Dinámica, clase 2: más sobre fuerzas

La clase pasada vimos que una forma de expresar muchas trayectorias posibles de una forma económica es especificar la aceleración $\vec{a}$ de una masa puntual en cada punto del espacio. Además, vimos que distintos objetos poseen distintas trayectorias que dependen de una propiedad intrínseca llamada masa inercial.

Entonces, escribimos $\underline{\vec{F} = m\vec{a}}$ donde,

$\vec{a}$ = aceleración, m masa (definida de acuerdo a las ideas de Mach) y $\vec{F}$ es la fuerza sobre la partícula. Podemos integrar esta ecuación conociendo la posición y la velocidad inicial, siempre que nos encontremos en un sistema inercial.

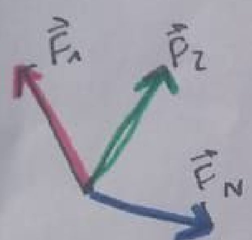
Por último, dijimos que uno usa $\vec{F} = m\vec{a}$ para encontrar la trayectoria cuando uno conoce las fuerzas, pero también cuando uno quiere deducir la fuerza cuando uno conoce las trayectorias, como en el caso de la ley de gravitación de Newton si uno conoce la trayectoria de los planetas alrededor del Sol (elipses)

Unidades de fuerza (MKS)

$$[F] = [M][L][T]^{-2} = \frac{kg\, m}{s^2} \rightarrow N \text{ (Newton)}$$

Al ser un múltiplo de $\vec{a}$, $\vec{F}$ es un vector.

Supongamos que N fuerzas distintas actúan sobre la masa m,



En este dibujo pongo únicamente las fuerzas sobre m. $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ tendrán su par en los cuerpos con los que m interactúa, pero limito a dibujar únicamente los pares sobre m

Ppo de superposición:

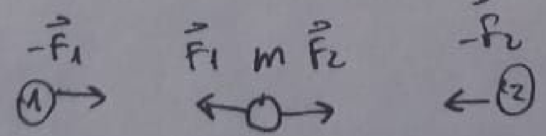
$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N$$

↓ "resultante"

Si $\vec{F}_{TOT} = 0$ entonces $\vec{a} = 0$ entonces $\vec{v} = cte$

(1era ley de Newton)

Si $\vec{a} = 0$, no necesariamente hay ausencia de fuerzas sobre m, aunque su resultante $\vec{F}_{TOT} = 0$



Si $\vec{F}_1 = \vec{F}_2$ entonces $\vec{a}$ de m es cero, pero hay fuerzas sobre m (de hecho, ① y ② se empiezan a acercar aceleradamente a m)

Entonces, si conocemos $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ podemos escribir 3 ecuaciones,

$$m a_x = F_x \qquad m a_y = F_y \qquad m a_z = F_z$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z$$

Pareciera que solo es cuestión de integrar dos veces cada ecuación para encontrar la trayectoria $\vec{r} = (x, y, z)$.

Pero hay un problema: en general, F_x, F_y, F_z no dependen del tiempo, sino de la posición.

Por ejemplo, en 1 dimensión,

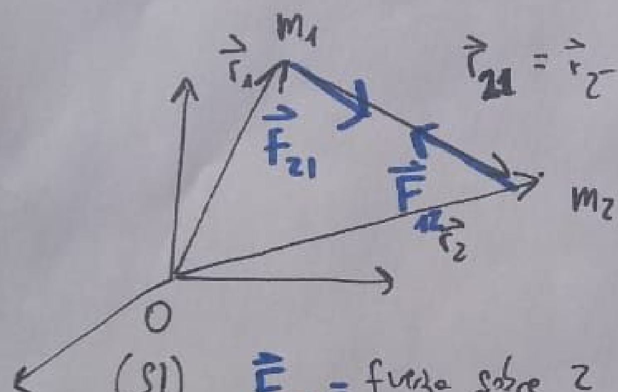
$$\boxed{m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = F(x(t)) \Rightarrow}$$ Ecuación diferencial, encontrar una función $x(t)$ que cumpla con esto.

En general y salvo casos sencillos, vamos a tener que resolver ecuaciones diferenciales para encontrar la trayectoria de una masa puntual sometida a fuerzas.

Fuerza Gravitatoria.

Newton no solamente desarrolló los fundamentos físicos y matemáticos de la dinámica, sino que además proporcionó por primera vez una expresión matemática para una fuerza (atracción gravitatoria)

(El resto de la carrera de física es en gran medida el proceso de familiarizarse con varias fuerzas y sus implicancias)



$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

(SI) $\vec{F}_{21}$ = fuerza sobre 2 por 1. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$

$\vec{F}_{12}$ = fuerza sobre 1 por 2

Propiedades

- Es universal y atractiva: todos los cuerpos con masa se atraen en la recta que los une.
- Se hace más débil proporcional con el cuadrado de la separación.
- Es proporcional a la masa de cada uno de los cuerpos.

Entonces,

cte. proporcionalidad, $\mu_1 \mu_2$: masa gravitatorias

$$F_{21} = \frac{G \mu_1 \mu_2}{r_{21}^2}$$

, ¿cómo es como vector?

$\vec{F}_{21}$ apunta en $\hat{r}_{21}$, o sea:

$$\vec{F}_{21} = \frac{G \mu_1 \mu_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

. ¿Pero quién es $\hat{r}_{21}$?

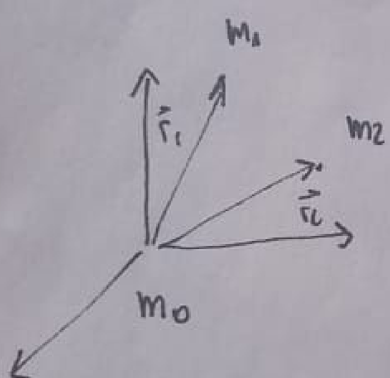
$$\hat{r}_{21} = \frac{\vec{r}_{21}}{|r_{21}|}$$

, luego:

$$\vec{F}_{21} = \frac{G m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} = \frac{G m_1 m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$. y con − para $\vec{F}_{12}$.

Notemos, como habíamos anticipado, que $\vec{F}_{21}$ depende de la posición de la masa.

Ahora: Supongamos que tenemos un cuerpo de masa m_0 fijo en el origen y dos cuerpos de masa m_1, m_2 a la misma distancia del origen.



$r_1 = r_2 = r$

¿Cuánto vale la aceleración sobre m_1, m_2 debido a la atracción gravitatoria de m_0?

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{01} = -\frac{G m_1 m_0}{r^2}\hat{r}_1$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_{02} = -\frac{G m_2 m_0}{r^2}\hat{r}_2$$

y en módulo,

$$m_1 a_1 = \frac{G m_1 m_0}{r^2}$$

$$m_2 a_2 = \frac{G m_2 m_0}{r^2}$$

Ahora, si bien la aceleración a_1, a_2 podría depender de m_1, m_2, es un hecho extremadamente bien establecido experimentalmente que sólo dependen de r

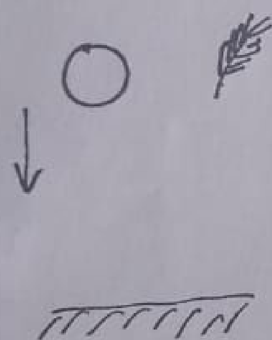
Esto es lo que se denomina "principio de equivalencia entre la masa inercial y gravitatoria" o más corto "principio de equivalencia".

Es una característica única de la atracción gravitatoria.

Es decir, $\boxed{m_1 = \mu_1, \quad m_2 = \mu_2,}$

$$\left.\begin{aligned} m_1 a_1 &= \frac{G m_1 m_0}{r^2} \\ m_2 a_2 &= \frac{G m_2 m_0}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{G m_0}{r^2} \\ &\parallel \\ a_2 &= \frac{G m_0}{r^2} \end{aligned}\right\}$$

Aceleraciones iguales en módulo, solo depende de la distancia



¿Quién llega antes al piso?

Como la fuerza sobre una masa m debido a m_0 es independiente de la masa, podemos definir,

$$\gamma(\vec{r}) = -\frac{G m_0}{r^2}\hat{r} \quad \Big\}$$ "Campo gravitatorio de m_0"

$$\Rightarrow \vec{F}_{01} = m_1 \gamma(\vec{r})$$

Ahora entendemos todo pero aún no podemos aplicar la ley de gravitación en la práctica, porque no sabemos cuánto vale G

Excepto que hay maneras : ¡Newton calculaba fuerzas gravitatorias sin saber G!

f. gravitatoria Tierra sobre m ¿Cómo hacía?

$$F = ma \Rightarrow \frac{F}{m} = \underline{a}$$

→ esta aceleración sí se puede medir, es $g \approx 9.8 \frac{m}{s^2}$

Ahora, como $F = \frac{G m \overbrace{m_T}^{\text{masa Tierra}}}{\underbrace{R_T^2}_{\text{radio de la Tierra}}}$, entonces,

$$g = \frac{F}{m} = \frac{G m_T}{R_T^2}$$

(g es la misma para todos los cuerpos que estén a R_T del centro de la Tierra).

R_T se conoce desde 2 siglos antes de Cristo (Eratóstenes) (= 6357 km)

Newton no conocía G ni m_T, pero conocía su producto : $g R_T^2 = G m_T$.

Entonces, podría calcular la atracción sobre un cuerpo cualquiera a otra distancia R del centro de la Tierra:

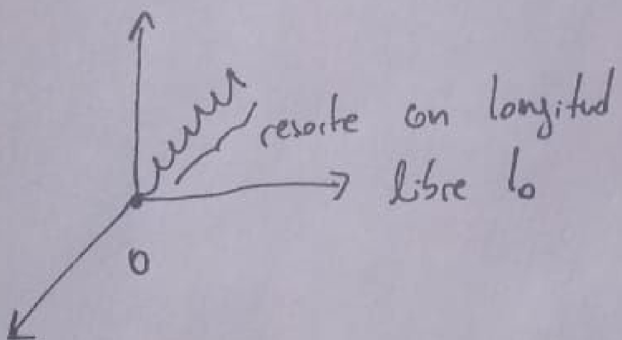
$$F = \frac{G m_T m}{R^2}, \quad \text{pero} \quad G m_T = g R_T^2, \text{ luego}$$

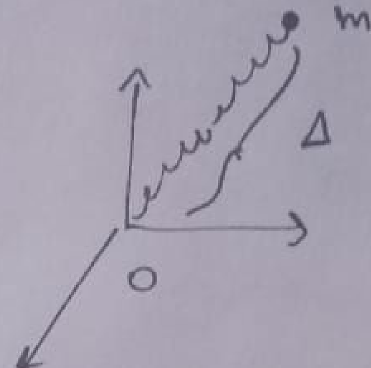
$$\boxed{F = m g \left(\frac{R_T}{R}\right)^2 .}$$

observemos que si conocemos G podemos encontrar m_T y viceversa. En 1797 Henry Cavendish logró hacer un experimento con suficiente precisión para medir $G = 6.67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2}$

y por lo tanto se transformó en "El hombre que pesó a la Tierra", encontrando $m_T = 5.972 \times 10^{24}$ kg

Hay otros tipos de fuerza que vamos a ver en la materia, por ejemplo la fuerza elástica





La fuerza elástica atrae a m al origen si $\Delta > 0$.
(resorte estirado)

La fuerza elástica repele a m del origen si $\Delta < 0$
(resorte comprimido)

Es proporcional al estiramiento Δ,
con una constante k (constante del resorte)

$$\vec{F} = -k\Delta\hat{r} = -k(r - l_0)\hat{r}$$

(a mayor k, más fuerte el resorte).

Notamos que a diferencia de la atracción gravitatoria, dos cuerpos de distintas masas m_1 y m_2 a la misma distancia r del origen, no tienen la misma aceleración

$$a_1 = \frac{k}{m_1}(r - l_0)$$

$$a_2 = \frac{k}{m_2}(r - l_0)$$

Tenemos la intuición de que la fuerza elástica no está en la misma categoría que la gravitatoria.

Gravedad es universal, entre todos los cuerpos.

=> interacción fundamental, no sabemos como explicarla en base a otras fuerzas

Elástica es una fuerza fenomenológica:

=> es una aproximación que modelamos a partir de experimentos con resortes.

no es universal (no existe la "carga resorteril" definida para toda la materia del universo)

y además no es fundamental porque la podemos explicar en base a lo que sabemos de la fuerza electromagnética.

En esta materia vamos a ver todas fuerzas fenomenológicas con la excepción de la atracción gravitatoria.

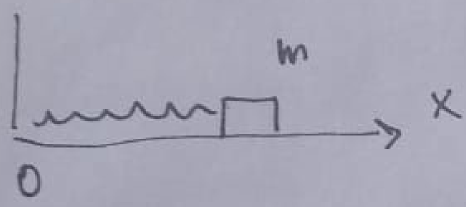
Las fuerzas restantes fundamentales son

fuerza electromagnética, + fuerza nuclear débil, fuerza nuclear fuerte

fuerza electrodébil

El problema más importante de la física es encontrar una forma unificada de describir a todas estas fuerzas y a la gravedad.

Volviendo al resorte, en una dimensión



$$\vec{F} = -k(x-l_0)\hat{x}$$

lo dejamos de poner porque se sobreentiende.

$$m\ddot{x} = -k(x-l_0)$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}(x-l_0) = 0$$

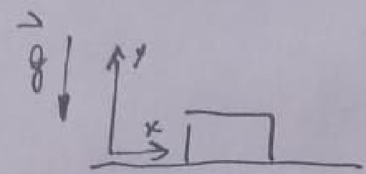
Esta es una ecuación diferencial cuya incógnita es una función $x(t)$. Vamos a resolverla más adelante en la materia.

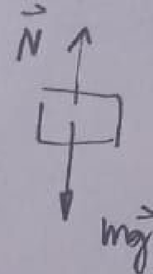
Fuerzas de vínculo

Tanto la fuerza gravitatoria como la elástica tienen esta propiedad: Si yo conozco la posición en el espacio de la partícula, conozco la fuerza que actúa sobre ella.

Pero podría encontrarme con la situación opuesta:
yo sé algo sobre dónde la partícula tiene que
estar sí o sí, y la fuerza valdrá lo que
tiene que valer para que esa condición ("vínculo")
se cumpla $\Rightarrow$ "fuerzas de vínculo". $\nearrow$ "Diagrama cuerpo libre, DCL"

Por ejemplo,





$\vec{N} = mg\hat{y}$ es la fuerza normal de la mesa.

Es una fuerza fenomenológica que tiene origen
electromagnético y que vale lo que tiene que
valer para cumplir el vínculo

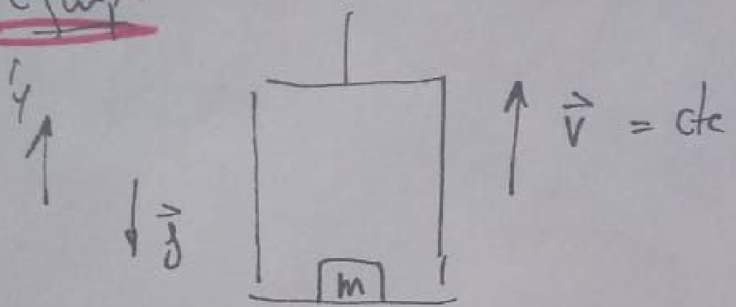
$y = 0$ (posición y de la masa es constantemente cero)

$\Rightarrow \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} = 0$

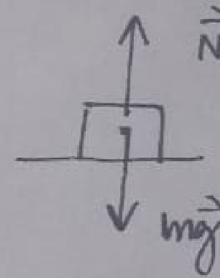
$\Rightarrow \quad m\ddot{y} = N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

En general, las fuerzas de vínculo se
expresan mediante condiciones (igualdades o desigualdades)
que cumplen x, y, z las coordenadas de la
partícula.

Ejemplo



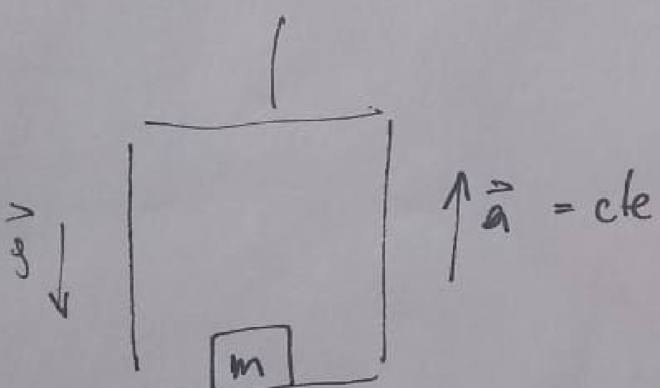
D.C.L.



Vínculo $\dot{y} = cte.$

(análogamente, $y(t) = cte \cdot t$)

$\Rightarrow$ $\ddot{y} = cte$ y de nuevo $N = mg$.



Vínculo $\ddot{y} = a$

(análogamente, $y(t) = \frac{a t^2}{2}$)

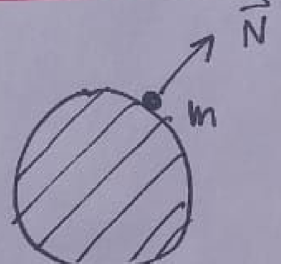
$\Rightarrow$ $ma = N - mg \Rightarrow N = m(a+g)$

(es mayor porque acelera a la masa en $\hat{y}$)

Las fuerzas de vínculo son fuerzas de contacto material, por ejemplo: normal de una mesa, tensión de una soga, fuerza de contacto de una mesa engarzada con un alambre.

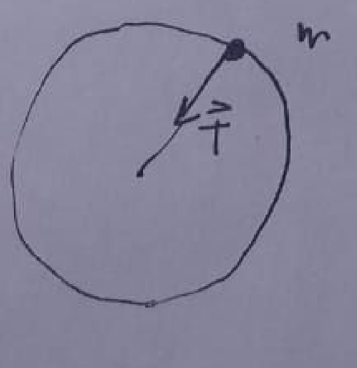
Podemos ver que las condiciones de vínculo son distintas para c/u de los tres casos:

Normal de una superficie:



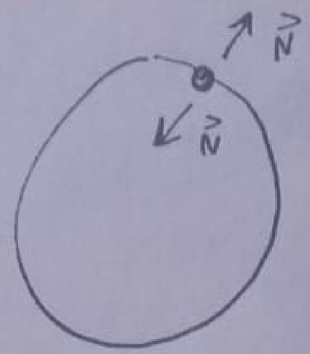
La fuerza apunta desde la superficie hacia afuera, y vale lo que tiene que valer para que la masa no penetre en la superficie.

Tensión de una soga inextensible:



Al revés, la fuerza apunta hacia el punto fijo de la soga y vale lo que tiene que valer para que el hilo no se estire

Fuerza de vínculo de un alambre

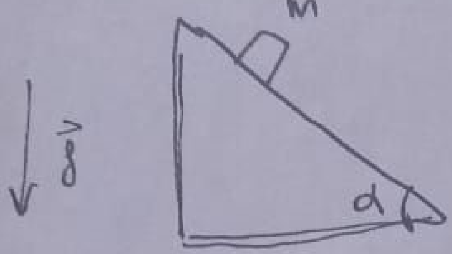


Puede apuntar tanto hacia dentro como hacia afuera, y vale lo que tiene que valer para que la masa siga siempre la trayectoria del alambre. (NOTA: es lo mismo con una barra rígida unida al origen)

Cuando encuentro una situación que exige una fuerza incapaz de ser suministrada por el vínculo, entonces el vínculo se deja de cumplir.

Ej. Normal hacia el interior de una superficie, tensión que haga al hilo "empujar" la masa hacia afuera.

Vamos a resolver un problema conocido desde dos perspectivas diferentes



Encontrar la aceleración de la masa m.

Hay tres pasos que tenemos que seguir siempre para resolver un ejercicio de dinámica. Si los sabemos hacer bien, no hay manera de equivocarnos.

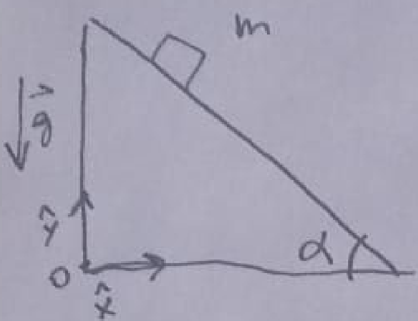
Paso 1: Elegir un origen y un sistema de coordenadas (donde está el origen, cuales son los versores, si uso cartesianas o polares, etc)

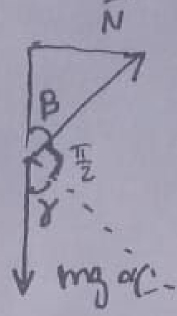
Paso 2: Escribir D.C.L de cada cuerpo.

Paso 3: Escribir las ecuaciones de movimiento usando la 2^{da} ley de Newton

Paso 4: Escribir y aplicar condiciones de vínculo.

Paso 5 Despejar las aceleraciones de cada masa.





$$\beta + \frac{\pi}{2} + \gamma = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\frac{\pi}{2} + \gamma + \alpha = \pi \qquad = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

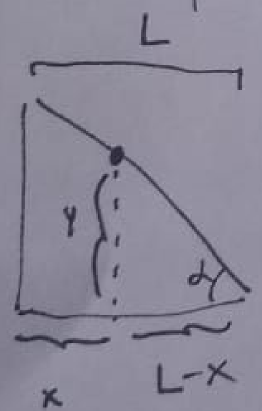
$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha \qquad \boxed{\beta = \alpha}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{x}: & m\ddot{x} = N \operatorname{sen}\alpha \\ \hat{y}: & m\ddot{y} = -mg + N\cos\alpha \end{array}\right\}$$ 3 incógnitas $(N, \ddot{x}, \ddot{y})$ y 2 ecuaciones.

En general, si escribo las ec. de Newton y tengo más incógnitas que ecuaciones entonces me falta incorporar ecuaciones que tienen que ver con los vínculos del problema.

En este caso, sé que la masa está confinada a moverse sobre la superficie del plano inclinado.

Esto impone una relación entre los valores de x e y:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{L-x}$$

$$(L-x)\operatorname{tg}\alpha = y$$

$$L\operatorname{tg}\alpha - x\operatorname{tg}\alpha = y$$

Si derivo respecto a t,

$$-\dot{x}\operatorname{tg}\alpha = \dot{y}$$

$$-\ddot{x}\operatorname{tg}\alpha = \ddot{y}$$

$\Rightarrow$ Esta es la ecuación que me falta para resolver el problema

$N = \frac{m\ddot{x}}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\quad N = \frac{m\ddot{y} + mg}{\cos\alpha}$ $\quad \frac{\cancel{m}\ddot{x}}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cancel{m}\ddot{y} + \cancel{m}g}{\cos\alpha}$

$$\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\ddot{x} = -\ddot{x}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} + g$$

$$\ddot{x}\left(\frac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos\alpha \operatorname{sen}\alpha}\right) = g$$

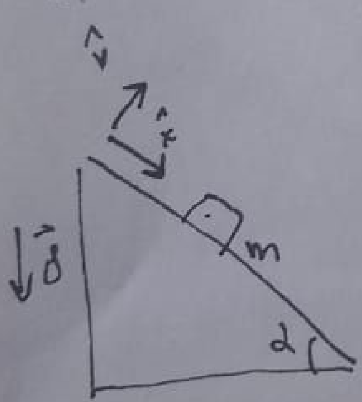
$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x} &= \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha\, g \\ \ddot{y} &= -\operatorname{sen}^2\alpha\, g\end{aligned}}$$

$$\ddot{y} = -\cancel{\cos\alpha} \operatorname{sen}\alpha \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} g = -\operatorname{sen}^2\alpha\, g$$

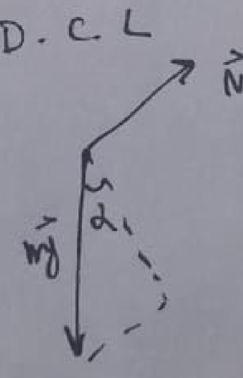
Caso límite: $\ddot{x}$ es 0 si $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

$\ddot{x}$ es máximo si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Otra forma más sencilla es poner el sistema de coordenadas paralelo al plano inclinado:



D.C.L



$\hat{x}$: $m\ddot{x} = mg \operatorname{sen}\alpha$

$\ddot{y} = 0 = N - mg\cos\alpha$

↑

¡$\ddot{y} = 0$ es el vínculo!

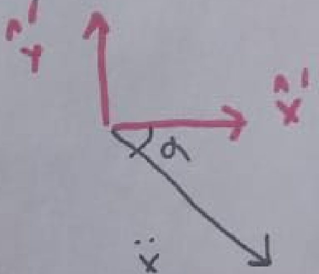
El vínculo queda mucho más simple en este sist. coordenadas.

Solución

$$\boxed{\begin{aligned}\ddot{x} &= g \operatorname{sen}\alpha \\ \ddot{y} &= 0\end{aligned}}$$

¿Cómo podemos mostrar que las dos soluciones son en realidad la misma?

Llamemos $\hat{x}', \hat{y}'$ al sistema de coordenadas que no es paralelo al plano inclinado.



$$\hat{x}': \quad \ddot{x}\cos\alpha = \ddot{x}'$$

$$\hat{y}: \quad -\ddot{x}\,\text{sen}\,\alpha = \ddot{y}'$$

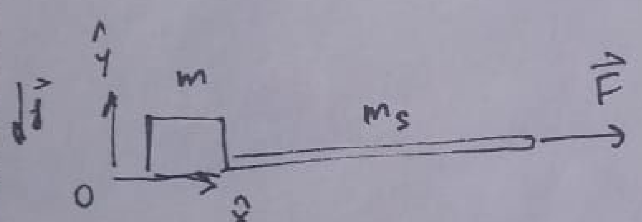
Reemplazando
$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}' &= \text{sen}\,\alpha\cos\alpha\, g \\ \ddot{y} &= -\text{sen}^2\alpha\, g \end{aligned}\right\} \boxed{\text{Lo mismo.}}$$

Sogas

En la mayoría de los casos en esta materia vamos a resolver ejercicios con sogas ideales, que tienen las siguientes propiedades

- No tienen masa, o su masa es despreciable
- Inextensibles, o su estiramiento es despreciable.

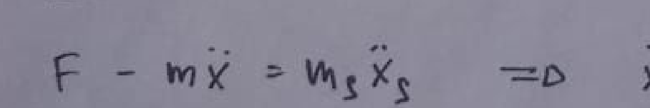
Para entender cómo funcionan estas aproximaciones, resolvamos el siguiente problema:



Soga de masa m_s unida a bloque de masa m

Podemos pensar a la soga apoyada, de forma tal que únicamente haya fuerzas resultantes en $\hat{x}$.

D.C.L.



$$F' = m\ddot{x}$$

$$F - F' = m_s \ddot{x}_s$$

Ahora, si la soga es inextensible entonces $\ddot{x} = \ddot{x}_s$

$$F - m\ddot{x} = m_s \ddot{x}_s \Rightarrow \ddot{x} = \frac{F}{m + m_s} \quad \text{y} \quad F' = \frac{m}{m+m_s} F$$

1) La tensión sobre el bloque (F') es menor a la tensión en el extremo (F)

2) La aceleración total es menor que en el caso $m_s = 0$

Las sogas únicamente "transmiten" la tensión si son inextensibles y poseen masa despreciable.

Puedo pensar a la soga como formada por N pedacitos de longitud $\frac{L}{N}$ y masa $\frac{m_s}{N}$.

D.C.L.

Primero: 

$T - T_1 = \frac{m_s}{N}\ddot{x}_1$

Segundo: 

$T_1 - T_2 = \frac{m_s}{N}\ddot{x}_2$

Tercero: 

$T_2 - T_3 = \frac{m_s}{N}\ddot{x}_3$

⋮

N-ésimo: 

$T_{N-1} - T_N = \frac{m_s}{N}\ddot{x}_N$

Ahora, como es inextensible $\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_N$ son iguales.

Aunque, veo que esta hipótesis no era necesaria.

Pero si $\frac{m_s}{N} = 0$ ($m_s = 0$, masa despreciable)

$$T = T_1, \quad T_1 = T_2, \quad T_2 = T_3, \quad \dots, \quad T_{N-1} = T_N$$

$T = T_N \Rightarrow$ $\boxed{\text{La soga sólo transmite la tensión}}$

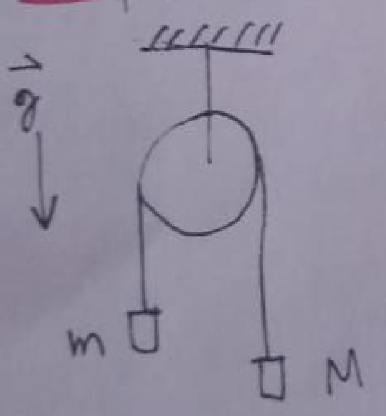
En resumen:

1) Si la masa es despreciable, la soga solo transmite la tensión.

2) Si además es inextensible, la aceleración de las masas que une es la misma.

3) Puedo tener una soga con masa despreciable pero extensible. En ese caso la fuerza se transmite entre sus extremos, pero tengo que modelar el efecto de la fuerza elástica por estiramiento. Una manera es modelando a la soga como un resorte 

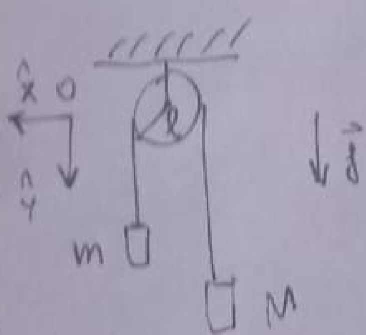
Ejemplo: máquina de Atwood



Calcular la tensión de las sogas y las aceleraciones de las masas asumiendo,
- soga inextensible
- soga sin masa
- polea sin masa

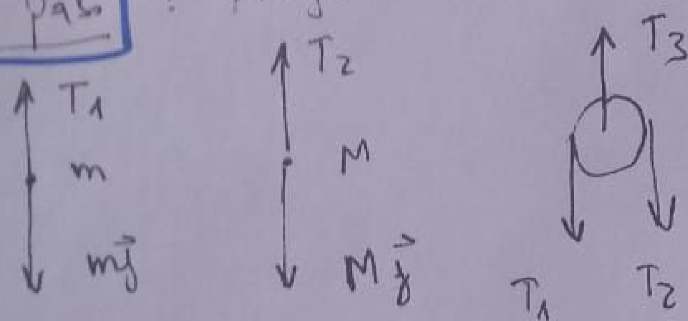
Vamos a resolverlo ordenadamente para que después puedan aplicar el mismo procedimiento a ejercicios más complicados de la guía.

1er paso: Origen y sistema de coordenadas



obs. No hace falta que O coincida con el centro de la polea. Pero como en $\hat{x}$ no hay fuerzas, da igual.

2do paso: Diagramas de cuerpo libre



Pero, $T_1 = T_2 = T$ (soga sin masa)

$$\underbrace{T_3 = 2T}_{\text{Esto lo vamos a justificar cerca del final de la materia}} \quad \text{(polea ideal)}$$

3er paso: Ecuaciones de Newton

$$mg - T = m\ddot{y}_1 \qquad 2T - T_3 = m\ddot{y}_p$$

$$Mg - T = M\ddot{y}_2$$

Tres ecuaciones pero cinco incógnitas $(\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, T, T_3, \ddot{y}_p)$

$\Rightarrow$ Me falta especificar vínculos.

4to paso: Escribo los vínculos.

$$y_1 + y_2 + \frac{\ell\pi}{2} = L \quad \text{(longitud de la soga)}$$

$$\dot{y}_1 + \dot{y}_2 = \dot{L} = 0 \quad \text{(soga inextensible)}$$

$$\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$

Además, como la polea está fija,

$y_p = 0$ (constante) $\dot{y}_p = 0$, $\ddot{y}_p = 0$

⇒ Encontré dos ecuaciones para sumar y tener misma cantidad de eq. incógnitas

$\boxed{5^{to} \text{ paso}}$: Encuentro las aceleraciones y tensiones

$mg - T = m\ddot{y}_1 \} \quad T = mg - m\ddot{y}_1$

$Mg - T = -M\ddot{y}_1 \} \quad T = Mg + M\ddot{y}_1$

$mg - m\ddot{y}_1 = Mg + M\ddot{y}_1$

$$\boxed{\frac{g(m-M)}{m+M} = \ddot{y}_1 \qquad \frac{g(M-m)}{m+M} = \ddot{y}_2}$$

⇒ Si $M > m$, $\ddot{y}_2$ es positivo (baja M)

Si $M < m$, $\ddot{y}_1$ es positivo (baja m)

Si $m = M$, $\ddot{y}_1 = \ddot{y}_2 = 0$ (equilibrio)

Si M o $m \to \infty$ cae con aceleración $\vec{g}$.

$$T = mg - m\left(\frac{m-M}{m+M}\right)g = mg\left(\frac{\cancel{m}+M - \cancel{m}+M}{m+M}\right)$$

$$\boxed{T = \frac{mg\,2M}{m+M} = \frac{2mMg}{M+m}}$$

$T_3 = 2T$