Dinámica de cuerpo rígido

Vimos que el movimiento más general de un cuerpo rígido está dado por una traslación más rotación:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0$$

Veamos que en este caso se cumple la condición de rigidez.

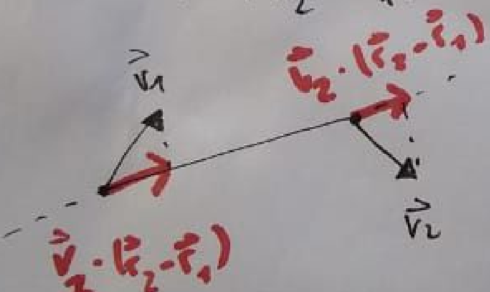
$\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ dos puntos de un cuerpo rígido con $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{\Omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = [\vec{\Omega} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)] \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$$

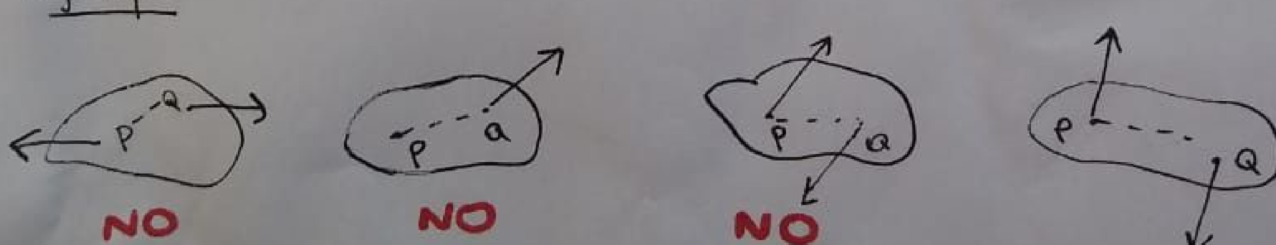
$$\vec{v}_2 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \Rightarrow$$

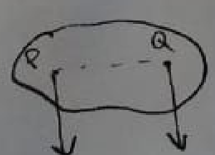
Las proyecciones de las velocidades en la recta que une ambos puntos son iguales.



Si se viola esto, no se cumple la condición de rigidez.

Ejemplos



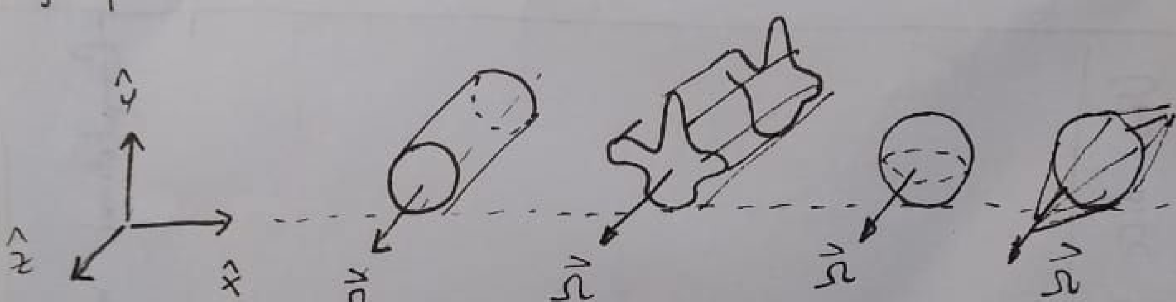


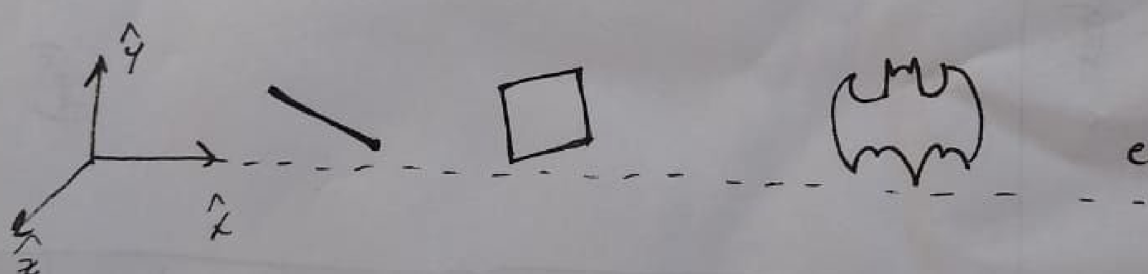
Los tres que **NO**, no pueden ser cuerpos rígidos porque cambia la distancia relativa entre P y Q. Los otros dos pueden serlo (depende de las velocidades en otros puntos)

A partir de ahora vamos a considerar el movimiento plano de cuerpos rígidos.

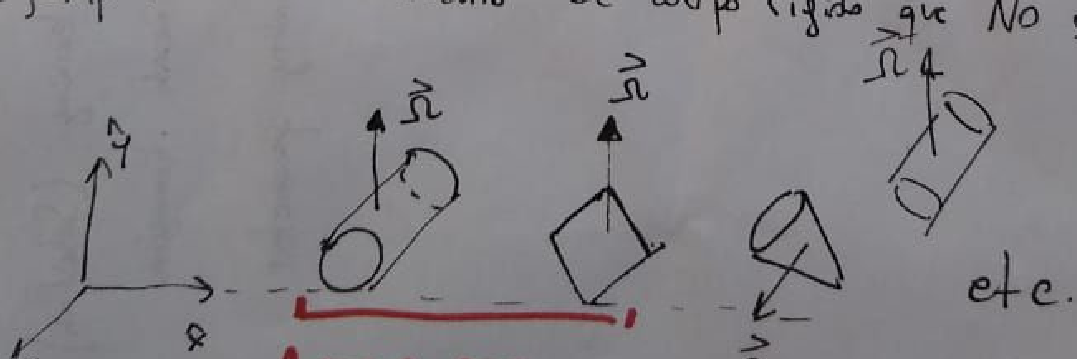
Vamos a considerar únicamente cuerpos rígidos con simetría de traslación/reflejo en el eje z, o bien sin extensión en el eje z, y cuyo $\vec{\Omega} \parallel \hat{z}$.

Ejemplos:



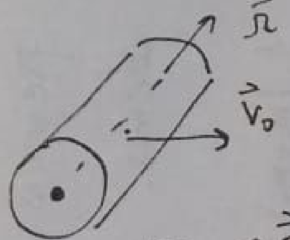


Ejemplos de movimiento de cuerpo rígido que NO son planos:



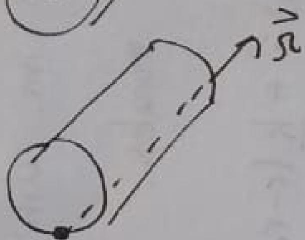
Aunque son planos en xz

obs. Es posible cambiar el eje de rotación por uno paralelo anterior modificando únicamente la velocidad de traslación



$$\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}_0$$

No es un eje instantáneo de rotación



$$\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

Sí es un eje instantáneo de rotación

Un eje instantaneo de rotación es aquel que elimina el término $\vec{v}_0$ (es decir, que vuelve el movimiento una rotación pura)

Dinámica de cuerpo rígido

Sabemos que para el C.M. del rígido,

$$\sum F^{ext} = M\ddot{\vec{R}}$$

¿Cómo encuentro la ubicación del C.M. dentro del cuerpo?

$$\vec{R} = \frac{\sum \vec{r}_i \, \delta M}{\sum \delta M}$$ pero $$\delta M = \rho(\vec{r}_i)\,\delta V = \rho(x,y,z)\,\delta x\,\delta y\,\delta z$$

Entonces,

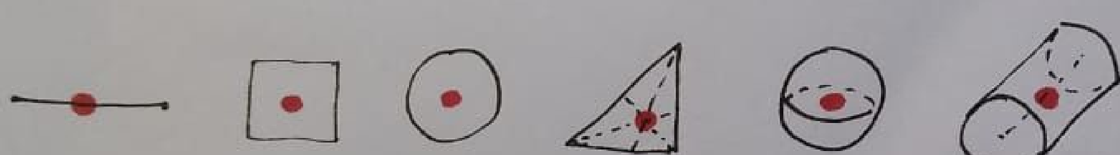
$$\vec{R} = \frac{\sum_{x,y,z} (x,y,z)\,\rho(x,y,z)\,\delta x\,\delta y\,\delta z}{\underbrace{\sum_{x,y,z} \rho(x,y,z)\,\delta x\,\delta y\,\delta z}_{M}} =$$

$$= \frac{1}{M}\left[\sum_{x,y,z} x\rho(x,y,z)\delta x\delta y\delta z\,\hat{x} + \sum_{x,y,z} y\rho(x,y,z)\delta x\delta y\delta z + \sum_{x,y,z} z\rho(x,y,z)\delta x\delta y\delta z\right]$$

si $\delta x, \delta y, \delta z \to 0$, entonces,

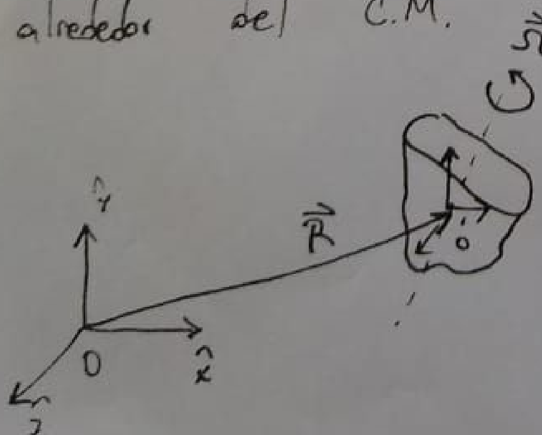
$$\vec{R} = \frac{1}{M}\left[\underbrace{\iiint x\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{R_x}\,\hat{x} + \underbrace{\iiint y\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{R_y}\,\hat{y} + \underbrace{\iiint z\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{R_z}\,\hat{z}\right]$$

Resulta que para muchos cuerpos de densidad homogénea, la simetría nos indica donde está el C.M.



Este es el caso de cuerpos que vamos a estudiar. El movimiento del C.M. se reduce al caso de una masa puntual (M) concentrada en $\vec{R}$ bajo la acción de $\sum \vec{F}^{ext}$.

Vamos a estudiar las rotaciones de un cuerpo rígido alrededor del C.M.

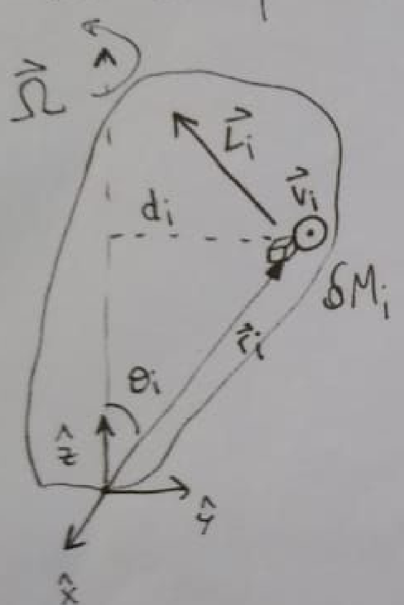


Vimos que

$$\vec{L} = \underbrace{\vec{R}\times\vec{P}}_{\substack{\text{momento angular}\\ \text{orbital asociado al}\\ \text{movimiento del C.M.}}} + \underbrace{\vec{L}_{o'}}_{\substack{\text{momento angular}\\ \text{del cuerpo rígido}\\ \text{computado desde el}\\ \text{C.M. (spin)}}}$$

Nuestro objetivo es escribir una relación entre $\vec{L}$ y $\vec{\Omega}$.
Luego, como sabemos que $\sum \vec{\tau}^{ext} = \dot{\vec{L}}$, podremos usar esta relación para encontrar $\dot{\vec{\Omega}}$.

Primero, supongamos un caso 3D general para entender cuál es el problema:



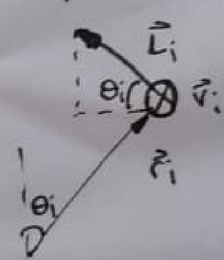
$\vec{L}_i$ = momento angular de δM_i

$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \delta M_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

Supongamos que $\vec{r}_i$ está en el plano z, y, entonces $\vec{v}_i = -v_i \hat{x}$ $\otimes \vec{v}_i$

$v_i = \Omega r_i \operatorname{sen}\theta_i$ (pues $\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$).

$\left.\begin{array}{l} \vec{L}_i \text{ es } \perp \text{ a } \vec{r}_i \\ \vec{L}_i \text{ es } \perp \text{ a } \vec{v}_i \end{array}\right\}$



$d_i = r_i \operatorname{sen}\theta_i$ = distancia entre $\vec{r}_i$ y el eje de rotación.

L_i^z = componente z de $\vec{L}_i = L_i \operatorname{sen}\theta_i$

$$L_i^z = \delta M_i \Omega r_i \operatorname{sen}\theta_i \, r_i \operatorname{sen}\theta_i = \delta M_i \Omega (\underbrace{r_i \operatorname{sen}\theta_i}_{d_i})^2 = \delta M_i \Omega d_i^2$$

Observamos que todo esto valía si $\vec{r}_i$ no estaba en el plano z, y (en ese caso, lo que va cambiando son las componentes L_i^x, L_i^y)

$\boxed{\text{En general, no tiene por qué ser } L_i^x = 0,\ L_i^y = 0}$

Eso quiere decir que a menos que se cancelen por la simetría, la sumatoria $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$ no tiene por qué apuntar en $\hat{z}$.

Eso quiere decir que en general, para un cuerpo rígido 3D,

no es cierto que $\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$.

El caso general será pospuesto algunos cuatrimestres hasta que cursen Mecánica Clásica. (aunque no me contuve y lo muestro en unas páginas)

Por ahora consideremos el caso 2D en el cual el cuerpo rígido rota alrededor de un eje de simetría, de forma tal que $\sum_i L_i^x = 0 \quad \sum_i L_i^y = 0$.

Entonces, $\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i L_i^z \hat{z}$.

Ω no depende de x,y,z, sale de la suma

$$\sum_i L_i^z = \sum_i \Omega d_i^2 \delta M_i = \sum_i \rho(x,y,z)\, d_i^2\, \delta x \delta y \delta z\, \Omega$$

d_i^2 es la distancia al eje $\hat{z}$.

$d_i^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{\text{coord } x,y \text{ de } \delta M_i}$.

Si $\delta x, \delta y, \delta z \to 0$ entonces,

$$\sum_i L_i^z \to \underbrace{\iiint (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{I \text{ = momento de inercia en } \hat{z}}\ \Omega$$

Finalmente, esto significa que

$$\vec{L} = \sum_i L_i^z \hat{z} = I\Omega\hat{z} = I\vec{\Omega}$$

Vemos que $\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$ en este caso en particular.

¿De qué depende $I = \iiint (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$?

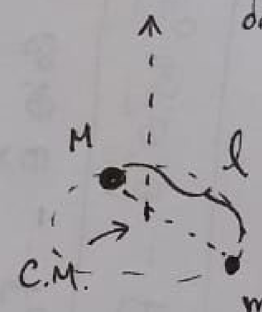
Únicamente de su forma y su densidad $\rho(x,y,z)$.

Cuando definimos la forma del cuerpo y el eje de rotación, I queda completamente definido.

Algunos ejemplos:

masa puntual m en rotación alrededor de un eje.

$I = md^2$

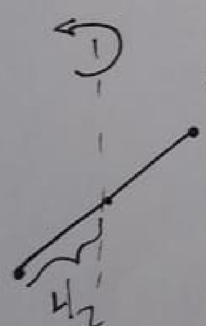


dos masas distintas M, m separadas por l rotando alrededor del C.M.

$I = \mu l^2$

masa reducida: $\dfrac{Mm}{M+m}$

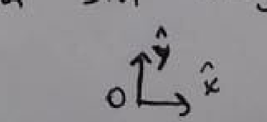
Estos dos se pueden calcular sin integrales. Veamos más casos:



varilla unidimensional de masa M

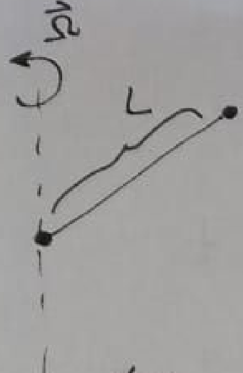
$I = \dfrac{1}{12} ML^2$

Para este caso podemos hacer la cuenta sin integrales múltiples,

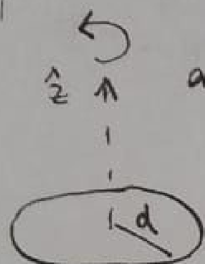


$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \rho x^2\,dx = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\rho}{3}\left[\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8}\right] = \frac{\overset{M}{\overbrace{\rho L}}\cdot L^2}{12} = \frac{1}{12} ML^2.$$

Observemos que el resultado cambia si calculo I respecto de otro eje de rotación, 8/10

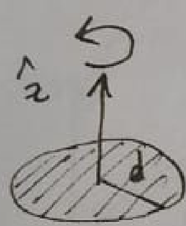


$$I = \int_0^L \rho x^2\,dx = \rho \frac{x^3}{3}\Big|_0^L = \frac{\overbrace{\rho L}^{M}}{3} L^2 = \frac{ML^2}{3}$$



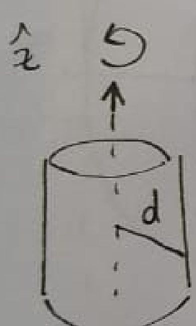
anillo de radio d y masa M

$$I = Md^2$$



disco plano de radio d y masa M

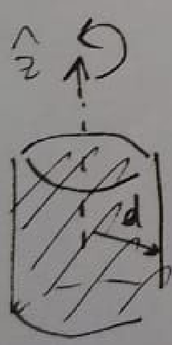
$$I = \frac{Md^2}{2}$$



cilindro hueco de radio d, masa M

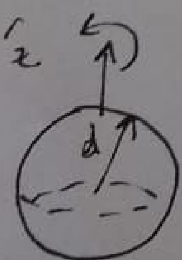
$$I = Md^2$$

(notar que la altura no importa por la simetría de traslación en el eje de rotación)



cilindro sólido de masa M, radio d

$$I = \frac{Md^2}{2}$$



esfera hueca, radio d, masa M

$$I = \frac{2}{3} Md^2$$

esfera sólida, radio d, masa M

$$I = \frac{2}{5} Md^2$$

¿Cuál es el significado físico de I?

9/10

$\sum \vec{F}^{ext} = M\dot{\vec{V}}$

$\sum \vec{\tau}^{ext} = I\dot{\vec{\Omega}}$

(pues $\vec{L} = I\vec{\Omega}$ y

$\sum \vec{\tau}_{ext} = \dot{\vec{L}} = I\dot{\vec{\Omega}}$)

I es análogo a la masa, pero para rotaciones.

A mayor I, mayor torque necesito para generar la misma aceleración angular $\dot{\vec{\Omega}}$, del mismo modo que a mayor M, mayor fuerza necesito para generar la misma aceleración $\dot{\vec{V}}$.

Para un movimiento plano, las ecuaciones

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = M\ddot{\vec{R}} \qquad \sum \vec{\tau}^{ext} = I\dot{\vec{\Omega}}}$$

definen el movimiento del cuerpo rígido, donde,

$\sum \vec{F}^{ext}$ = suma de las fuerzas externas aplicadas en cualquier punto del cuerpo rígido.

M = masa total del cuerpo rígido.

$\vec{R} / \ddot{\vec{R}}$ = posición / aceleración del C.M.

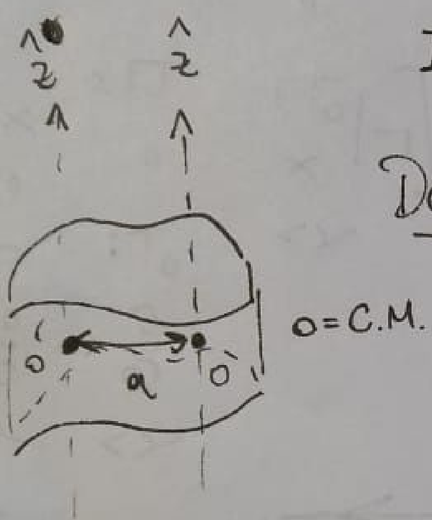
$\sum \vec{\tau}^{ext}$ = sumatoria de los torques computados desde $\vec{R}$

I = momento angular en $\hat{z}$ computado desde el C.M.

$\vec{\Omega} / \dot{\vec{\Omega}}$ = velocidad / aceleración angular en $\hat{z}$.

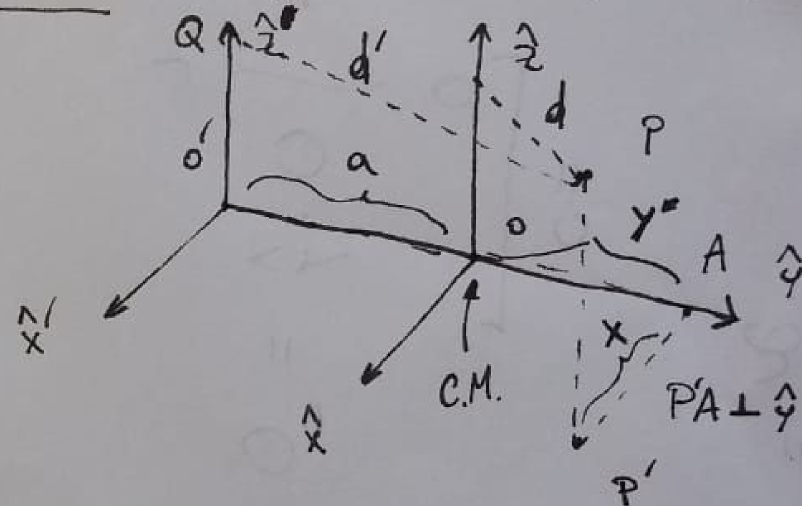
10/10

Obs Si conozco I pasando por el C.M del rígido, si realizo una traslación paralela de ese punto una distancia a, entonces el momento de inercia respecto del nuevo punto es,



$$I' = I + Ma^2 \quad \text{(Teorema de Steiner)}$$

<u>Demostración</u>. Ubiquemos los ejes tal que,



$d^2 = x^2 + y^2$, luego

$$d'^2 = x^2 + (y+a)^2$$
$$= x^2 + y^2 + 2ya + a^2$$
$$= d^2 + 2ya + a^2$$

Ahora, calculo el momento de inercia respecto de o' como,

$$I' = \sum m_i d_i'^2 = \sum m_i (d_i^2 + 2y_i a + a^2)$$

$$I' = \underbrace{\sum m_i d_i^2}_{I} + 2a\sum m_i y_i + a^2 \underbrace{\sum m_i}_{M}$$

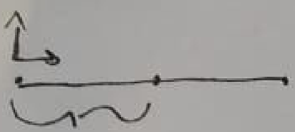
Pero $\sum m_i y_i = M \times$ coordenada y del C.M desde O

$= 0$ (pues O coincide con C.M.)

$$\Rightarrow I' = I + Ma^2 .$$

Por ejemplo, para una varilla 1D,

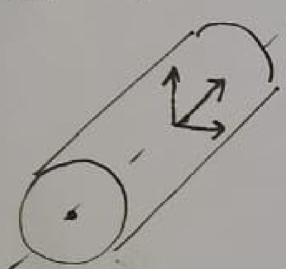
$$I = \frac{ML^2}{12}$$



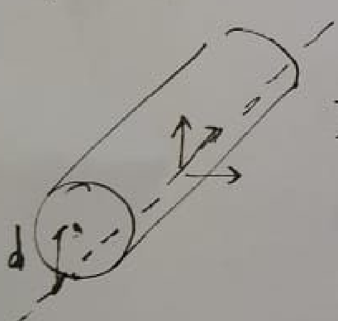
$a = \frac{L}{2}$

$$I' = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{4} = \frac{ML^2}{3}$$

En el caso de un cilindro sólido,

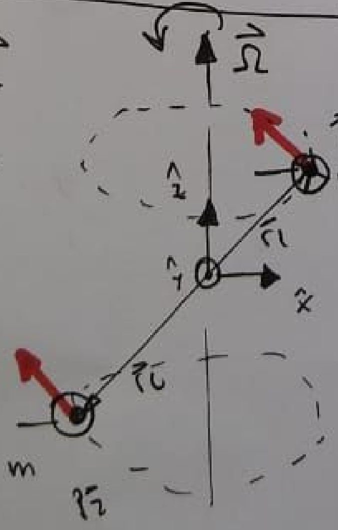


$$I = \frac{Md^2}{2}$$



$$I' = \frac{Md^2}{2} + Md^2 = \frac{3Md^2}{2}.$$

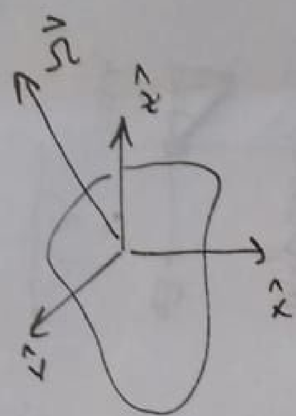
Ejemplo de $\vec{L}$ que no coincide con Ω



¿Cómo es $\vec{L}$ de cada masa?

Claramente L_x y L_y no se están cancelando, luego $\vec{L}$ no puede ser $\parallel \hat{z}$.

¿Cómo sería en el caso más general $\vec{L}$?



Para cada δM_i, $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \delta M_i \, \vec{r}_i \times \vec{v}_i$

pero $\vec{v}_i = \vec{\Omega} \times \vec{r}_i$, luego

$$\vec{L}_i = \delta M_i \, \vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i).$$

Hay una identidad vectorial muy útil,

$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$. Entonces,

$$\vec{L}_i = \delta M_i \, \vec{r}_i \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}_i) = \delta M_i \left[(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\Omega} - (\vec{r}_i\cdot\vec{\Omega}_i)\vec{r}_i \right]$$

digamos $\vec{r}_i = (x, y, z)$, $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$

$$(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\Omega} - (\vec{r}_i\cdot\vec{\Omega})\vec{r}_i = (x^2+y^2+z^2)(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z) - (x\Omega_x + y\Omega_y + z\Omega_z)(x, y, z)$$

$$= \left[(x^2+y^2+z^2)\Omega_x - (x^2\Omega_x + xy\Omega_y + xz\Omega_z),\ (x^2+y^2+z^2)\Omega_y - (xy\Omega_x + y^2\Omega_y + zy\Omega_z),\right.$$
$$\left. (x^2+y^2+z^2)\Omega_z - (xz\Omega_x + zy\Omega_y + z^2\Omega_z)\right]$$

$$= \left[(y^2+z^2)\Omega_x - xy\Omega_y - xz\Omega_z,\ (x^2+z^2)\Omega_y - xy\Omega_x - zy\Omega_z,\ (y^2+x^2)\Omega_z - xz\Omega_x - zy\Omega_y\right]$$

Entonces, esto lo puedo pensar como el producto matricial

$$\vec{L}_i = \delta M_i \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -zy \\ -xz & -zy & y^2+x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

Si quiero el momento angular total,

$$\vec{L} = \overline{\overline{I}}\,\vec{\Omega} \qquad \text{con} \qquad \overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Tensor de inercia

6 componentes independientes que dependen de ρ, la forma del objeto y de cómo yo disponga mis ejes.

$$\begin{cases} I_{xx} = \iiint \rho(x,y,z)(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\ I_{xy} = \iiint \rho(x,y,z)(-xy)\,dx\,dy\,dz \\ I_{xz} = \iiint \rho(x,y,z)(-xz)\,dx\,dy\,dz \\ I_{yy} = \iiint \rho(x,y,z)(x^2+z^2)\,dx\,dy\,dz \\ I_{yz} = \iiint \rho(x,y,z)(-zy)\,dx\,dy\,dz \\ I_{zz} = \iiint \rho_{(x,y,z)}(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz \end{cases}$$

En general, $\vec{L} = \overline{\overline{I}}\,\vec{\Omega}$ no es $// \vec{\Omega}$.

PERO, es posible elegir ejes de forma tal que

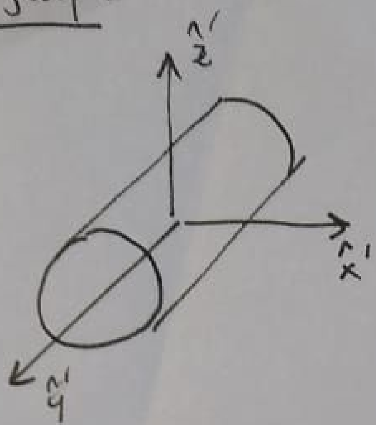
$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ ($\overline{\overline{I}}$ es diagonal)

$$\overline{\overline{I}}' = \begin{pmatrix} I'_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{zz} \end{pmatrix}$$

luego si $\vec{\Omega}$ apunta en un eje, $\vec{L}$ también apunta en ese eje

Estos ejes se llaman EJES PRINCIPALES

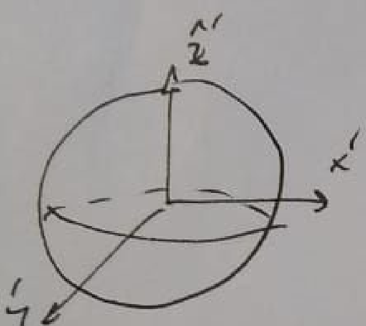
Ejemplos



(aunque $\hat{x}'$, $\hat{z}'$ tienen

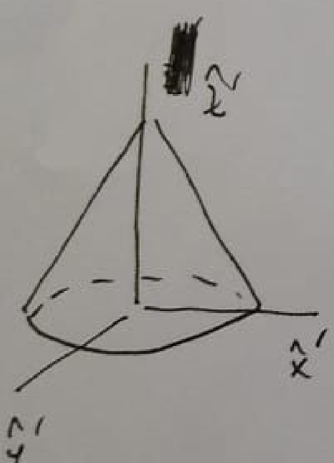
$$I_{xx}' = I_{zz}'$$

y por lo tanto esos ejes pueden rotar)



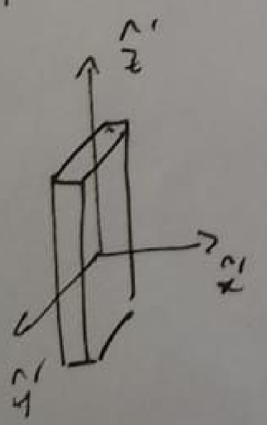
(en el caso de la esfera, todos los ejes son principales)

$$I_{xx'} = I_{yy}' = I_{zz}'$$



(igual que en el caso del cilindro, sólo dos momentos de inercia son distintos

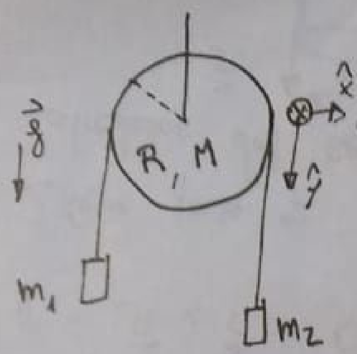
$$I_{yy} = I_{xx}$$)



en este caso, en general

$$I_{xx}' \neq I_{yy}' \neq I_{zz}'$$

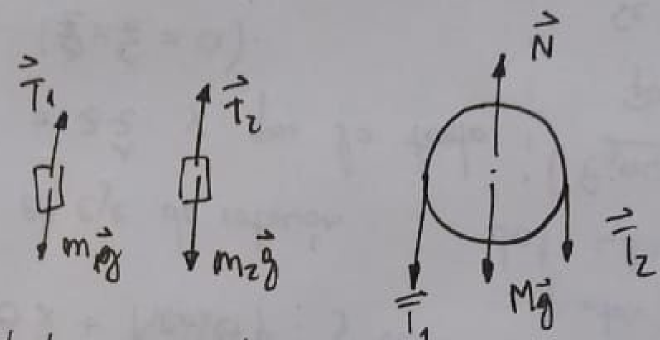
Vamos a ver cómo se usa esto en un ejemplo.



Cuerda inextensible sin masa.

Polea con masa M y radio R. La soga no desliza,

D.C.L



Para las masas puntuales, es fácil:

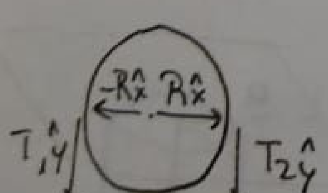
$m_1 g - T_1 = m_1 \ddot{y}_1$ Además, por el vínculo de la soga,

$m_2 g - T_2 = m_2 \ddot{y}_2$ $\qquad y_1 + y_2 + \pi R = L$ luego, $\ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

Para el C.M. de la polea,

$T_1 + T_2 + Mg - N = M\ddot{Y} = 0$ (no hay aceleración del C.M.)

Ahora calculamos los torques de T_1, T_2,



$$\vec{\tau}_1 = -R\hat{x} \times T_1\hat{y} = -RT_1\hat{z}$$

$$\vec{\tau}_2 = R\hat{x} \times T_2\hat{y} = RT_2\hat{z}$$

Entonces, $\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \dot{L} = I\dot{\Omega}$ con $I = \frac{MR^2}{2}$

$$R(T_2 - T_1) = \frac{MR^2}{2}\dot{\Omega}$$

Tengo entonces las ecuaciones,

$$m_1 g - T_1 = m_1 \ddot{y}_1$$

$$m_2 g - T_2 = -m_2 \ddot{y}_1$$

$$Mg = N - T_1 - T_2$$

$$R(T_2 - T_1) = \frac{MR^2}{2} \dot{\Omega}$$

Me falta una ecuación más.

Como la soga no desliza,

$$\dot{y}_1 = -R\Omega \Rightarrow \ddot{y}_1 = -R\dot{\Omega}$$

Ahora sí,

$$\left.\begin{aligned} R(T_2 - T_1) &= -\frac{MR}{2}\ddot{y}_1 \\ m_1 g - T_1 &= m_1 \ddot{y}_1 \\ m_2 g - T_2 &= -m_2 \ddot{y}_1 \end{aligned}\right\}$$

Despejo:

$$\ddot{y}_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + M/2}$$

$$R(T_2 - T_1) = I\dot{\Omega}$$

O sea que si $I = 0$ entonces $T_2 = T_1$ (ejercicios anteriores de dinámica)