O están en reposo mutuo, $\vec{v}\,' = \vec{v}$, $\vec{a}\,' = \vec{a}$

② Si O', O están en movimiento rectilíneo uniforme entre sí, $\vec{a}\,' = \vec{a}$

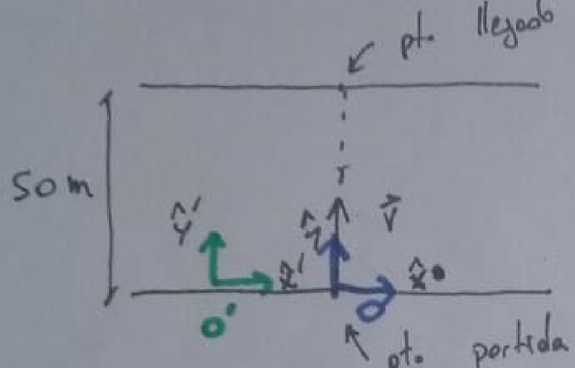
Ejercicio 15, guía 1

Velocidad respecto a agua 0.7 m/s

Velocidad del agua 0.5 m/s

Ancho del río 50 m

a) ¿En que dirección debe nadar para llegar al extremo opuesto de la orilla y cuánto tarda en llegar?



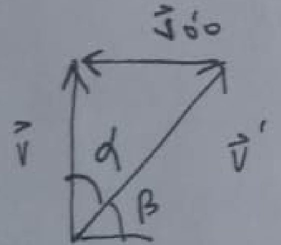
O : origen fijo a la costa

O' : origen que se mueve con el agua

$\vec{v}_{O'O} = -0.5 \text{ m/s } \hat{x}$

$\vec{v}\,' =$ vel. respecto al agua $= 0.7 \text{ m/s } \underbrace{\hat{n}}_{\text{dirección de nado}}$

$$\overbrace{v\,\hat{y}}^{\vec{v}} = \overbrace{0.7 \text{ m/s } \hat{n}}^{\vec{v}\,'} \text{ [redacted] } \overbrace{0.5 \text{ m/s } \hat{x}}^{\vec{v}_{O'O}}$$



$$\left. v'^2 = v^2 + v_{O'O}^2 \right\} \quad v = \sqrt{v'^2 - v_{O'O}^2}$$

$v = 0.4899$ [redacted]

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v_{O'O}}{v'}$$

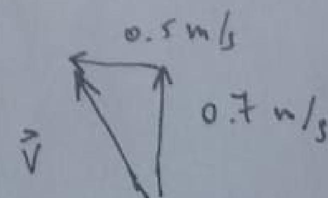
$\operatorname{sen}\alpha \simeq 0.7143\ldots$

$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \simeq 0{,}775 \qquad \alpha \simeq 0.7956$

¿Cuánto tiempo tarda? $\quad t = \dfrac{50 \text{ m}}{0.4899 \text{ m/s}} = 102.0616 \text{ s}.$

b) Si quiere llegar en el menor tiempo posible, debe nadar con $\vec{v}\,' = 0.7\,\hat{y}'$ (es decir, directo hacia la orilla con la velocidad máxima respecto al agua.

Por la composición c/ $\vec{v}_{O'O}$ no va a llegar en el extremo opuesto (¡hacer la cuenta!)



Dinámica

Ya tenemos herramientas para describir el movimiento $\vec{r}(t)$ y relacionarlo con sus dos primeras derivadas $\vec{v}$, $\vec{a}$ tanto en coordenadas cartesianas como polares.

Además, aprendimos como relacionar $\vec{r}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ medida en dos origenes de coordenadas O, O'.

Ahora vamos a estudiar dinámica.

Muchos libros dicen que dinámica es el estudio de las causas de los movimientos. Puede que sea cierto, aunque hablar de "causas" podría ser innecesariamente filosófico.

Esto es lo que queremos hacer cuando hacemos dinámica:

Cuando medimos las trayectorias de cuerpos en la naturaleza parece haber regularidades. Por ejemplo, cuando tiramos proyectiles vemos que sus trayectorias son parábolas, pero son distintas parábolas. La forma de la parábola depende de la velocidad inicial $\vec{v}_0$. Podríamos armar una gran tabla donde relacionemos la forma de la parábola con $\vec{v}_0$ para muchísimos valores de $\vec{v}_0$ y decir:

> "Listo. Esta tabla tiene toda la información necesaria para describir un tiro oblicuo. Si alguien dispara un proyectil, lo único que tiene que hacer es medir $\vec{v}_0$, consultar esta tabla, y va a conocer la forma de la trayectoria"

Si bien esto se podría hacer, resulta que hay una manera <u>más económica</u> de presentar esta información.

La parábola tiene dos parámetros libres $y(x) = ax + bx^2$. Si yo doy la trayectoria tengo que especificar a y b.

Ahora, supongamos que yo conozco no la trayectoria, sino la aceleración que siente la partícula en cada punto de la trayectoria. Para pasar de la aceleración a la posición tengo que integrar dos veces, de donde obtengo a, b a partir de las condiciones iniciales del problema.

> El gran truco de la dinámica es este: si encuentro una forma de obtener la aceleración en cada punto de una trayectoria, entonces la expresión para la aceleración contiene implícitamente TODAS LAS TRAYECTORIAS POSIBLES de la partícula, porque en el proceso de integrar la aceleración para obtener la posición incorporo las condiciones iniciales específicas del movimiento, que me determinan las constantes de la trayectoria (que antes tenía que buscar en una tabla enorme)

Para el caso del tiro oblicuo, por ejemplo:

$\vec{V}_0$	a	b
...	...	...
...	...	...
...	...	...
⋮	⋮	⋮

vs. $\ddot{\vec{r}} = -g\hat{y}$

La magia de la dinámica es que la tabla enorme de la izquierda y la ecuación diferencial sencilla de la derecha contienen la misma información

Una breve disgresión histórica:

¿Por qué se tardó tanto tiempo en descubrir esta idea? ¿Eran todos idiotas antes que Newton?

El problema es que antes de Galileo la gente no era capaz de imaginar a las leyes de la física como descripciones matemáticas que rijen el movimiento de los cuerpos en casos idealizados.

El gran salto conceptual de Galileo fue darse cuenta de que uno tiene que conducir experimentos controlados para aislar el factor que uno quiere modelar de todos los demás.

El ejemplo clásico es el rozamiento.

La existencia de rozamiento entre las superficies atrasó la dinámica por unos 2000 años.

Aristóteles había observado que un cuerpo en movimiento tiende a detenerse a menos que uno le aplique una "fuerza". Nosotros estamos muy familierizados con esta observación. Si queremos que una heladera muy pesada se mantenga con velocidad constante tenemos que aplicar constantemente una fuerza, que además es mayor a mayor masa de la heladera.

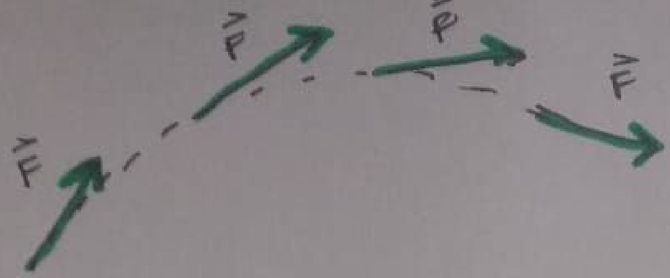
Para Aristóteles y la mayoría de los filósofos naturales después de el (pero antes de Galileo) un movimiento requería una causa ("fuerza") en todo punto de su trayectoria.

Dicho en términos modernos, Aristóteles hubiese escrito

"2da ley de Aristóteles"

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{v}}$$

Pero esto no es conveniente, precisamente porque no comprime y condensa suficiente información para reconstruir la "tabla" a partir de las condiciones.



Para Aristóteles, la fuerza se presenta como un vector que es $\parallel \vec{v}$ (tangente a la trayectoria)

¡Pero eso es casi lo mismo que especificar la trayectoria!

Sir Isaac Newton combinó las ideas de Galileo con estas observaciones (de las que él mismo se dio cuenta) y con el cálculo (que el mismo inventó) para formular las tres leyes:

$\boxed{1.}$ Todo objeto con $\vec{v} = cte$ permanecerá con $\vec{v} = cte$ a menos que actúe sobre el una fuerza.

$\boxed{2.}$ $\vec{F} = m\vec{a}$, es decir, existen cosas llamadas "fuerzas" que determinan $\vec{a}$ y por lo tanto (integrando), $\vec{r}$. Pero $\vec{a}$ no es igual a $\vec{F}$, porque la misma fuerza aplicada a distintos objetos genera $\vec{a}$ distinto. Esa diferencia se representa mediante un factor de proporcionalidad m (masa inercial)

$\boxed{3.}$ Para toda interacción entre cuerpos 1 y 2, si

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{12} = \text{fuerza hecha sobre 1 por 2 y} \\ \vec{F}_{21} = \text{fuerza hecha sobre 2 por 1} \end{array}\right\} \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ se denominan "pares de acción y reacción" aunque el nombre no es muy bueno porque la situación es completamente simétrica (¿cuál es la acción y cuál es la reacción?)

Más correcto sería decir que una fuerza no es un vector, sino siempre un par de vectores, de igual módulo y sentido opuesto, actuando cada uno sobre uno de los dos cuerpos que interactúan.

Problemas con las leyes de Newton.

¿En qué sistema de referencia son válidas?

Estamos en reposo en un auto y empieza a acelerar. Los objetos dentro del auto deberían (por la primera ley) permanecer con $\vec{v} = 0$ en nuestro sist. de referencia (no hay fuerzas actuando)

- ¡Pero los vemos moverse aceleradamente!
- ¿Qué está pasando?
- ¡Las leyes de Newton no son válidas en cualquier sistema de referencia!
- ¿En qué sistemas de referencia son válidas, entonces?

– INSERTE EMOJI QUE PIENSA AQUÍ –

Sea O un sistema donde valen las leyes de Newton.

Entonces decimos que O es un sistema de referencia inercial (SI).

Si O' es un sistema con $\vec{V}_{O'O} = cte$ entonces también es un SI (y también valen las leyes de Newton).

$\boxed{1}$ En O, $\vec{v} = cte$ si $\vec{F} = 0$.
Pero entonces en O', $\vec{v}\,' = \underbrace{\vec{v}}_{cte} - \underbrace{\vec{V}_{O'O}}_{cte}$ también es cte.

$\boxed{2}$ En O, $\vec{F} = m\vec{a}$. Pero $\vec{a}\,' = \vec{a} - \underbrace{\vec{a}_{O'O}}_{=0}$

Entonces en O' $F = m\vec{a}\,' = m\vec{a}$.

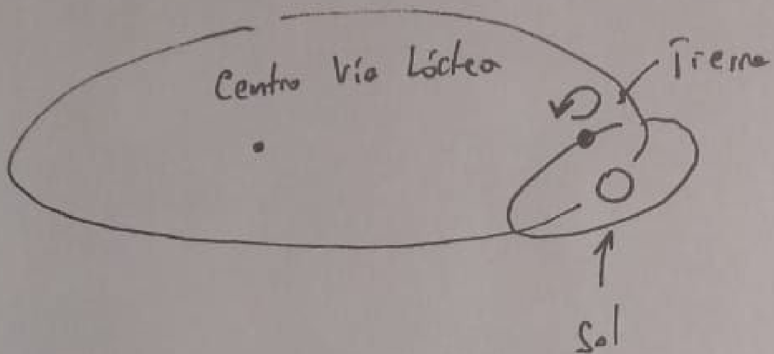
$\boxed{3}$ Como por 2) $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ son idénticas en O' y O sigue valiendo $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

La pregunta es, ¿cómo encontramos aunque sea un SI? (Si logramos eso, podemos definir infinitos SI (todos los O' con $\vec{V}_{O'O} = cte$)

La Tierra no es un SI, por ejemplo, un observador en el Sol la ve rotar sobre su eje, con lo cual (al menos) aparece una aceleración centrípeta y $\vec{V}_{O'O} \neq cte$

El Sol tampoco es un SI porque un observador en el centro de la galaxia lo ve en una órbita acelerada (elipse).

Pero es mucho mejor SI que la Tierra (la aceleración centrípeta es ≈15.000.000 veces menor)



Uno podría decir "ok, tomo el centro de la vía Láctea".

En la época de Newton era común escuchar que las "estrellas fijas" eran un SI, apuntando a la idea de que la aceleración - por tener trayectorias aceleradas (Tierra rota sobre sí misma, gira alrededor del Sol, Sol gira alrededor del centro de la galaxia, que gira alrededor del centro del cluster local de galaxias, etc.) se hace cada vez menor a mayor distancia con el origen del SI

En realidad, ninguno es un SI. Hoy decimos que la existencia de un SI es una idealización. Un auténtico SI no existe, pero sí existen sistemas de referencia en los cuales el desvío de las leyes de Newton es menor que otros

11/17

Otro problema con las leyes de Newton:

- ¿qué es la masa inercial m?
- ¿cómo la mido? ¿cómo sé si dos objetos tienen la misma masa inercial m?

Una posible respuesta es:

"Aplico la misma $\vec{F}$ a ambos cuerpos.
Si la $\vec{a}$ es igual, por la 2da ley de Newton (si estoy en un SI) entonces su masa es igual"

Pero, ¿cómo hago para saber si las fuerzas que aplico sobre los cuerpos son la misma?

Podría decir:

[redacted]

"ok, entonces mido la aceleración de cada cuerpo y luego la multiplico por la masa.
Si el resultado es el mismo, las fuerzas son iguales".

Sí, pero ¿no era la masa precisamente lo que no sabía cómo medir? Parece que estoy en una suerte de círculo vicioso.

Experimentos de Ernst Mach

La salida de este círculo fue propuesta por Mach, recién en el siglo XIX. El procedimiento introducido por Mach se conoce como "operalización" y significa "determinar el significado y valor de una magnitud física mediante el resultado de un experimento".

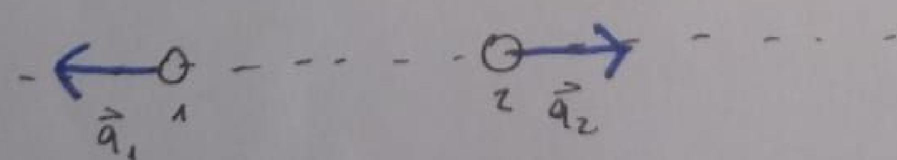
Mach dice:

Consideremos dos cuerpos puntuales, 1 y 2, en un SI y aislados lo mejor posible del resto del Universo.

Los cuerpos interactúan entre sí mediante algún mecanismo (un resorte, una explosión, repulsión magnética, etc).

Son hechos experimentales:

$\boxed{1.}$ $\vec{a}_1$ y $\vec{a}_2$ están en la recta que une los cuerpos y tienen sentidos opuestos



$\boxed{2}$ El cociente de los módulos $a_1/a_2 = \text{cte}$, donde la constante no depende del mecanismo de interacción, únicamente de los objetos que interactúan.

Decimos $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1'}{a_2'} = \frac{a_1''}{a_2''} = m_{21}$, donde a_1', a_2', a_1'', a_2'' etc. son aceleraciones obtenidas mediante distintos mecanismos de interacción.

Llamamos m_{21} = masa inercial del cuerpo 2 en unidades del cuerpo 1

o "cuántas veces la masa inercial de 1 entra en 2".

(obs. $a_1 = a_1(t)$ y $a_2 = a_2(t)$, pero para todo t,
$$\frac{a_1(t)}{a_2(t)} = cte = m_{21}\text{)}$$

Podemos poner en interacción otros cuerpos con 1,

$$\frac{a_1}{a_3} = \frac{a_1'}{a_3'} = \frac{a_1''}{a_3''} = \ldots = m_{31}$$

$$\frac{a_1}{a_n} = \frac{a_1'}{a_n'} = \frac{a_1''}{a_n''} = \ldots = m_{n1}$$

Si decimos que el cuerpo 1 es nuestra unidad de masa inercial y medimos todas las aceleraciones respecto de 1, entonces ya es sobreentendido el subíndice y decimos,

$$\frac{a_1}{a_n} = m_n = \text{masa inercial del cuerpo } n.$$

$\Rightarrow$ Medimos la masa a partir de hacer interactuar a un objeto con una masa de referencia y luego determinar su aceleración.

Hasta 2019, la masa de referencia era el kilogramo patrón (un objeto de platino en París).

Se observa experimentalmente que la masa es aditiva: $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ es la masa de combinar los objetos $1, \ldots, n$.

Además, si 1 y 2 interactúan tenemos que $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ pero en sentido opuesto.

Si a_0 es la aceleración del objeto de referencia, (kg patrón),

$$\frac{a_0}{a_1} = m_1 \qquad \frac{a_0}{a_2} = m_2 \qquad \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Rightarrow \quad m_2 a_2 = m_1 a_1 \quad (\circledast)$$

Descubro entonces que si introduzco el vector $\vec{F}_{21} = m_2 \vec{a}_2$, y $\vec{F}_{12} = m_1 \vec{a}_1$, entonces

$$\vec{F}_{21} \parallel \vec{F}_{12} \quad (\text{pues } \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2)$$

$$F_{21} = F_{12} \text{ por } \circledast$$

pero $\vec{F}_{12}$ apunta en sentido opuesto a $\vec{F}_{21}$

$$\Rightarrow \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (\text{3era ley de Newton})$$

Llegamos entonces a cual es el procedimiento central de la mecánica.

<u>Primero</u>, desarrollamos herramientas para describir el mov. de los cuerpos, relacionando posición ($\vec{r}$), velocidad ($\vec{v}$), aceleración ($\vec{a}$) mediante derivadas e integrales.

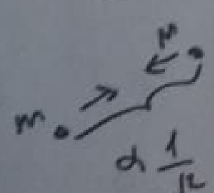
<u>Segundo</u>, podemos encontrar una magnitud escalar asociada a cada cuerpo (masa inercial) que nos indica el factor de proporcionalidad entre fuerza y aceleración.

<u>Tercero</u>, si conocemos las fuerzas $\vec{F}$ sobre el objeto en cada momento y estamos en un SI, entonces podemos obtener la aceleración,

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2^{da} \text{ ley}). \quad \circledast$$

si además conocemos las condiciones iniciales ($\vec{r}(t_0)$, $\vec{v}(t_0)$) podemos integrar la ecuación $\circledast$ y encontrar $\vec{v}$ y $\vec{r}$

<u>Obs</u>: En general vamos a conocer $\vec{F}(\vec{r})$ en vez de $\vec{F}(t)$. Pero $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ } derivada respecto del tiempo



Es decir, $\circledast$ es una ecuación diferencial, con incógnita $\vec{r}$.

Por ejemplo, en 1D,

$$F(x) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$ ← ¿qué función $x(t)$ cumple esto cuando la meto en la ecuación?

Pero, hay algo que todavía no cierra con este procedimiento...

en el paso 3, ¿de dónde sale $\vec{F}$?

¿Cómo conozco las fuerzas que actúan sobre una partícula? ¿Cómo sé por ejemplo que $F = \frac{GmM}{r^2}$ para la gravedad? ¿Lo única manera es que se le ocurra un día a alguien?

En realidad, el proceso es al revés. El físico conoce la trayectoria $\vec{r}$ y busca una fuerza $\vec{F}$ tal que al reemplazarla en (*) y resolver, obtengo la trayectoria observada. En el caso de la gravedad, ¿qué $\vec{F}$ necesito para explicar las observaciones de Kepler sobre el movimiento planetario? MEDIANTE LA DINÁMICA, USO LO QUE SÉ DE CINEMÁTICA PARA DESCUBRIR $\vec{F}$.

¿¿Qué es una fuerza??, en palabras de Arthur Eddington

↓

" $\vec{F} = m\vec{a}$. Una fuerza es aquello que tengo que poner del lado izquierdo de la ecuación para encontrar las trayectorias observadas al resolver "

En las próximas clases, vamos a ver ejemplos de fuerzas, enfocándonos en las llamadas "fuerzas de vínculo" y empezar a resolver problemas de dinámica de puntos.