Dinámica (última clase)

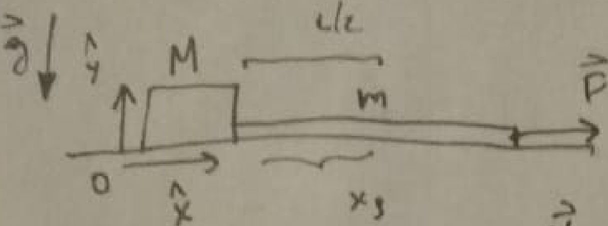
Conocidas las fuerzas, podemos usar $\vec{F} = m\vec{a}$ para encontrar el movimiento.

Hay distintos tipos de fuerzas: interacciones fundamentales y universales, como la gravedad, e interacciones que en última instancia se reducen a otras fuerzas, pero que podemos modelar mediante expresiones matemáticas convenientes, como la fuerza elástica de un resorte (fuerzas fenomenológicas)

Dentro del segundo grupo se incluyen las fuerzas de contacto que valen lo que deben valer para que la partícula esté confinada a una trayectoria predeterminada, conocidas como "fuerzas de vínculo". Ejemplos incluyen normales de superficies, fuerzas de contacto con alambres y tensiones de sogas.

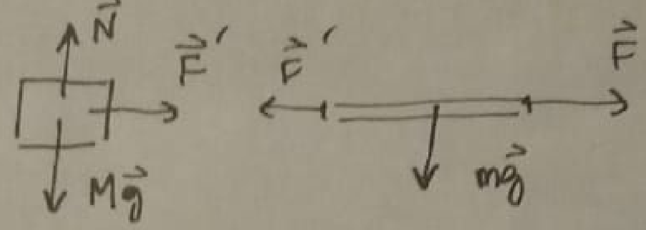
Vamos a empezar la clase analizando con detalle la fuerza de tensión, ¿y bajo que condiciones necesitamos asumir que una soga posee masa despreciable, y estiramiento despreciable

Consideremos una soga inextensible de masa m, y averigüemos la aceleración del bloque debido a $\vec{F}$.



$\boxed{\text{1. Ponemos un sistema de referencia}}$

$\boxed{\text{2. D.C.L}}$



$\boxed{\text{3. Ecuaciones de Newton para } x_b \text{ (coord. x del bloque) y } x_s \text{ (coord. x de la soga)}}$

$$F' = M\ddot{x}_b \qquad F - F' = m\ddot{x}_s \Rightarrow F' = F - \ddot{x}_s m$$

Ahora, si la soga es inextensible entonces

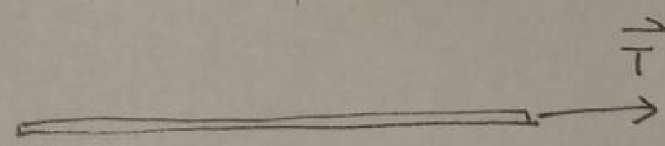
como $\frac{L}{2} + x_b = x_s \; \} \Rightarrow \ddot{x}_b = \ddot{x}_s = \ddot{x}$

Entonces, $F - m\ddot{x} = M\ddot{x}$, o bien $\boxed{\ddot{x} = \frac{F}{M+m}}$

y $F' = \frac{M}{M+m} F$. Concluimos entonces que,

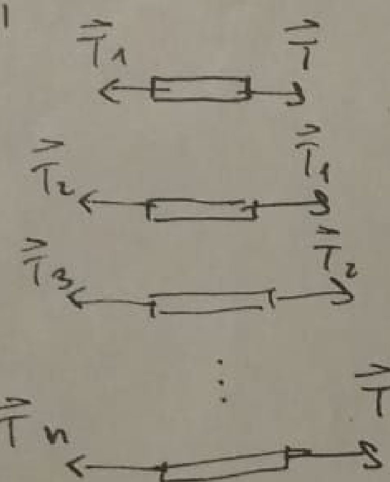
1. La aceleración total es menor que en el caso $m=0$.
2. La tensión sobre el bloque es menor que en el caso $m=0$, y únicamente es la misma en ambos puntos de la soga cuando $m=0$ (masa de la soga es despreciable)

Las sogas únicamente transmiten la tensión cuando son de masa despreciable.



Puedo pensar a la soga como muchos soguitas de masa δm con aceleración $\ddot{x}$ (todas iguales pues la soga es inextensible.

D.C.L:



$$T - T_1 = \delta m \ddot{x}$$
$$T_1 - T_2 = \delta m \ddot{x}$$
$$T_2 - T_3 = \delta m \ddot{x}$$
$$\vdots$$
$$T_{n-1} - T_n = \delta m \ddot{x}$$

Como $\delta m \to 0$ entonces tengo que $T_1 = T$, $T_2 = T_1 = T$, $T_3 = T_2 = T_1 = T$ $\ldots$, $T_n = T_{n-1} = \ldots = T$.

Entonces $T_n = T$ y la soga únicamente comunica la tensión entre esos puntos

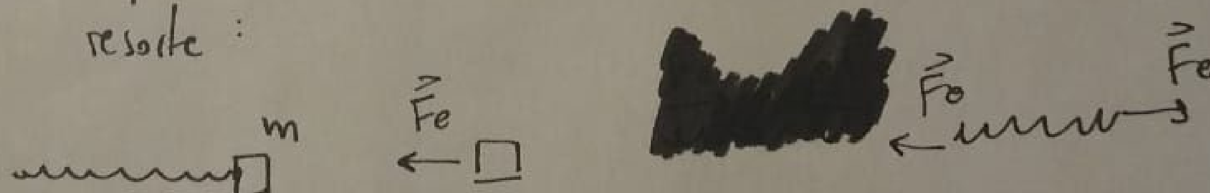
En resúmen,

1. Si la masa es despreciable, la soga únicamente transmite la tensión.

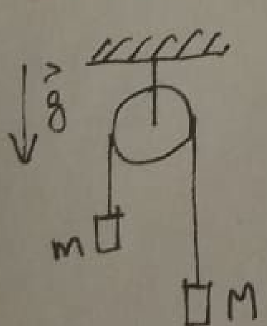
2. Si además es inextensible, las masas unidas por la soga tienen la misma aceleración.

3. Puedo considerar el caso de una soga con masa despreciable, pero extensible. En ese caso, necesito modelar el efecto de la fuerza elástica.

Una forma es aproximar a la soga como un resorte:



Ejemplo: máquina de Atwood

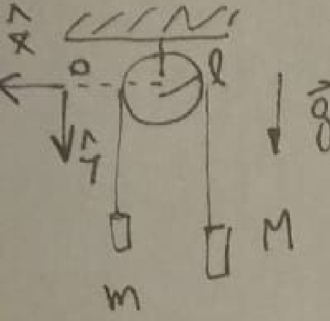


Calcular la tensión de las sogas y las aceleraciones de las masas asumiendo

- soga inextensible
- soga sin masa
- polea ideal.

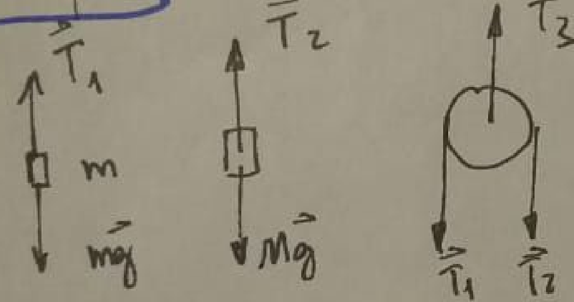
Vamos a resolverlo ordenadamente para después poder aplicar el mismo procedimiento a problemas menos intuitivos.

1er paso Origen y sistema de coordenadas



No hace falta que el O coincida con el centro de la polea. Como no hay fuerzas en $\hat{x}$, da igual.

2do paso Diagrama de cuerpo libre



Pero $\vec{T}_1 = T_2$ (Soga sin masa)

$\underbrace{T_3 = 2T}$ (polea ideal)

Esto lo vamos a poder justificar bien cerca del final de la materia

3er paso Ecuaciones de Newton

$$mg - T = m\ddot{y}_1 \qquad 2T - T_3 = m\ddot{y}_p$$
$$Mg - T = M\ddot{y}_2$$

Tres ecuaciones pero cinco incógnitas ($\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, T, T_3, \ddot{y}_p$)

4to paso Escribo los vínculos del problema.

$y_p = 0$ (polea fija) $\Rightarrow \ddot{y}_p = 0$

$y_1 + y_2 + \ell\pi = L = cte$ (soga inextensible)

$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = \ddot{L} = 0 \Rightarrow \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

Llego entonces a las ecuaciones,

$$mg - T = m\ddot{y}_1 \qquad 2T = T_3$$

$$Mg - T = -M\ddot{y}_1$$

Ahora tengo 3 ecuaciones y 3 incógnitas, y puedo resolver.

$$mg - m\ddot{y}_1 = Mg + M\ddot{y}_1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{(m - M)g}{m + M} = \ddot{y}_1 \\[2ex] \left(\dfrac{M - m}{m + M}\right)g = \ddot{y}_2 \end{array}}$$

$\Rightarrow$ Si $m > M$, $\ddot{y}_1$ es positivo y m baja.

$\Rightarrow$ Si $M > m$, $\ddot{y}_2$ es positivo, y M baja

Si $m = M$, estamos en equilibrio.

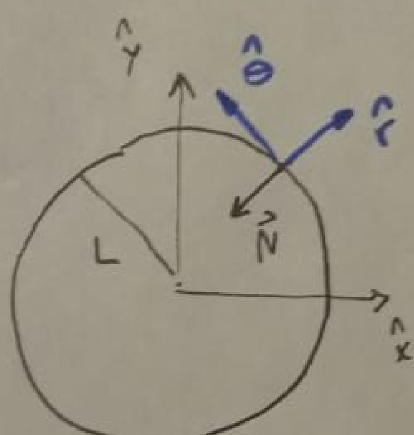
Si $m \to \infty$ ~~m~~ m está en caída libre

(idem $M \to \infty$)

Dinámica en coordenadas polares

El primer paso para resolver los ejercicios es definir un sistema de coordenadas.

Hasta ahora usamos cartesianas, pero no siempre son la mejor opción. Por ejemplo, supongamos una mota que se mueve en círculos sobre una mesa sin fricción.



La normal apunta siempre al origen.

Sería complicado escribir $\vec{N}(t)$ en cartesianas.

Pero, es super fácil en polares : $\boxed{\vec{N}(t) = -N\,\hat{r}}$

(notar que la dependencia con el tiempo está implícita en $\hat{r}$)

Entonces puedo plantear las ecuaciones de Newton en polares para m,

$\hat{r}$: $\quad -N = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$

$\hat{\theta}$: $\quad 0 = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

Ahora, escribo mis vínculos:

$r = cte = L$

$\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$

$\Rightarrow$ $\quad N = mL\dot{\theta}^2$

$\quad 0 = \ddot{\theta}$

La primera de las dos ecuaciones me da el valor de la fuerza centrípeta N como función de $\dot{\theta}$.

Por la segunda, sabemos que $\dot{\theta} = cte$ y está dada por las condiciones iniciales.

Usar cartesianas queda justificado porque,

1. $\vec{N}(A)$, la única fuerza, es $\parallel \hat{r}$.

2. El vínculo del alambre en cartesianas se escribe como

$$x^2 + y^2 = L^2.$$

Es complicado trasladar este vínculo a las ecuaciones de movimiento.

En cambio, en polares el vínculo es

$$r = L$$

con lo que $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, y es fácil incluir el vínculo en las ecuaciones de polares.

En general, habrá fuerzas en $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$, $\vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta}$

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{r}:\ F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \hat{\theta}:\ F_\theta &= m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \end{aligned}}$$

Para movimiento circular, de radio L

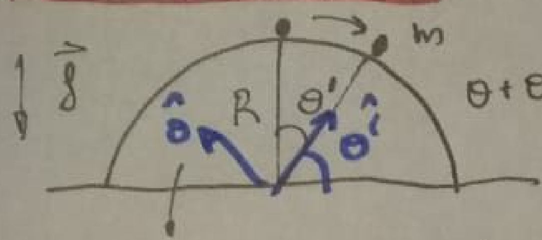
f. centípeta. Cambia la dirección de $\vec{v}$, no el módulo

$$\hat{r}:\ F_r = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\hat{\theta}:\ F_\theta = mL\ddot{\theta}$$

aceleración tangencial, cambia el módulo de $\vec{v}$, no su dirección.

Ejercicio 9 (Guía 2)

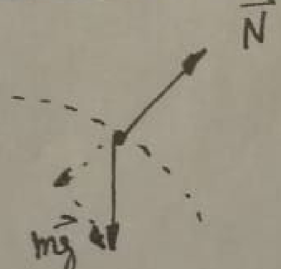


$\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$

Semi circunferencia de radio R

a) Calcular el ángulo θ' para el cual se separa de la superficie esférica, partiendo con velocidad inicial nula.

Primero hagamos un D.C.L



Tenemos que la masa sigue una trayectoria circular con una fuerza centrípeta dada por $N - mg \operatorname{sen}\theta$. A medida que θ aumenta θ, aumenta la velocidad angular y por lo tanto la fuerza centrípeta necesaria para la trayectoria circular.

$$F_r = N - mg \operatorname{sen}\theta$$

$$F_\theta = - mg \cos\theta$$

N se opone a la fuerza centrípeta, entonces se hace cada vez menor para que esta aumente. Llega un punto en que N debería hacerse < 0 para que se mantenga la trayectoria circular. Pero eso no puede pasar para la $\vec{N}$.

Entonces, en el momento en que $N = 0$, se aparta de la superficie (i.e. de la trayectoria circular)

$\boxed{\text{Entonces, planteo las ecuaciones de Newton con vínculo de movimiento circular,}}$

$$N - mg\,\text{sen}\,\theta = -\,mL\dot{\theta}^2$$

$$-\,mg\cos\theta = mL\ddot{\theta}$$

De la primera ecuación podemos despejar

$$N = mg\,\text{sen}\,\theta - mL\dot{\theta}^2 .$$

Quisiéramos encontrar un θ tal que $N = 0$.

El problema es que esta expresión también depende de $\dot{\theta}$. Entonces vamos a usar la segunda ecuación para hallar $\dot{\theta}(\theta)$.

Recordemos el ejercicio en la página 91 de Alonso y Finn, donde obteníamos $v(x)$ partiendo de $a(x)$. Acá es lo mismo pero con $v \leftrightarrow \dot{\theta}$, $x \leftrightarrow \theta$, $a \leftrightarrow \ddot{\theta}$

En el Alonso-Finn está hecho operando con diferenciales,

$$\ddot{\theta} = -\frac{g\cos\theta}{L} \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\dot{\theta}}{dt}\cdot\frac{d\theta}{d\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta}$$

$$-\frac{g\cos\theta}{L} = \frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\dot{\theta} \Rightarrow \int_{\theta_0 = \frac{\pi}{2}}^{\theta} -\frac{g\cos\theta}{L}\,d\theta = \int_{\dot{\theta}_0 = 0}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\,d\dot{\theta}$$

$$-\frac{g}{L}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{\dot\theta^2}{2}\Bigg|_0^{\dot\theta} \Rightarrow -\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} = \frac{\dot\theta^2}{2}$$

$$\frac{g}{L}\,\text{sen}\,\theta\Bigg|_{\theta}^{\pi/2} = \frac{g}{L}(1-\text{sen}\,\theta) = \frac{\dot\theta^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\theta(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{L}(1-\text{sen}\,\theta)}}$$

Ahora, tenemos $N = mg\,\text{sen}\,\theta - mL\dot\theta^2$, entonces

$$N(\theta) = mg\,\text{sen}\,\theta - m\cancel{L}\frac{2g}{\cancel{L}}(1-\text{sen}\,\theta)$$

$$N(\theta) = mg\,\text{sen}\,\theta - 2mg + 2mg\,\text{sen}\,\theta$$

$$N(\theta) = 3mg\,\text{sen}\,\theta - 2mg.$$

Entonces, el ángulo que busco es,

$$3mg\,\text{sen}\,\theta - 2mg = 0 \qquad \left(\theta' = \frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{2}{3} \qquad \boxed{\theta = \text{arc sen}\left(\frac{2}{3}\right)}$$

Otra forma de encontrar $\dot\theta(\theta)$ si me siento incómodo operando con diferenciales:

$$\ddot\theta = \frac{d\dot\theta}{dt} \underset{\text{Regla cadena}}{=} \frac{d\dot\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\dot\theta}{dt}\dot\theta$$

Pero $\frac{d\dot\theta}{d\theta}\dot\theta = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot\theta^2}{2}\right)$. (Hacer cuenta y verificar)

$$\int_{\theta_0=\frac{\pi}{2}}^{\theta} -\frac{g}{L}\cos\theta\, d\theta = \int_{\theta_0=\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\dot\theta^2}{2}\right)d\theta = \frac{\dot\theta^2}{2} \quad \text{y listo}$$

⑤ Si está engrasado (no se puede apartar de la superficie), ¿con qué velocidad llega al piso? ¿cuál es su aceleración tangencial?

Rta: Tenemos $\dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{2g}{L}(1-\operatorname{sen}\theta)}$, luego

$$\dot{\theta}(0) = \sqrt{\frac{2g}{L}} \Rightarrow \text{vel. angular.}$$

$$\boxed{\vec{v} = -L\sqrt{\frac{2g}{L}}\,\hat{\theta} = -\sqrt{2gL}\,\hat{\theta}.}$$

La aceleración angular vale,

$$\ddot{\theta}(\theta) = -\frac{g}{L}\cos\theta \,, \quad \boxed{\ddot{\theta}(0) = -\frac{g}{L}.}$$

c) Nos piden $\theta(t)$. Para eso tendríamos que resolver,

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\cos\theta.}$$

Esta es una ecuación diferencial,

¿que función $\dot{\theta}(t)$ cumple con esto cuando la meto en la ecuación?

Más adelante en la materia vamos a ver un método para obtener una solución aproximada a este problema.

Pero ahora vamos a ver como obtener una solución de forma numérica.

Supongamos un caso más sencillo, dado por la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x)$.

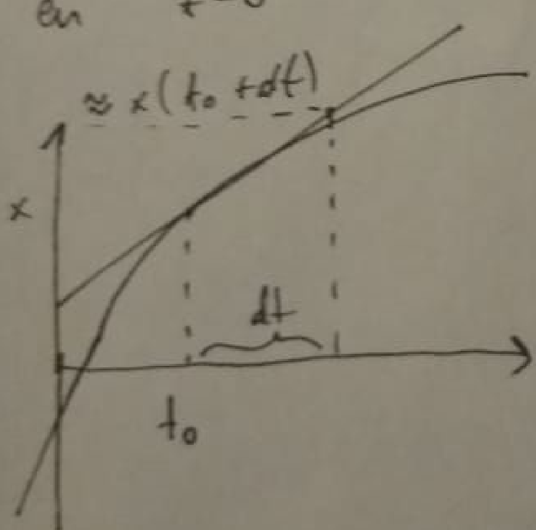
Supongamos que conozco la condición inicial

$x(0) = x_0$.

Entonces, como conozco la derivada de $x(0)$ dada por $\dot{x}(0) = f(x(0))$, puedo estimar cuanto va a valer $x(0+dt)$, es decir, x en un tiempo posterior muy corto dt.

$$x(0+dt) \approx x(0) + \dot{x}(0)dt \qquad [\dot{x}(0) = f(x_0)]$$

Esto es el desarrollo de Taylor de orden 1, el resultado de aproximar a $x(t)$ con una recta en $t=0$



Entonces, encontré $x(dt)$. Para encontrar $x(dt+dt)$ hago lo mismo,

$$x(dt+dt) \approx x(dt) + \dot{x}(dt)\,dt$$

con $x(dt)$ el resultado de la cuenta anterior,

$$\dot{x}(dt) = f(x(dt))$$

En general, si quiero obtener $x(N.dt) \approx x([N-1]dt) + \dot{x}([N-1]dt)\,dt$ donde tenemos todo lo que precisamos porque lo fuimos calculando en pasos anteriores

Entonces, estamos obteniendo puntos separados por dt en θ en cada uno de ellos, aproximando θ por una recta tangente para obtener el siguiente punto.

Este método se conoce como método de Euler.

En la práctica, tomamos dt muy pequeño para tener que $t = N dt$ está muy densamente sampleado.

Ahora, el método de Euler que vimos funciona para $\dot{x} = f(x)$. Pero la ecuación diferencial que queremos resolver posee una derivada segunda respecto al tiempo:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\cos\theta. \quad (*)$$

Para poder aplicar el método de Euler, transformamos en dos ecuaciones con derivadas primeras, introduciendo, $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, entonces $(*)$ se escribe

$$\boxed{\begin{aligned} &(1)\quad \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\frac{g}{L}\cos\theta = f(\theta) \\ &(2)\quad \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = g(\dot{\theta}). \end{aligned}}$$

La primera ecuación es la derivada de la velocidad y la segunda es la derivada de la posición

Para resolver primero necesito las dos condiciones iniciales $\theta_0 = \theta(0)$, $\dot{\theta}_0(0) = \dot{\theta}(0)$.

En este caso, sabemos que $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\theta}_0 = 0$.

Ahora, usamos 1 para obtener $\dot{\theta}(dt) = \dot{\theta}(0) + f(\dot{\theta}(0))\,dt$.

Y entonces, [redacted] usamos 2 para $\theta(dt)$

$$\theta(dt) = \theta_0 + g(\theta_0)\,dt.$$

Con $\theta(dt)$, $\dot{\theta}(dt)$ podemos repetir estos pasos N veces hasta llegar a $t = N\,dt$ y obtener $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$.

$\boxed{\text{Esto es lo que hace el código de Python que muestro en clase.}}$