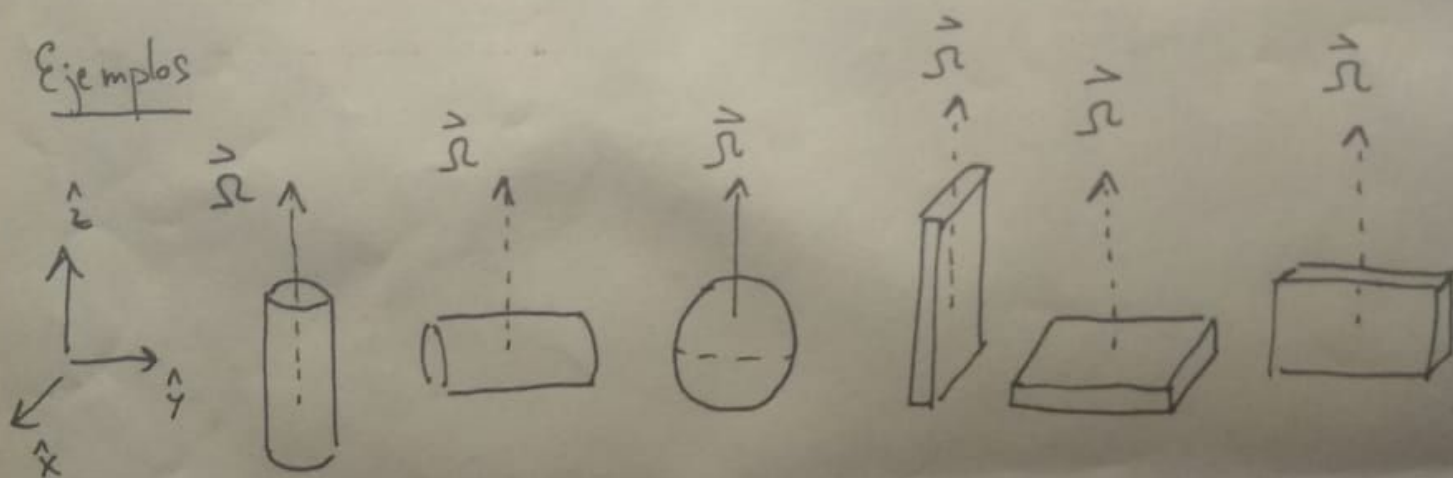


# Dinámica del cuerpo rígido (2da clase)

1/12

Vimos que si tenemos un cuerpo rígido simétrico respecto del plano  $xy$  cuyo  $\vec{\Omega}$  es  $\perp$  a ese plano, entonces  $\vec{L} = I \vec{\Omega}$  con  $I$  el momento de inercia.

## Ejemplos



En cada uno de estos casos, vale que  $\vec{L} = I \vec{\Omega}$  con  $I$  dependiendo del eje de rotación, (en todos los casos, debe ser un eje instantáneo de rotación).

Los ejes tales que una rotación alrededor de ese eje resulta en  $\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$  se llaman ejes principales de rotación.

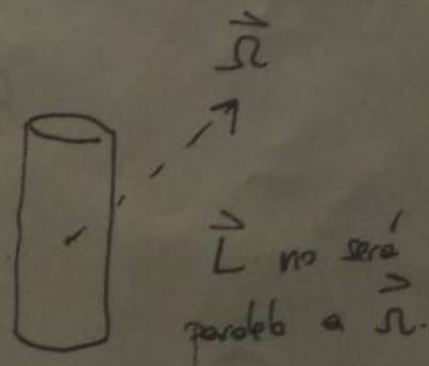
Cada cuerpo tiene tres. En el caso de que no sepamos cuáles son, se deducen diagonalizando el tensor de inercia (Mecánica clásica).

No siempre ocurre que  $\vec{L} \parallel \vec{\Omega}$  y por lo tanto, no siempre la rotación está

confinada a un plano.

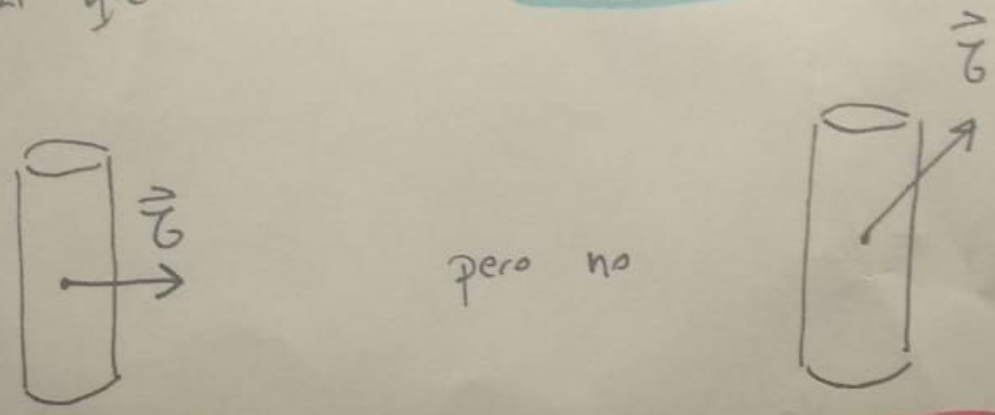
(de nuevo, en Mecánica clásica)

Ej. 5  
Práctica 0



$\vec{L}$  no será paralelo a  $\vec{\Omega}$ .

Nosotros vamos a lidiar con  $\vec{\omega} \perp \vec{\Omega}$  de forma tal que la rotación no salga del plano



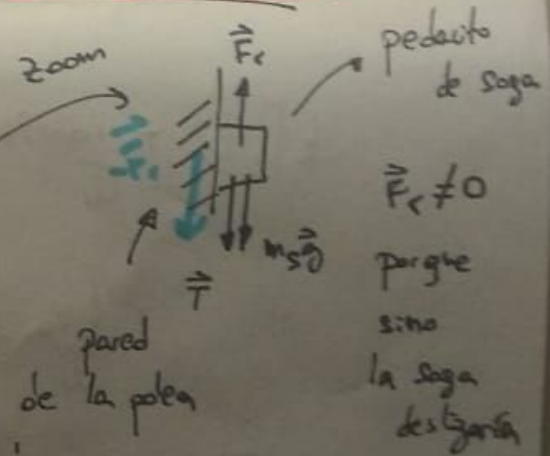
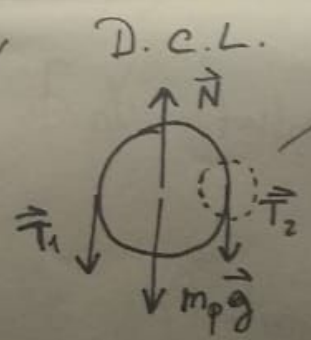
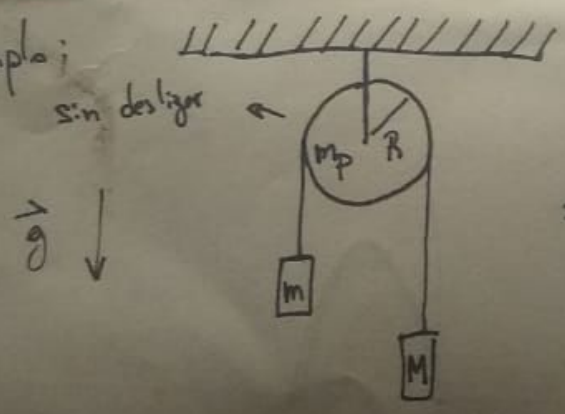
pero no

En estas condiciones, el objetivo es resolver las ecuaciones desde el C.M.

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \ddot{\vec{R}} \quad \sum \vec{\tau}_{ext} = I \dot{\vec{\Omega}}$$

aplicadas sobre el C.M. para determinar el movimiento del rígido.

Ejemplo:



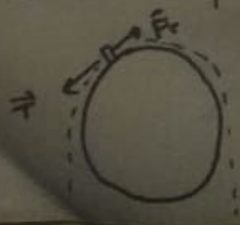
$\vec{F}_r \neq 0$   
porque sino la soga deslizaría

Ahora, por el mismo razonamiento, ¿no tendría que haber considerado los elementos de cuerda que están en otras partes de la polea?

$$m_s \vec{a}_s = \vec{T} + m_s \vec{g} - \vec{F}_r$$

$$m_s \rightarrow 0$$

$$\vec{T} = \vec{F}_r$$



¡Si! Está mal pensar que únicamente hay torque en los extremos derecho e izquierdo de la polea. 3/12

Al sumar la contribución de todos los pedacitos de cuerda, podemos representar al torque resultante como el realizado por  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$ . Si hubiese fuerzas netas resultantes además de torques, en este caso no importaría porque el C.M. de la polea está fijo por el soporte.

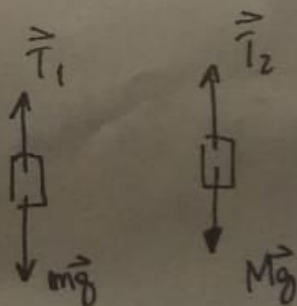
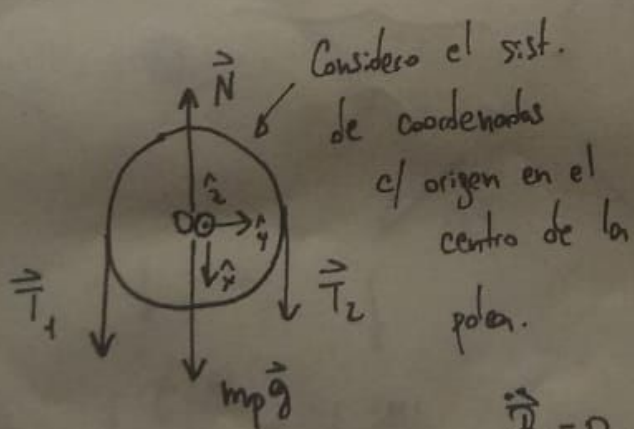
El tratamiento completo del problema no está en ningún libro de mecánica que conozca, pero está en un paper:

"Force and torque of a string on a pulley"

American Journal of Physics 86, 275 (2008)

(buscarlo en el campus virtual)

Sigamos entonces con los D.C.L.



$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m_p \vec{g} + \vec{N} = \vec{0}$$

vináalo hace que el C.M. esté quieto

Equación para el movimiento del C.M. del disco/polea

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= mg - T_1 \\ M\ddot{x}_2 &= Mg - T_2 \end{aligned} \right\} \text{ para las masas.}$$

$$\text{Torque de } \vec{T}_1 = \vec{G}_1 = -R\hat{y} \times T_1\hat{x} = RT_1\hat{z}$$

$$\text{Torque de } \vec{T}_2 = \vec{G}_2 = R\hat{y} \times T_2\hat{x} = -RT_2\hat{z}$$

$$\vec{G}^{\text{tot}} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 = \underline{R(T_1 - T_2)\hat{z}} = \underline{I\dot{\Omega}}$$

Como  $\dot{\Omega} = \Omega\hat{z}$  puedo escribirla como una ecuación escalar

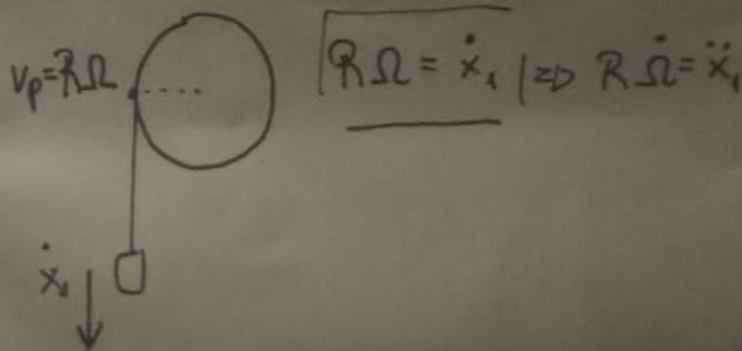
$$\left. \begin{aligned} R(T_1 - T_2) &= I\dot{\Omega} \\ m_1\ddot{x}_1 &= mg - T_1 \\ m_2\ddot{x}_2 &= Mg - T_2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{¿vínculos?} \\ &\textcircled{1} \text{ saga inextensible.} \\ &x_1 + x_2 + \pi R = L \\ &\dot{x}_1 = -\dot{x}_2, \quad \ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \end{aligned}$$

$\textcircled{2}$  No hay deslizamiento

Supongamos  $\Omega > 0$ . (si fuera el caso opuesto nos vamos a dar cuenta al terminar).

Es equivalente a decir  $m > M$ . (☹ mala elección de cual era la "m" mayúscula)

Entonces, la  
velocidad de un punto  
P en el borde de la polea  
tiene que ser igual que  $\dot{x}_1$



Entonces llegamos al sist. de ecuaciones que si podemos resolver:

5/12

$$m\ddot{x}_1 = mg - T_1 \quad (1)$$

Cinco ecuaciones,

$$M\ddot{x}_2 = Mg - T_2 \quad (2)$$

cinco incógnitas ( $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, T_1, T_2, \dot{\Omega}$ )

$$R(T_1 - T_2) = I\dot{\Omega} \quad (3)$$

(4) en (2)

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2 \quad (4)$$

Despejamos,  $\leftarrow (1) - (2)$

$$R\dot{\Omega} = \ddot{x}_1 \quad (5)$$

$$m\ddot{x}_1 + M\ddot{x}_1 = (m+M)g - T_1 + T_2$$

$$(m+M)\ddot{x}_1 = (m+M)g - (T_1 - T_2)$$

$$R(T_1 - T_2) = \frac{I}{R}\ddot{x}_1$$

en (3)

$$T_1 - T_2 = (m+M)g - (m+M)\ddot{x}_1$$

$$R^2(T_1 - T_2) = I\ddot{x}_1$$

(5) en (3)

✎

$$\left. \begin{aligned} R^2[(m+M)g - (m+M)\ddot{x}_1] &= I\ddot{x}_1 \\ R^2(m+M)g &= [I + R^2(m+M)]\ddot{x}_1 \end{aligned} \right\} \ddot{x}_1 = \frac{R^2(m+M)g}{I + R^2(m+M)}$$

Obs: No depende directamente de  $m_p$ , sino del momento de inercia  $I$ .

Haciendo  $I = \frac{m_p R^2}{2}$  entonces,

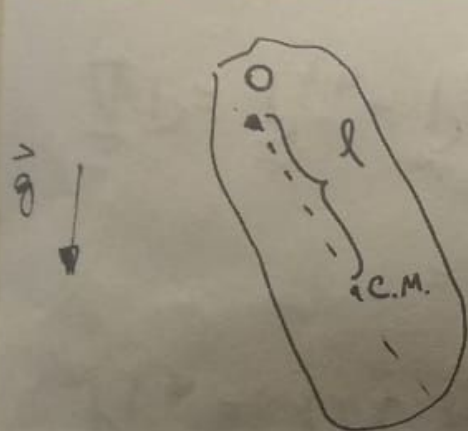
$$\ddot{x}_1 = \frac{R^2(m+M)g}{\frac{m_p R^2}{2} + R^2(m+M)} = \frac{(m+M)g}{\frac{m_p}{2} + m + M}$$

→ no depende de  $R$ , el radio de la placa

Obs: Vimos que  $T_1 - T_2 = \frac{I}{R^2} \left[ \frac{(m-M)g}{\frac{m_p}{2} + m + M} \right] = \frac{m_p(m-M)g}{2(\frac{m_p}{2} + m + M)}$

si  $m_p \rightarrow 0$  entonces  $T_1 = T_2$   
(cómo habíamos visto en guías pasadas)

**Ejemplo. Péndulo físico**

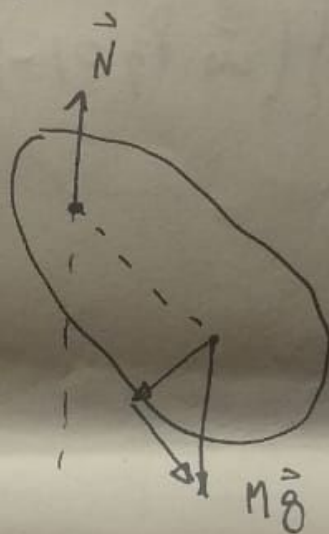


O eje de rotación.  
D.C.L

$$\vec{N} + M\vec{g} = M\ddot{R}$$

$\neq 0$

¿Cómo averiguamos  $\vec{N}$ ?



$$\vec{\tau} = l \hat{i} \times (Mg \cos \theta \hat{i} - Mg \sin \theta \hat{o})$$

$$\vec{\tau} = -Mgl \sin \theta \hat{z} \quad \text{Ahora, } \vec{\tau} = \underline{I'} \dot{\omega}$$

¡Cuidado!

$I'$  no es el momento de inercia desde el C.M. sino desde un eje paralelo que está a distancia  $l$  del C.M.

En ese caso vale que  $\underline{I'} = \underline{I} + Ml^2$

momento de inercia desde el nuevo eje      momento de inercia desde el eje que pasa

**Teorema de Steiner**

$$\text{Entonces, } -Mgl \sin \theta \hat{z} = I' \ddot{\hat{z}}$$

+112

$$\text{Ahora } \ddot{\hat{z}} = \ddot{\theta} \hat{z}, \text{ entonces, } -Mgl \sin \theta \hat{z} = I' \ddot{\theta} \hat{z}$$

$$\frac{Mgl \sin \theta}{I'} + \ddot{\theta} = 0$$

Si tengo una masa puntual,

entonces  $I' = Ml^2$ , y

recapito la ecuación del péndulo ideal,

$$\frac{Mgl \sin \theta}{Ml^2} + \ddot{\theta} = 0$$

$$\frac{g}{l} \sin \theta + \ddot{\theta} = 0$$

Si  $\theta$  es pequeño,  
puedo decir que  $\sin \theta \approx \theta$ ,

$$\frac{Mgl}{I'} \theta + \ddot{\theta} = 0$$

$\omega^2$  del movimiento armónico.

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I'}}$$

Supongamos que  $I$  es el momento de inercia desde un eje que pasa por el C.M.

$$\text{Entonces, } I' = I + Ml^2.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgl}{I + Ml^2}}$$

Obs: Mayor  $l$ , menor frecuencia, mayor periodo.

Mayor  $I$ , menor frecuencia, mayor periodo.

Obs: Como  $I \propto M$ , entonces  $\omega$  no debe depender de la masa.

Por ejemplo, si el péndulo tiene forma de disco de radio  $R$ ,  $I' = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3MR^2}{2}$

8/12

$$\omega = \sqrt{\frac{MgR}{\frac{3}{2}MR^2}} = \sqrt{\frac{2g}{3R}} \rightarrow \text{esto es algo que podemos verificar con una pizzera del tipo}$$

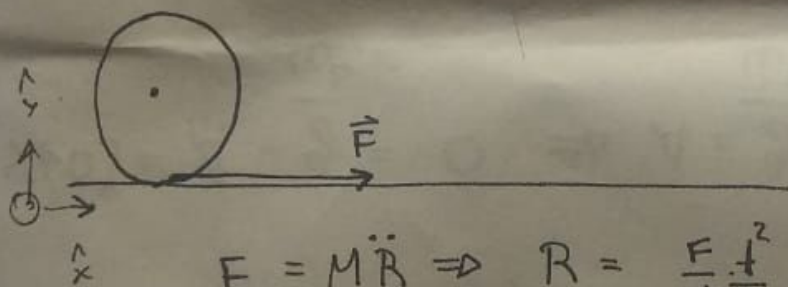


Para  $\theta$  pequeño, la forma de la solución es  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$ .

Hasta ahora vimos movimientos rotacionales.

Vamos a estudiar ejemplos de movimientos roto-translacionales.

El disco puede deslizarse (no hay rozamiento)



$$F = M\ddot{R} \Rightarrow R = \frac{F}{M} \frac{t^2}{2} \rightarrow \text{mov. uniforme acelerado para el centro de masa con}$$

$$a = \frac{F}{M}$$

$$\vec{\tau} = -R\hat{y} \times F\hat{x} = RF\hat{z}$$

$$RF = I\dot{\Omega} \Rightarrow RF = \frac{MR^2}{2}\dot{\Omega} \Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{2F}{MR}$$

$$\Omega = \frac{2F}{MR} t$$



Nosotros estamos refiriendo la rotación respecto del C.M.

9/12

de forma tal que  $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{P} + \underbrace{\sum_i \vec{r}'_i \times \vec{p}_i}_{\vec{L}_{CM}}$

Para un movimiento plano,  $\vec{L}_{CM} = L_{CM} \hat{z} = I \Omega \hat{z}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{G}_{CM} = I \dot{\Omega} \hat{z}}$$

si calculo los torques desde el centro de masa puedo encontrar la ecuación para  $\dot{\Omega}$

¿Qué pasa si no hago la cuenta desde el C.M.?

En este caso,

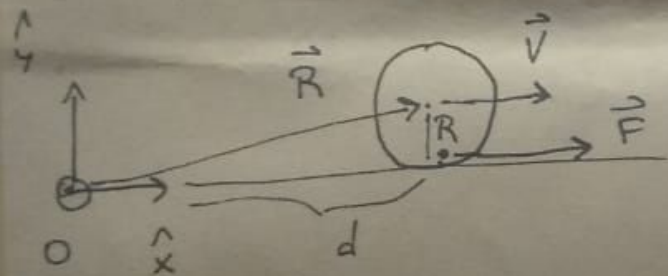
$$\vec{G}_O = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$$

$$\vec{L} = \frac{MR^2}{2} \dot{\Omega} \hat{z} + \vec{R} \times M\vec{V}$$

$$\vec{L} = \frac{MR^2}{2} \dot{\Omega} \hat{z} + (d\hat{x} + R\hat{y}) \times MV\hat{x} = \frac{MR^2}{2} \dot{\Omega} \hat{z} + -RMV\hat{z}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{MR^2}{2} \dot{\dot{\Omega}} \hat{z} - RMa\hat{z} = 0 \quad \left. \vphantom{\frac{d\vec{L}}{dt}} \right\} \frac{MR^2}{2} \dot{\Omega} = RMa = \frac{RMF}{M}$$

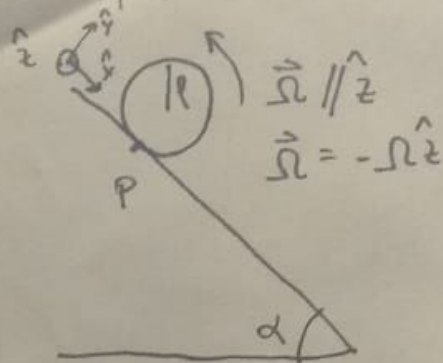
$$\boxed{\dot{\Omega} = \frac{2F}{MR}}$$



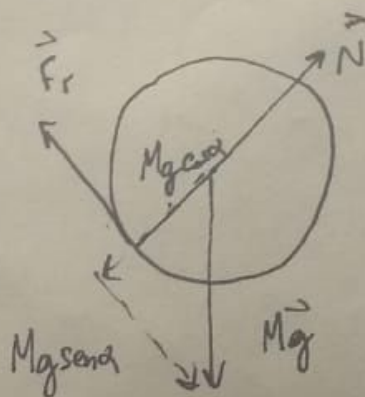
Ejemplo: cuerpo rígido rodando por un plano inclinado

10/12

Supongamos para fijar ideas, un cilindro de radio  $\rho$



D.C.L.



Para el C.M.  $Mg \sin \alpha - F_r = M\ddot{R}$  (1)

$\vec{\tau} = -F_r \hat{x} \times (-\rho \hat{y}) = F_r \rho \hat{z}$ . Pero  $\vec{\tau} = F_r \rho \hat{z} = I \dot{\Omega} \hat{z}$

de donde obtengo la ecuación escalar:

unicamente  $F_r$   
hace torque

$F_r \rho = I \dot{\Omega}$  (2)

S: el cilindro rueda sin deslizar

$\vec{v}_P = -\Omega \hat{z} \times (\rho \hat{y}) + \dot{R} \hat{x} = -\rho \Omega \hat{x} + \dot{R} \hat{x} = 0$

entonces,  $\dot{R} = \rho \Omega \Rightarrow \ddot{R} = \rho \dot{\Omega}$  (3)

De (1) + (2)  $F_r = \frac{I \dot{\Omega}}{\rho} \Rightarrow Mg \sin \alpha - \frac{I \dot{\Omega}}{\rho} = M\ddot{R}$

+ (3)

$M\ddot{R} = Mg \sin \alpha - \frac{I \ddot{R}}{\rho^2} \Rightarrow \ddot{R} \left( M + \frac{I}{\rho^2} \right) = Mg \sin \alpha$

$\ddot{R} = \frac{Mg \sin \alpha}{M + I/\rho^2}$

1) Si es un cilindro sólido,  $I = \frac{M\ell^2}{2}$ ,  $\ddot{R} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$

22/12

2) Si es una esfera sólida,  $I = \frac{2}{5}M\ell^2$ ,  $\ddot{R} = \frac{5}{7}g \sin \alpha$

3) Si es un cilindro hueco,  $I = M\ell^2$ ,  $\ddot{R} = \frac{g}{2} \sin \alpha$

4) Si es una masa puntual,  $I = 0$ ,  $\ddot{R} = g \sin \alpha$  (como ya sabíamos)

¿Cómo se ordenan las aceleraciones?

$\boxed{4} \succ \boxed{2} \succ \boxed{1} \succ \boxed{3}$   
Masa puntual      Esfera sólida      Cilindro sólido      Cilindro hueco

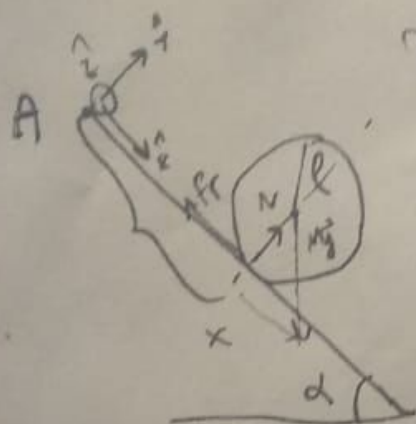
Notar que  $\ddot{R}$  no depende de la masa, únicamente de como está distribuida alrededor del C.M.

Si en promedio está más lejos, el momento de inercia es mayor y la aceleración es menor.

~~Problema de momento angular~~

12/12

Podemos avanzar de otra forma si escribimos el momento angular y los torques respecto del C.M.



Desde A,

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= (x \hat{x} + l \hat{y}) \times Mg \sin \alpha \hat{x} \\ &+ (x \hat{x} + l \hat{y}) \times (-Mg \cos \alpha \hat{y}) \\ &+ (x \hat{x}) \times N \hat{y} \\ &+ (x \hat{x}) \times (-F_c \hat{x}) \end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = \left[ -Mg l \sin \alpha - Mg x \cos \alpha + xN \right] \hat{z}$$

$$= \underbrace{x(N - Mg \cos \alpha)}_{=0 \text{ (vibrado)}} \hat{z}$$

$$\vec{\tau} = -Mg l \sin \alpha \hat{z}$$

El momento angular es,  $\vec{L} = I \vec{\Omega} + \vec{R} \times M \dot{\vec{R}}$

$$I \vec{\Omega} = -I \Omega \hat{z} \quad \vec{R} \times \dot{\vec{R}} = (x \hat{x} + l \hat{y}) \times \dot{R} \hat{x} = -l \dot{R} \hat{z}$$

Por lo tanto  $I = \frac{M l^2}{2}$

$$\vec{L} = \left[ -\frac{M l^2}{2} \Omega - M l^2 \dot{\Omega} \right] \hat{z} = -\frac{3}{2} M l^2 \dot{\Omega} \hat{z}$$

Igualando  $\vec{\tau} = \dot{\vec{L}}$ ,  $-Mg l \sin \alpha = -\frac{3}{2} M l^2 \dot{\Omega} \Rightarrow \dot{\Omega} = \frac{2}{3} \frac{g \sin \alpha}{l}$

y por consecuencia  $\ddot{R} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$